中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第三名

030425

同時平分三角形、四邊形的周長與面積之研究

臺北縣立江翠國民中學

作者姓名：

國二 劉易青 國二 史宜平 國二 林彥辰

國二 李屹

指導老師：

黃錫川

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：同時平分三角形、四邊形的周長與面積之研究

關 鍵 詞：平分線、面積與周長、最小周長

編　　號：

--目 錄--

摘要

平分多邊形的的面積是常見的研究題材，要平分周長也容易，但要同時平分兩者，就須思考與探討了。本件作品的研究方向以計算證明著手，分別列出平分面積、周長的方程式，再利用一元二次方程式求聯立方程式的解。並從判別式與解的範圍，來探討可做出幾條平分線，並利用餘弦定理求平分線的最小值。由此可得知平分線的位置與最小周長的值。

壹、 研究動機

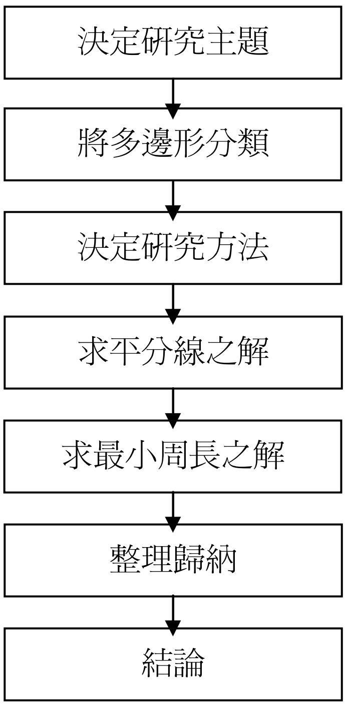
在學習等腰三角形的時候，我們了解等腰三角形的底邊中垂線可同時平分其面積及周長，那其他三角形可不可以找到一條同時平分面積與周長的平分線呢？如果有，是否一個指定的形狀內只存在一條呢？四邊形是否也找得到平分線呢？於是便決定了研究主題「同時平分三角形、四邊形的周長與面積之研究」，並結合國二數學課本所授之「二元一次聯立方程式求解」、「乘法公式與因式分解」、「一元二次方程式求解」、「三角形的全等性質」等觀念，展開了這次的研究。

貳、 研究目的

一、 研究如何同時平分三角形的周長與面積，並求出最小周長。
二、 擴展到四邊形的研究。

參、 研究過程或方法

一、 研究方法



二、 定義

(一) 平分線

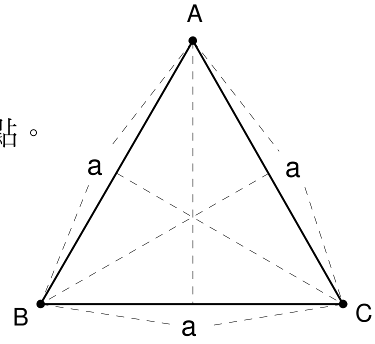
以下所指平分線係爲同時平分多邊形的面積與周長之直線。

(二) 最小周長

平分線將多邊形的面積平分，使周長相等，而使一多邊形平分後產生的兩多邊形周長總和爲最小之値即爲最小周長。但由於一多邊形周長被平分後爲定値，所以最小周長的平分線即爲最短平分線。

三、 研究三角形的情形

首先將三角形分類，可分爲正三角形、等腰三角形（恰有兩邊相等的三角形）及不等邊三角形（三邊皆互不相等的三角形）。分述如下：



圖一

(一) 正三角形

依照平分線段與三角形的 2 個交點，可分爲過頂點和不過頂點。

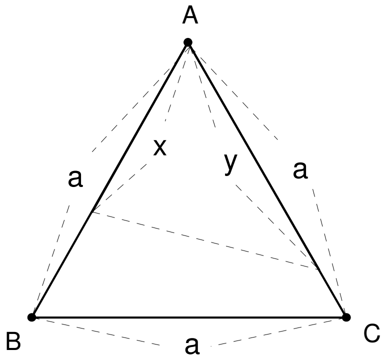
1、平分線過頂點（如圖一）

滿足同時平分周長與面積的平分線共 3 條，爲 3 中線。

2、平分線不過頂點

設正三角形的邊長爲 a，平分線與同一頂點 A 距離分別爲 x、y，（如圖二），則必滿足 $\frac{a}{2}<x<a$ ， $\frac{a}{2}<y<a$ 二者，否則無法平分面積。可列式如下：

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{2}\cdot 3a\text{---}[1] \text{ (平分周長)} \\ x\cdot y=\frac{1}{2}\cdot a^2\text{---}[2] \text{ (平分面積)} \end{cases}$$



圖二

上列[2]式利用下述性質：夾同角二個三角形面積之比爲夾此角二邊乘積之比。

解聯立方程式，得到

$$(x-a)\left(x-\frac{a}{2}\right)=0$$

$x=a$ 或 $x=\frac{a}{2}$

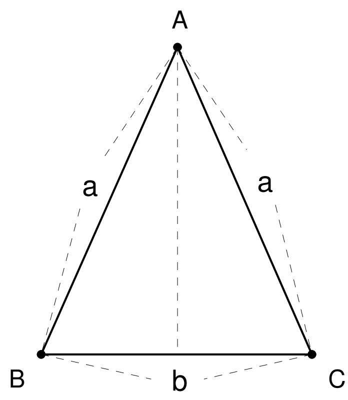
皆與規定 $\frac{a}{2}<x<a$ 不合，故無解

3、故正三角形的情形整理如下：

任一正三角形均有 3 條平分線，即 3 中線。

(二) 等腰三角形（恰有兩邊相等的三角形）

分爲 2 種情形，如下：



圖三

1、平分線過頂點

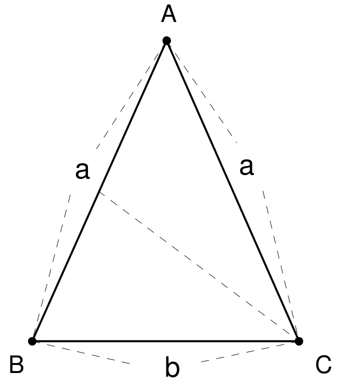
過頂點有兩種平分方式。

(1)平分線過頂角的頂點

平分線共 1 條，爲中線（如圖三）。

(2)平分線過底角的頂點

當交點於底角時，另一交點於腰的中點（如圖四），面積才會平分，但此時無法平分周長（$\because a \neq b$），故無解。



圖四

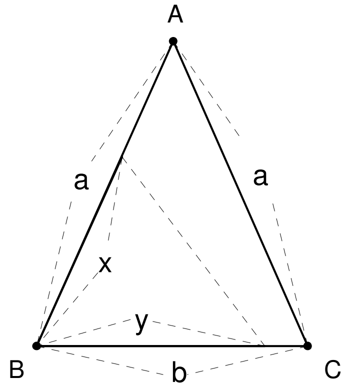
2、平分線不過頂點

分爲 2 種情形，如下：

(1) 截腰和底的平分線（如圖五）

令$\dfrac{a}{2}<x<a$， $\dfrac{b}{2}<y<b$

則$\begin{cases} x+y=\dfrac{2\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}---[1] \text{ (平分周長)} \\ x\cdot y=\dfrac{\mathrm{ab}}{2}---[2] \qquad \text{(平分面積)} \end{cases}$



圖五

求解後，得到

$(x-a)\left(x-\dfrac{b}{2}\right)=0$

$x=a$或$\dfrac{b}{2}$

（i）當$x=a$時，與$\dfrac{a}{2}<x<a$規定不合

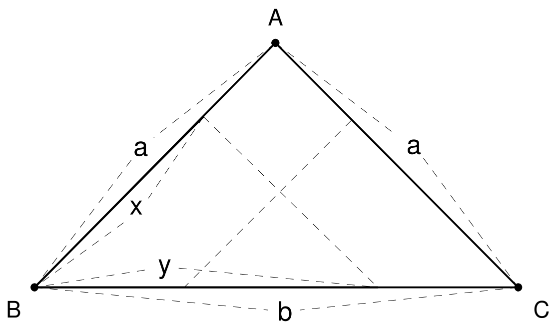
（ii）當$x=\dfrac{b}{2}$時，得$y=a$

此時，$(x,y)=\left(\dfrac{b}{2},a\right)$須滿足

$\dfrac{a}{2}<x<a$ ，$\dfrac{b}{2}<y<b$

得知必須$b>a$才有解（如圖六）

另有一條平分線過另一腰和底，與此平分線左右對稱。



圖六

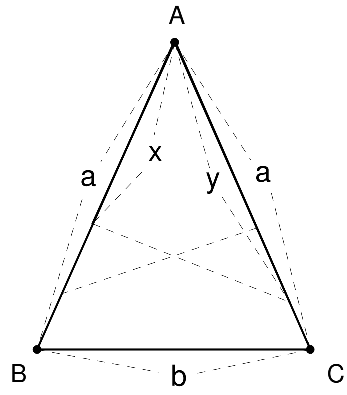
整理如下：(1)當$b>a$時，截腰和底的平分線有 2 條

(2)當$b\leq a$時，截腰和底的平分線有 0 條

(2) 截兩腰的平分線（如圖七）

令$\dfrac{a}{2}<x<a$， $\dfrac{a}{2}<y<a$

$\begin{cases} x+y=\dfrac{2a+b}{2}...[1] \text{ (平分周長)} \\ x\cdot y=\dfrac{a^2}{2}...[2] \qquad \text{(平分面積)} \end{cases}$



圖七

求解後，得到

$$(x,y)=\left(\frac{a+\frac{b}{2}\pm\sqrt{D}}{2},\frac{a+\frac{b}{2}\mp\sqrt{D}}{2}\right)$$

其中，$D=-a^2+ab+\dfrac{b^2}{4}$

其解需同時滿足① $\dfrac{a}{2}<x<a$ 和 $\dfrac{a}{2}<y<a$ 且② $D\geq 0$ 方爲有解

由① $\dfrac{a}{2}<x<a$ 和 $\dfrac{a}{2}<y<a$，得出 $a>b$

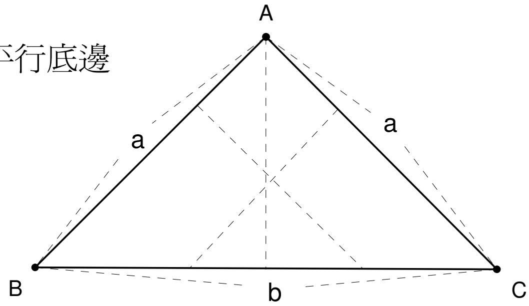
由② $D\geq 0$，得出 $b\geq 2\left(\sqrt{2}-1\right)a$

故須滿足 $a>b\geq 2\left(\sqrt{2}-1\right)a$ 方爲有解

且當 $b=2\left(\sqrt{2}-1\right)a$ 時，$x=y=\dfrac{a+\frac{b}{2}}{2}$，即平分線平行底邊

3、等腰三角形的情形整理如下：

設二腰爲 a，底邊爲 b　$(a\neq b)$



圖八

(1) $b>a$

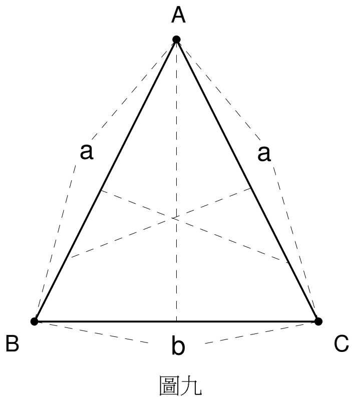
平分線共 3 條

平分線底上的中線 1 條，通過腰和底的平分線 2 條（2 條相等）（圖八）

(2) $a>b>2\left(\sqrt{2}-1\right)a$

平分線共 3 條（圖九）

底上的中線 1 條，通過兩腰的平分線 2 條（2 條相等）



圖九

(3) $b=2\left(\sqrt{2}-1\right)a$

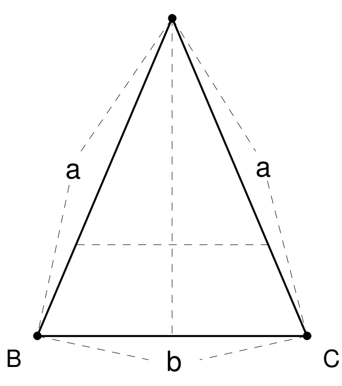
平分線共 2 條（圖十）

底上的中線 1 條，通過兩腰且平行底的平分線 1 條

(4) $b<2\left(\sqrt{2}-1\right)a$

平分線共 1 條

僅有底上的中線 1 條



圖十

4、找出最短的平分線：

(1)當$b > a$時

共 3 條平分線（如圖十一）

底上的中線 1 條，通過腰和底的平分線 2 條

分別是$\overline{AE}, \overline{DH}, \overline{FG}$

$\overline{BD} = \overline{CF} = \frac{b}{2}, \overline{BH} = \overline{CG} = a$

在ΔABE和ΔHBD中

$\because \overline{AB} = \overline{HB}$

$\overline{BE} = \overline{BD}$

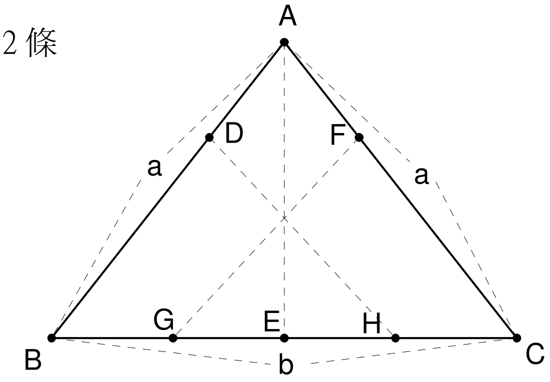
$\angle B = \angle B$

$\therefore \Delta ABE \cong \Delta HBD$

同理$\Delta ACE \cong \Delta GCF \quad (SAS)$

$\therefore \overline{AE} = \overline{DH} = \overline{FG}$

→三條平分線相等



圖十一

(2)當$a > b > 2(\sqrt{2}-1)a$時

共 3 條平分線（如圖十二）

底上的中線 1 條，通過兩腰的平分線 2 條（相等）

設通過兩腰的平分線爲m，垂直底邊的平分線爲n

且 c、e 分別爲平分線m的兩端點與同一頂點 A 的距離

$$(c,e) = \left(\frac{a+\frac{b}{2}+\sqrt{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-2a^2}}{2}, \frac{a+\frac{b}{2}-\sqrt{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-2a^2}}{2} \right)$$

$$m^2 = c^2 + e^2 - 2ce\cos A$$
$$= (c+e)^2 - 2ce - 2ce\cos A$$
$$= (c+e)^2 - 2ce(1+\cos A)$$
$$= \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{a^2}{2}(1+\cos A)$$
$$= \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 - a^2(1+\cos A)$$

$$n^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\cdot a\cdot\frac{b}{2}\cdot\cos B$$
$$n^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 - ab - ab\cos B$$
$$n^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 - ab(1+\cos B)$$

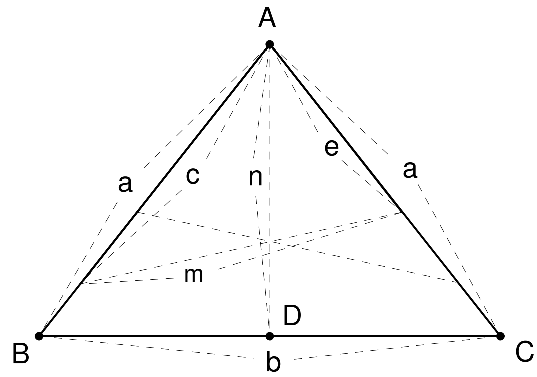
$a > b \Rightarrow a^2 > ab$

$90^\circ > \angle B > \angle A \Rightarrow \cos B < \cos A$

$ab(1+\cos B) < a^2(1+\cos A)$

$\therefore n^2 > m^2$

$n > m$



圖十二

→當 $b > 2\left(\sqrt{2}-1\right)a$ 時，通過二腰的平分線爲最短平分線

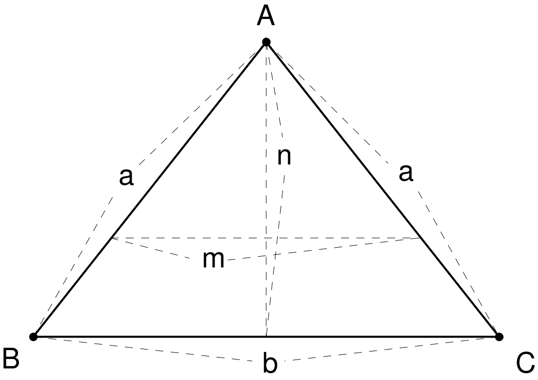
(3)當 $b = 2\left(\sqrt{2}-1\right)a$ 時

共 2 條平分線（如圖十三）

底上的中線 1 條，通過兩腰且平行底的平分線 1 條，設平行底的平分線爲 m，垂直底的平分線爲 n

同上法得 $n > m$

→當 $b = 2\left(\sqrt{2}-1\right)a$ 時，通過二腰的平分線爲最短平分線



圖十三

(4)當 $b < 2\left(\sqrt{2}-1\right)a$ 時

共 1 條平分線

僅有垂直底的平分線 1 條

必爲最短

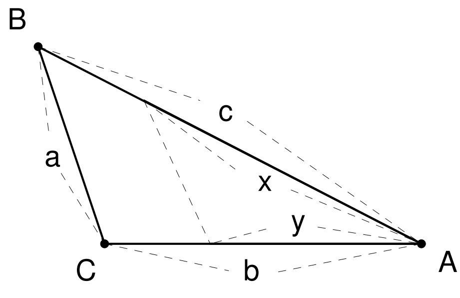
(三) 不等邊三角形（三邊皆互不相等的三角形）

不等邊三角形的平分線不可能通過頂點，若過頂點必爲中線方可平分面積，但中線必不平分周長，故只需討論平分線截二邊的情形。

設三角形的三邊長爲 a、b、c，限定 $c > b > a$，則平分線可依下列三種情形討論

1、通過 b、c 邊 2、通過 a、c 邊 3、通過 a、b 邊，分述如下：

1、通過 b、c 邊（如圖十四）



圖十四

設 $c > b > a$ 且 $\frac{c}{2} < x < c$，$\frac{b}{2} < y < b$

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{a+b+c}{2} \ldots[1] & (\text{平分周長}) \\ xy = \dfrac{bc}{2} \ldots[2] & (\text{平分面積}) \end{cases}$$

求解後得到

$$x = \frac{a+b+c \pm \sqrt{(a+b+c)^2 - 8bc}}{4},$$

$$y = \frac{a+b+c \mp \sqrt{(a+b+c)^2 - 8bc}}{4}$$

令 $D = (a+b+c)^2 - 8bc$

其解需同時滿足① $D \geq 0$ 且② $\frac{c}{2} < x < c$，$\frac{b}{2} < y < b$ 方爲有解

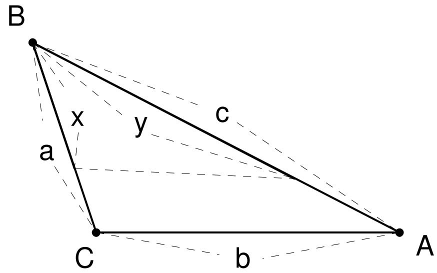
驗證後，得到 $(a+b+c)^2 \geq 8bc$ 時，2 解均可成立，即

$$x=\frac{a+b+c\pm\sqrt{(a+b+c)^2-8bc}}{4}\text{，}y=\frac{a+b+c\mp\sqrt{(a+b+c)^2-8bc}}{4}$$

若$(a+b+c)^2=8bc$時，則$x=y=\dfrac{a+b+c}{4}$

若$(a+b+c)^2<8bc$時，則無解

2、通過a、c邊（如圖十五）



圖十五

設$c>b>a$且$\dfrac{a}{2}<x<a$，$\dfrac{c}{2}<y<c$

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{a+b+c}{2}\ldots[1] & \text{(平分周長)}\\ xy=\dfrac{ac}{2}\ldots[2] & \text{(平分面積)}\end{cases}$$

得到 $\mathrm{x}=\dfrac{a+b+c\pm\sqrt{(a+b+c)^2-8ac}}{4}$，$\mathrm{y}=\dfrac{a+b+c\mp\sqrt{(a+b+c)^2-8ac}}{4}$

令$D=(a+b+c)^2-8ac$

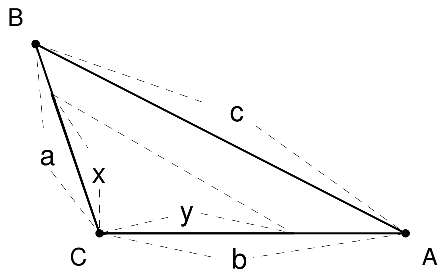
其解需同時滿足① $D\geq 0$且② $\dfrac{a}{2}<x<a$，$\dfrac{c}{2}<y<c$

驗證後，得到 1 組解

$$x=\frac{a+b+c+\sqrt{(a+b+c)^2-8ac}}{4}\text{，}y=\frac{a+b+c-\sqrt{(a+b+c)^2-8ac}}{4}$$

另一組解不合。

3、通過a、b邊（如圖十六）



圖十六

設$c>b>a$且$\dfrac{a}{2}<x<a$，$\dfrac{b}{2}<y<b$

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{a+b+c}{2}\ldots[1] & \text{(平分周長)}\\ xy=\dfrac{ab}{2}\ldots[2] & \text{(平分面積)}\end{cases}$$

得到$x=\dfrac{a+b+c\pm\sqrt{(a+b+c)^2-8ab}}{4}$，$y=\dfrac{a+b+c\mp\sqrt{(a+b+c)^2-8ab}}{4}$

令$D=(a+b+c)^2-8ab$

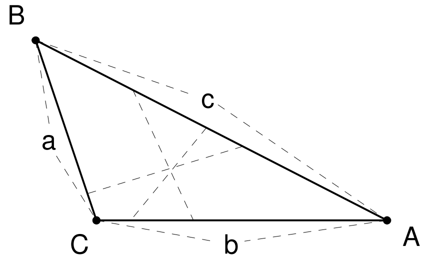
其解需同時滿足 1、$D\geq 0$且 2、$\dfrac{a}{2}<x<a$，$\dfrac{b}{2}<y<b$

驗證後，2 解均不合，故無平分線通過a、b邊

4、不等邊三角形的情形，整理如下：

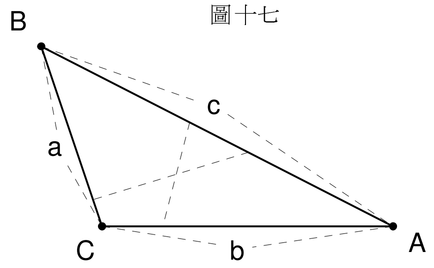
(1) 若$(a+b+c)^2>8bc$時

平分線共 3 條
（通過b 、c邊 2 條，通過a 、c邊 1 條，通過a 、b邊 0 條，其解如前述）（圖十七）



圖十七

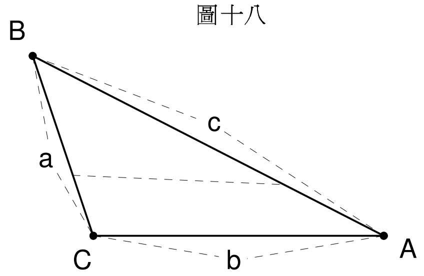
(2) 若$(a+b+c)^2=8bc$時
平分線共 2 條
（通過b 、c邊 1 條（重根），通過a 、c邊 1 條，通過a 、b邊 0 條）（圖十八）



圖十八

(3) 若$8ac\le(a+b+c)^2<8bc$時
平分線共 1 條
（只有通過a 、c邊 1 條）（圖十九）

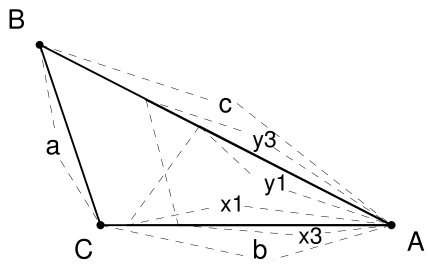
(4) 若$(a+b+c)^2<8ac$時
平分線共 0 條



圖十九

5、不等邊三角形的最短平分線

(1) $(a+b+c)^2>8bc$時（圖二十）
$c>b>a$
在x_1 、 y_1形成的三角形
和x_3 、 y_3形成的三角形中



圖二十

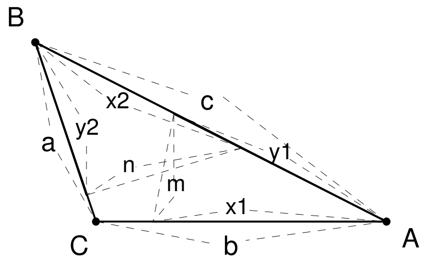
① $x_1=y_3=\dfrac{(a+b+c)+\sqrt{(a+b+c)^2-8bc}}{4}$

② $x_3=y_1=\dfrac{(a+b+c)-\sqrt{(a+b+c)^2-8bc}}{4}$

③ $\angle A=\angle A$

$\therefore x_1$ 、 y_1形成的三角形$\cong$ x_3 、 y_3形成的三角形
故在b、c兩邊上的平分線相等

又$m^2=x_1{}^2+y_1{}^2-2x_1y_1\cos A$（圖二十一）



圖二十一

$$=(x_1+y_1)^2-2x_1y_1-2x_1y_1\cos A$$

$$=(x_1+y_1)^2-2x_1y_1(1+\cos A)$$

$$=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2-bc(1+\cos A)$$

用同樣的方法得

$n^2 = {x_2}^2 + {y_2}^2 - 2x_2 y_2 \cos B$

$= \left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)^2 - ac(1+\cos B)$

$bc > ac$ ，$\because 90^\circ > \angle B > \angle A \therefore 0 < \cos B < \cos A$

$m^2 < n^2 \quad \therefore m < n$

$\rightarrow$當 $(a+b+c)^2 > 8bc$ 時，通過 b 、 c 邊的平分線爲最短平分線

(2) $(a+b+c)^2 = 8bc$ 時

同上法得 $m < n$

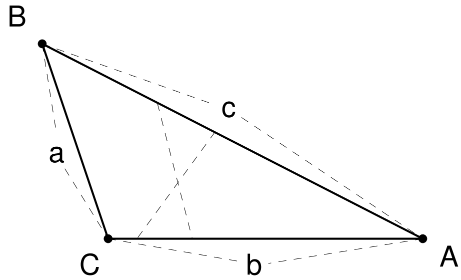
$\rightarrow$當 $(a+b+c)^2 = 8bc$ 時，通過 b 、 c 邊的平分線爲最短平分線

(3) $8bc > (a+b+c)^2 \geq 8ac$ 時

僅有 1 條通過 a 、 c 邊平分線，即爲最短平分線

(4) $(a+b+c)^2 < 8ac$ 時

無平分線



圖二十二

不等邊三角形的最短平分線，整理如下：

(1) $(a+b+c)^2 \geq 8bc$ 時

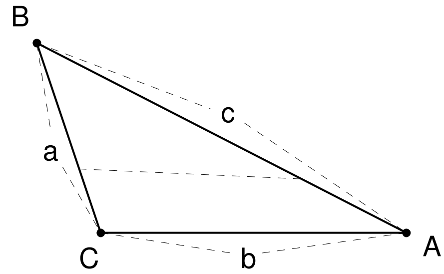
通過 b、c 邊上的平分線爲最短（圖二十二）

(2) $8bc > (a+b+c)^2 \geq 8ac$ 時

僅有 1 條通過 a、c 邊的平分線，即爲最短平分線（圖二十三）

(3) $(a+b+c)^2 < 8ac$ 時

無平分線



圖二十三

四、 研究四邊形的情形

四邊形可分爲正方形、長方形、菱形、梯形、任意四邊形。分述如下：

（一）平行四邊形（含正方形、長方形、菱形）

正方形、長方形、菱形、都是平行四邊形的一種，與平行四邊形具有相同的性質，因此，直接討論平行四邊形的情形，它的平分線可能有以下幾種：

1、過二頂點 2、過一頂點及一邊 3、過二鄰邊 4、過二對邊

其中，2、過一頂點及一邊與 3、過二鄰邊的情形，二者均不可能平分周長與面積。

所以只有二種情形，分述如下：

1、平分線過二頂點

這時，平分線即爲對角線。由平行四邊形的性質：對角線必平分周長與面積，可知，平分線即爲 2 條對角線。

2、平分線過二對邊

這時，只要過平行四邊形的重心（即二對角線交點），任作一直線即爲平分線，這個證明很簡單，不予贅述。因此，平分線過二對邊有無限多條。

又，在平行四邊形的平分線中，以垂直於平行四邊形較長的一組對邊的平分線爲最短平分線（只有一條）

（二）等腰梯形

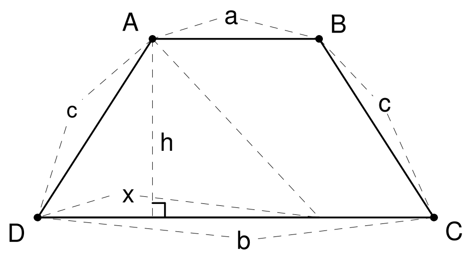
設四邊形 $ABCD$ 爲等腰梯形，兩底分別爲 $a,b(a<b)$，一腰爲 c，則平分線可分爲 1、過一頂點及一邊 2、過二邊 （不可能過兩頂點），分述如下：

1、平分線過一頂點及一邊

又可分爲(1)過頂角的頂點(2)過底角的頂點 二種

(1) 平分線過頂角的頂點及底邊（不可能過腰）（如圖二十四）

$$\begin{cases} c+x=\dfrac{a+b+2c}{2}\ldots[1] & \text{(平分周長)} \\ \dfrac{x\cdot h}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(a+b)\cdot h}{2}\ldots[2] & \text{(平分面積)} \end{cases}$$



圖二十四

[1]，[2]二式化簡後相同

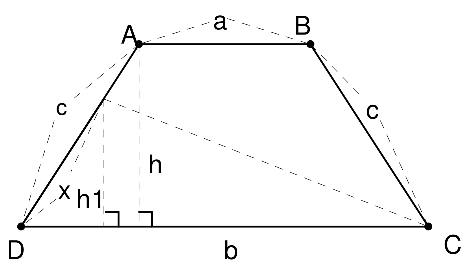
得 $x=\dfrac{a+b}{2}$

又 $a<b$

整理：等腰梯形二底爲 $a,b(a<b)$，一腰爲 c，則當 $a<b$ 時，方有平分線過頂角的頂點及底邊（二條，左右對稱），此時，$x=\dfrac{a+b}{2}$

(2) 平分線過底角的頂點及一腰（不可能過上底）（如圖二十五）

$$\begin{cases} x+b=\dfrac{a+b+2c}{2}\ldots[1] & \text{(平分周長)} \\ \dfrac{1}{2}b\cdot h_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(a+b)\cdot h}{2}\ldots[2] & \text{(平分面積)} \end{cases}$$



圖二十五

又 $h_1=\dfrac{x}{c}h$

得 $x=\dfrac{(a+b)c}{2b}$

由[1]得 $x=\dfrac{a-b+2c}{2}$

$\therefore \dfrac{(a+b)c}{2b}=\dfrac{a-b+2c}{2}$

得 $b=c$

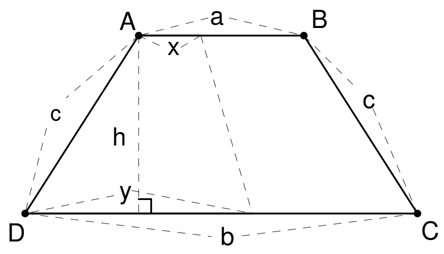
整理：等腰梯形二底為 $a,b(a<b)$，一腰為 c，則當 $b=c$ 時，方有平分線過底角的頂點及一腰（二條，左右對稱），此時，$x=\dfrac{a-b+2c}{2}=\dfrac{a+b}{2}$

2、平分線過二邊

又可分為 3 種：(1)過上、下底(2)一腰及下底(3)二腰（不可能過上底及腰）

(1) 平分線過上、下底（如圖二十六）

$$\begin{cases} x+y+c=\dfrac{a+b+2c}{2} \ldots [1] & \text{(平分周長)} \\ \dfrac{(x+y)h}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(a+b)\cdot h}{2} \ldots [2] & \text{(平分面積)} \end{cases}$$



圖二十六

[1]、[2]二式化簡後相同

得 $x+y=\dfrac{a+b}{2}$

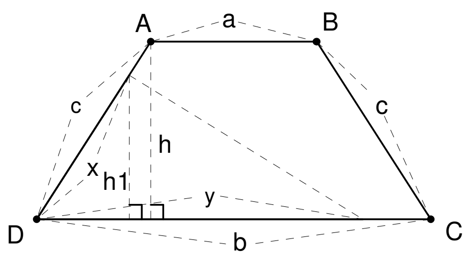
此時，x 介於 0 到 a 的任意數

且 $y=\dfrac{a+b}{2}-x$

整理：等腰梯形二底為 $a,b(a<b)$，一腰為 c，則過上，下底的平分線有無限多解，此時，$x+y=\dfrac{a+b}{2}$

(2) 平分線過一腰及下底（如圖二十七）

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{a+b+2c}{2} \ldots [1] & \text{(平分周長)} \\ \dfrac{1}{2}\cdot y\cdot h_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(a+b)\cdot h}{2} \ldots [2] & \text{(平分面積)} \end{cases}$$



圖二十七

又 $h_1=\dfrac{x}{c}h$ 代入[2]

得 $\mathrm{xy}=\dfrac{(\mathrm{a}+\mathrm{b})\mathrm{c}}{2} \ldots [3]$

解[1]、[3]

得$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-c)=0$

$x=\frac{a+b}{2}$或$x=c$(與$x<c$不合)

故$x=\frac{a+b}{2}$，$y=c$

又x,y須滿足$\frac{c}{2}<x<c$，$\frac{b}{2}<y<b$

得到$\frac{a+b}{2}<c<b$

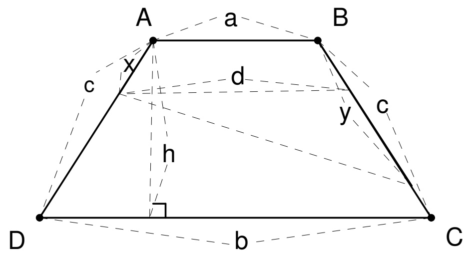
整理：等腰梯形二底爲$a,b(a<b)$，一腰爲c。則當$\frac{a+b}{2}<c<b$時，方有平分線過一腰及下底（2 條，左右對稱）。此時，$x=\frac{a+b}{2}$，$y=c$

(3) 平分線過二腰

（如圖二十八）

$$\begin{cases} x+a+y=\dfrac{a+b+2c}{2} \ldots[1] & \text{(平分周長)} \\ \dfrac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\dfrac{x}{c}h+\dfrac{1}{2}\cdot d\cdot\dfrac{y-x}{c}h=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(a+b)\cdot h}{2} \ldots[2] & \text{(平分面積)} \end{cases}$$

又[2]式中，$d=a+(b-a)\cdot\frac{x}{c}$



圖二十八

解[1]、[2]式

得$x^2-\frac{-a+b+2c}{2}x+\frac{c(c-a)}{2}=0$

令$D=\left(\frac{-a+b+2c}{2}\right)^2-2c(c-a)$

此時，$x=\frac{\frac{-a+b+2c}{2}\pm\sqrt{D}}{2}$，$y=\frac{\frac{-a+b+2c}{2}\mp\sqrt{D}}{2}$

又x、y至少有一大於$\frac{c}{2}$，可令$x\le y$，且$\frac{c}{2}<y<c$，

即$x=\frac{\frac{-a+b+2c}{2}-\sqrt{D}}{2}$，$x=\frac{\frac{-a+b+2c}{2}+\sqrt{D}}{2}$

當x、y有解時，須同時滿足① $0<x<c$，$\frac{c}{2}<y<c$　② $D\ge 0$

由$\dfrac{c}{2}<y<c$求解後得到$c>b$

由$0<x<c$求解後得到$c>a$　（但由於$a<b$，此條件必成立）

整理：等腰梯形二底a,b　$(a<b)$，一腰爲c，$D=\left(\dfrac{-a+b+2c}{2}\right)^2-2c(c-a)$

當$c>b$，且$D\geq 0$時，方有平分線過二腰。

若$c>b$且$D>0$，則平分線有 2 條，左右對稱

此時，$x=\dfrac{\dfrac{-a+b+2c}{2}\pm\sqrt{D}}{2}$，$y=\dfrac{\dfrac{-a+b+2c}{2}\mp\sqrt{D}}{2}$

若$c>b$且$D=0$，則平分線有 1 條，平行上、下底

此時，$x=y=\dfrac{-a+b+2c}{4}$

若$c\leq b$或$D<0$，則無平分線

3、結論：等腰梯形$ABCD$，二底爲a,b　$(a<b)$，一腰爲c，則有下列六種情形：

(1) $c\leq\dfrac{a+b}{2}$

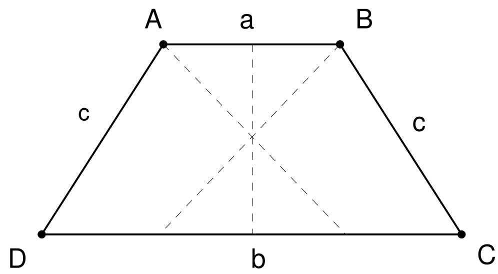
(2) $\dfrac{a+b}{2}<c<b$

(3) $b=c$

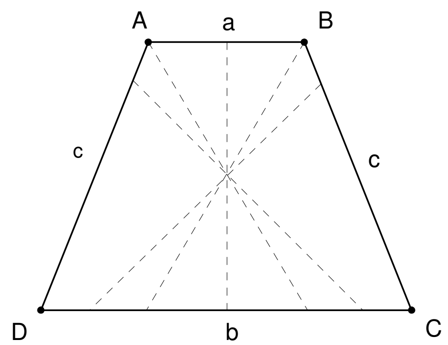
(4) $c>b$ 且 $(-a+b+2c)^2>8c(c-a)$

(5) $c>b$ 且 $(-a+b+2c)^2=8c(c-a)$

(6) $c>b$ 且 $(-a+b+2c)^2<8c(c-a)$



圖二十九



圖三十

共分爲六種討論，發現：

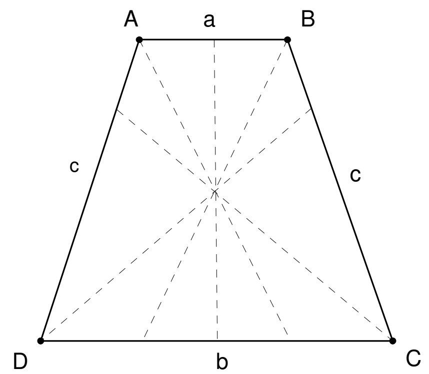
六種狀況中，皆有無限多條過上下底的平分線。已知上下底平行，則在過上下底的平分線中，只取最短的一條平分線（垂直上下底）列入討論，其餘的無限多條平分線不列入討論。

(1) $c\leq\dfrac{a+b}{2}$時（圖二十九）

方有過上底的頂點及下底的平分線 2 條（左右對稱）、過上底及下底的平分線 1 條，共 3 條。

(2) $\dfrac{a+b}{2}<c<b$時（圖三十）

方有過上底的頂點及下底的平分線 2 條（左右對稱），過上底及下底的平分線 1 條，過一腰及下



圖三十一

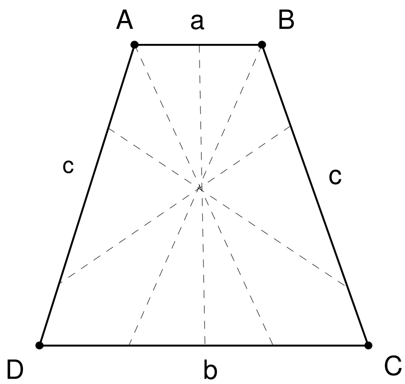
底的平分線 2 條（左右對稱），共 5 條。

(3) $b=c$ 時（圖三十一）

方有過上底的頂點及下底的平分線 2 條（左右對稱），過上底及下底的 平分線 1 條，過底角的頂點及一腰的平分線 2 條（左右對稱），共 5 條。

(4) $c>b$ 且 $(-a+b+2c)^2>8c(c-a)$ 時（圖三十二）

方有過上底的頂點及下底的平分線 2 條(左右對稱)，過上底及下底的平分線 1 條，過兩腰的平分線 2 條（左右對稱），共 5 條。



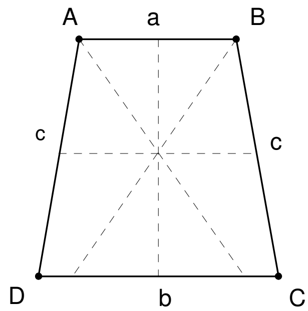
圖三十二

(5) $c>b$ 且 $(-a+b+2c)^2=8c(c-a)$ 時(圖三十三)

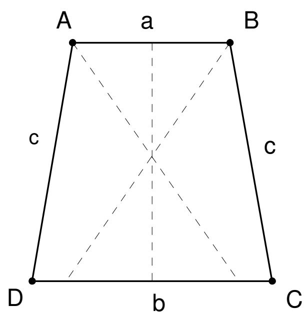
方有過上底的頂點及下底的平分線 2 條(左右對稱)，過上底及下底的平分線 1 條，過兩腰的平分線 1 條（平行上、下底)，共 4 條。

(6) $c>b$ 且 $(-a+b+2c)^2<8c(c-a)$ 時(圖三十四)

方有過上底的頂點及下底的平分線 2 條（左右對稱），過上底及下底的平分線 1 條，共 3 條。



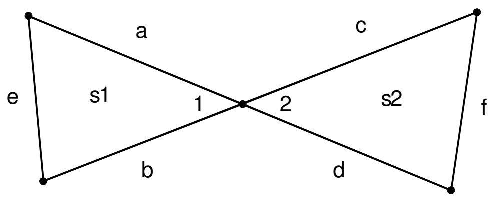
圖三十三



圖三十四

4、最短平分線：

在分類討論前，先提出以下會用到的同角定理（圖三十五）



圖三十五

設已知$\begin{cases} s_1=s_2 ......[1] \\ e=f ......[2] \end{cases}$

用海龍公式表示 s_1 和 s_2

$$\sqrt{\frac{a+b+e}{2}\cdot\frac{a+b-e}{2}\cdot\frac{a-b+e}{2}\cdot\frac{-a+b+e}{2}}=\sqrt{\frac{c+d+f}{2}\cdot\frac{c+d-f}{2}\cdot\frac{c-d+f}{2}\cdot\frac{-c+d+f}{2}}$$

化簡後得 $\mathrm{a+b=c+d}$

又 由$s_1 = s_2$可推得$ab = cd$

$$\begin{cases} ab = cd \ldots\ldots [3] \\ a+b = c+d \ldots\ldots [4] \end{cases}$$

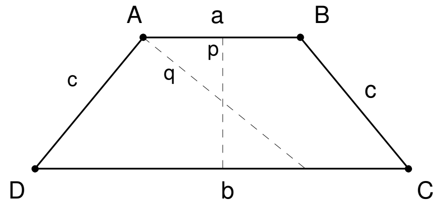
解聯立方程式

得$a = c$ ，$b = d$或$a = d$ ，$b = c$

若$a = d$ ，$b = c$ ，則 e 平行 f

若e, f 不平行，則$a = c$ ，$b = d$

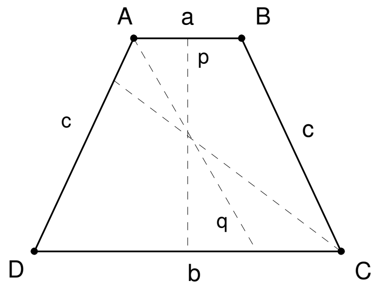
故$a + d = b + c$



圖三十六

以下設過上底及下底的平分線爲p ，過上底的頂點及下底的平分線爲q ，過一腰及下底的平分線爲r ，過下底的頂點及一腰的平分線爲s，過二腰的平分線爲t 。

爲了使圖形較清楚，左右對稱的平分線只取一條來比較長短。

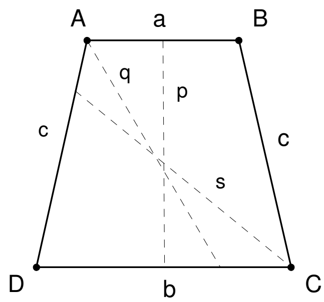


圖三十七

(1) $c \le \dfrac{a+b}{2}$ 時（圖三十六）

$p < q$

垂直上下底的平分線最短



圖三十八

(2) $\dfrac{a+b}{2} < c < b$時（圖三十七）

根據同角定理，$r = q$

又$p < q$ ，故$p < q = r$

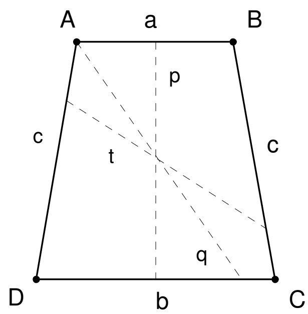
垂直上下底的平分線最短

(3) $b = c$時（圖三十八）

根據同角定理，$s = q$

又$p < q$ ，故$p < q = s$

垂直上下底的平分線最短



圖三十九

(4) $c > b$ 且$(-a + b + 2c)^2 > 8c(c - a)$時（圖三十九）

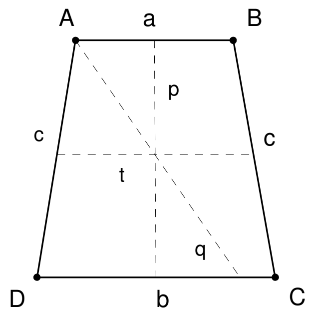
設$p = \sqrt{c^2 - \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2}$ ，

$$t = \sqrt{\left(n \cdot \frac{x-y}{c}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2} \cdot \frac{x}{c} + a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{y}{c}\right)^2}$$

化簡後得$t < p$

又$p < q$，故$t < p < q$

過兩腰的平分線最短



圖四十

(5) $c > b$ 且$(-a+b+2c)^2 = 8c(c-a)$時（圖四十）

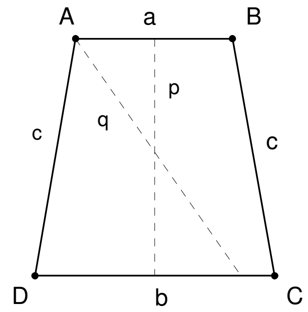
同上，$t < p < q$

過兩腰的平分線最短

(6) $c > b$ 且$(-a+b+2c)^2 < 8c(c-a)$時（圖四十一）

$p < q$

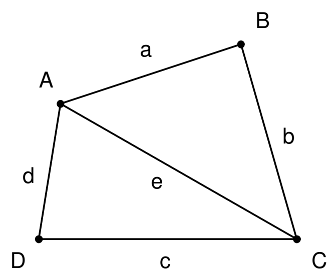
垂直上下底的平分線最短



圖四十一

（三）任意四邊形

已知一個四邊形的四邊長，仍無法固定四邊形，若再加上一條對角線，這個四邊形就確定了。因此，可假設四邊形$ABCD$的邊長依次爲a,b,c,d，其一條對角線長爲e（如圖四十二）。且滿足$|a-b| < e < a+b$，$|c-d| < e < c+d$。



圖四十二

則同時平分四邊形$ABCD$的周長與面積的平分線可能有下列三種情形：

1、平分線通過 2 頂點　2、平分線通過一頂點和一邊

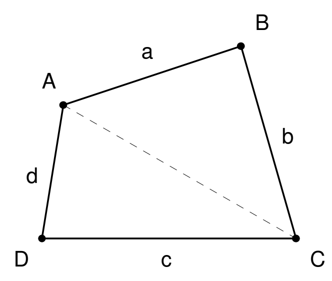
3、平分線通過二邊

分別討論如下：

1、平分線過 2 頂點

設平分線爲對角線 e（如圖四十三），則

$$\begin{cases} a+b=c+d......[1] & \text{(平分周長)} \\ \Delta ABC = \Delta ADC......[2] & \text{(平分面積)} \end{cases}$$



圖四十三

因爲$a+b+e=c+d+e$

令$s = \frac{1}{2}(a+b+e) = \frac{1}{2}(c+d+e)$

則

$$\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-c)(s-d)(s-e)} = \Delta ADC$$

$$\therefore (s-a)(s-b) = (s-c)(s-d)$$

$$[(a+b)-(c+d)]s = ab-cd$$

$0 = ab - cd$

$ab = cd$

又$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = (c+d)^2 - 4cd$

$= (c-d)^2$

故$a-b=c-d$或$a-b=d-c$

(1)當$\begin{cases} a-b=c-d \\ a+b=c+d \end{cases}$

得到$a=c, b=d$，此時四邊形$ABCD$是平行四邊形

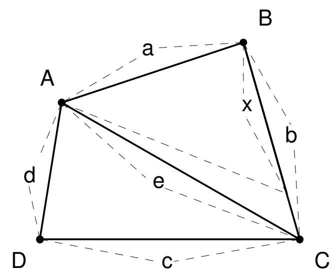
(2)當$\begin{cases} a-b=d-c \\ a+b=c+d \end{cases}$

得到$a=d, b=c$，此時四邊形$ABCD$是箏形

整理如下：若平分線通過四邊形$ABCD$的二頂點，則四邊形$ABCD$必爲平行四邊形或箏形。

2、平分線過一頂點與一邊

（如圖四十四）



圖四十四

$$\begin{cases} \mathrm{a} + \mathrm{x} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d}) ......[1] \text{ (平分周長)} \\ \Delta ABE = \dfrac{1}{2} ABCD\text{面積} ......[2] \text{ (平分面積)} \end{cases}$$

由[1]得$x = \dfrac{-a+b+c+d}{2}$

由[2]得$\Delta ABE = \dfrac{x}{b}\Delta ABC$

$\therefore \dfrac{x}{b}\Delta ABC = \dfrac{1}{2}ABCD$面積

$2x\Delta ABC = b \cdot ABCD$面積

以$x = \dfrac{-a+b+c+d}{2}$代入上式

$(-a+b+c+d)\Delta ABC = b \cdot ABCD$面積

$\dfrac{-a+b+c+d}{b} = \dfrac{ABCD\text{面積}}{\Delta ABC}$

又$\dfrac{b}{2} < x < b$，得到$0 < \dfrac{-a+c+d}{b} < 1$，故$\Delta ADC < \Delta ABC$

整理如下:若平分線通過四邊形$ABCD$的一頂點與一邊，如圖，則四邊形$ABCD$ 必須滿足$\dfrac{-a+b+c+d}{b} = \dfrac{ABCD\text{面積}}{\Delta ABC}$且$\Delta ADC < \Delta ABC$時方爲有解，此時

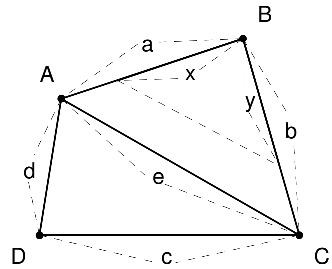
$$x=\frac{-a+b+c+d}{2}$$

3、平分線通過二邊

這種情形又可分為二種：(1) 平分線通過鄰邊 (2) 平分線通過對邊

(1)平分線通過鄰邊

（如圖四十五）



圖四十五

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{2}(a+b+c+d)\text{......[1] (平分周長)} \\ \Delta BEF=\frac{1}{2}ABCD\text{面積......[2] (平分面積)} \end{cases}$$

由[2]得知 $\Delta BEF=\frac{xy}{ab}\Delta ABC$

$\therefore \frac{xy}{ab}\Delta ABC=\frac{1}{2}(\Delta ABC+\Delta ADC)$

由[1]得知 $y=\frac{a+b+c+d}{2}-x$ 代入上式

得到 $2\Delta ABC\cdot x^2-(a+b+c+d)\cdot\Delta ABC\cdot x+ab(\Delta ABC+\Delta ADC)=0$

令 $D=(a+b+c+d)^2(\Delta ABC)^2-4\cdot 2\Delta ABC\cdot ab(\Delta ABC+\Delta ADC)$

$=\left[(a+b+c+d)^2-8ab\right](\Delta ABC)^2-8ab\Delta ABC\cdot\Delta ADC$

$$x=\frac{(a+b+c+d)\Delta ABC\pm\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$$

此解需滿足 1、$D\geq 0$ 2、$\frac{a}{2}<x<a$，$\frac{b}{2}<y<b$ 方為有解

當 $x=\frac{(a+b+c+d)\Delta ABC+\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$，$y=\frac{(a+b+c+d)\Delta ABC-\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$ 時

化簡 $\frac{a}{2}<x<a$ 可得

$b\Delta ADC>(c+d-a)\Delta ABC$ 且必須 $3a>b+c+d$

化簡 $\frac{b}{2}<y<b$ 可得

①$a+c+d\geq 3b$ 且 $(c+d-a)\Delta ABC<2a\Delta ADC<2(c+d-b)\Delta ABC$

或②若 $a+c+d<3b$ 且 $(c+d-a)\Delta ABC<2a\Delta ADC$

整理後得

$a+b=c+d$ 且 $b\Delta ADC>(c+d-a)\Delta ABC<2a\Delta ADC$

或 $a>b$ 且 $b\Delta ADC>(c+d-a)\Delta ABC<2a\Delta ADC<2(c+d-b)\Delta ABC$

當 $x=\dfrac{(a+b+c+d)\Delta ABC-\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$ ， $y=\dfrac{(a+b+c+d)\Delta ABC+\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$ 時

化簡 $\dfrac{a}{2}<x<a$ 可得

① $b+c+d\geq 3a$ 且 $(c+d-b)\Delta ABC<2b\Delta ADC<2(c+d-a)\Delta ABC$

或② $b+c+d<3a$ 且 $(c+d-b)\Delta ABC<2b\Delta ADC$

化簡 $\dfrac{b}{2}<y<b$ 可得

$a\Delta ADC>(c+d-b)\Delta ABC$ 且必須 $3b>a+c+d$

整理後得

$a+b=c+d$ 且 $a\Delta ADC>(c+d-b)\Delta ABC<2b\Delta ADC$

或 $a<b$ 且 $a\Delta ADC>(c+d-b)\Delta ABC<2b\Delta ADC<2(c+d-a)\Delta ABC$

整理如下：

（a）當 $D>0$ 時且 $a+b=c+d$ 且 $b\Delta ADC>(c+d-a)\Delta ABC<2a\Delta ADC$ 且 $a\Delta ADC>(c+d-b)\Delta ABC<2b\Delta ADC$ 時

有 2 解， $x=\dfrac{(a+b+c+d)\Delta ABC\pm\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$ ， $y=\dfrac{(a+b+c+d)\Delta ABC\mp\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$

（b）當

$D>0$ 且 $a>b$ 且 $b\Delta ADC>(c+d-a)\Delta ABC<2a\Delta ADC<2(c+d-b)\Delta ABC$ 時

有 1 解， $x=\dfrac{(a+b+c+d)\Delta ABC+\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$ ， $y=\dfrac{(a+b+c+d)\Delta ABC-\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$

當 $D>0$ 且 $a<b$ 且 $a\Delta ADC>(c+d-b)\Delta ABC<2b\Delta ADC<2(c+d-a)\Delta ABC$ 時

有 1 解， $x=\dfrac{(a+b+c+d)\Delta ABC-\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$ ， $y=\dfrac{(a+b+c+d)\Delta ABC+\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$

（c）當 $D=0$ 時

有 1 解， $x=y=\dfrac{a+b+c+d}{4}$

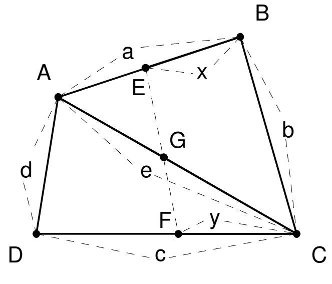
（d）當 $D<0$ 時

0 解

(2)平分線通過對邊

（如圖四十六）

$$\begin{cases} x+y+b=\dfrac{a+b+c+d}{2} \text{......[1]} & \text{(平分周長)} \\ \Delta BCE+\Delta CEF=\dfrac{1}{2}\text{ABCD面積......[2]} & \text{(平分面積)} \end{cases}$$



圖四十六

由[2]得

$$\Delta ABC\cdot\frac{x}{a}+\Delta ADC\cdot\frac{y}{c}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{1}{2}(\Delta ABC+\Delta ADC)$$

又 $h_1=\dfrac{2\Delta ADC}{c}$ ，$h_2=\dfrac{2\Delta BCD}{c}$ ，$h=h_1+(h_2-h_1)\cdot\dfrac{a-x}{a}$

得 $2\Delta ABC\cdot cx+2y[a\cdot\Delta ADC+(\Delta BCD-\Delta ADC)(a-x)]=ac(\Delta ABC+\Delta ADC)$

由[1]得 $y=\dfrac{a-b+c+d}{2}-x$

代入上式，得

$$x^2+\frac{\left[c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}ADC\right]}{\Delta BCD-\Delta ADC}x$$

$$+\frac{\frac{a(a-b+c+d)\Delta BCD}{2}-\frac{ac\Delta ABC}{2}-\frac{ac\Delta ADC}{2}}{\Delta BCD-\Delta ADC}=0$$

令 $$D=\left[\frac{c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}\right]^2$$

$$-2\frac{a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac\Delta ABC-ac\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}$$

$$(x,y)=\left(\frac{-\frac{c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}\pm\sqrt{D}}{2},\frac{-\frac{c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}\mp\sqrt{D}}{2}\right)$$

此解需同時滿足 1、$D\geq 0$ 2、$0<x<a$ 且 $0<y<b$

（a）當 $x=\dfrac{-\frac{c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}+\sqrt{D}}{2}$ ，

$y=\dfrac{-\frac{c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}-\sqrt{D}}{2}$ 時

（i）化簡 $0<x<a$

得到

①$-2a<\dfrac{c\Delta ABC+\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD-\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}<0$ 且

$$-c(3a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta BCD+c(a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta ADC$$
$$-[a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac(\Delta ABC+\Delta ADC)](\Delta BCD-\Delta ADC)^2$$
$$<2a^2(\Delta BCD-\Delta ADC)^2$$
$$+a[2c\Delta ABC-(3a-b+c+d)\Delta BCD+(a-b+c+d)\Delta ADC](\Delta BCD-\Delta ADC)$$

或② $\dfrac{c\Delta ABC+\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD-\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}\geq 0$ 且

$$0<-c(3a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta BCD+c(a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta ADC$$
$$-[a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac(\Delta ABC+\Delta ADC)](\Delta BCD-\Delta ADC)^2$$
$$<2a^2(\Delta BCD-\Delta ADC)^2$$
$$+a[2c\Delta ABC-(3a-b+c+d)\Delta BCD+(a-b+c+d)\Delta ADC](\Delta BCD-\Delta ADC)$$

（ii）化簡 $0<y<b$

得到

① $-2b<\dfrac{c\Delta ABC+\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD-\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}<0$ 且

$$0>-c(3a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta BCD+c(a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta ADC$$
$$-[a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac(\Delta ABC+\Delta ADC)](\Delta BCD-\Delta ADC)^2$$

或② $\dfrac{c\Delta ABC+\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD-\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}\leq -2b$ 且

$$0>-c(3a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta BCD+c(a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta ADC$$
$$-[a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac(\Delta ABC+\Delta ADC)](\Delta BCD-\Delta ADC)^2$$
$$>2b^2(\Delta BCD-\Delta ADC)^2$$
$$+b[2c\Delta ABC-(3a-b+c+d)\Delta BCD+(a-b+c+d)\Delta ADC](\Delta BCD-\Delta ADC)$$

（b）當 $x=\dfrac{-\dfrac{c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}-\sqrt{D}}{2}$，

$y=\dfrac{-\dfrac{c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}+\sqrt{D}}{2}$ 時

（i）化簡 $0<x<a$

得到① $-2a<\dfrac{c\Delta ABC+\dfrac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD-\dfrac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}<0$ 且

$$
\begin{aligned}
&0>-c(3a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta BCD\\
&+c(a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta ADC\\
&-[a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac(\Delta ABC+\Delta ADC)](\Delta BCD-\Delta ADC)^2
\end{aligned}
$$

或② $\dfrac{c\Delta ABC+\dfrac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD-\dfrac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}\le -2a$ 且

$$
\begin{aligned}
&0>-c(3a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta BCD\\
&+c(a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta ADC\\
&-[a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac(\Delta ABC+\Delta ADC)](\Delta BCD-\Delta ADC)^2\\
&>2a^2(\Delta BCD-\Delta ADC)^2\\
&+a[2c\Delta ABC-(3a-b+c+d)\Delta BCD+(a-b+c+d)\Delta ADC](\Delta BCD-\Delta ADC)
\end{aligned}
$$

（ii）化簡 $0<y<b$

得到① $-2b<\dfrac{c\Delta ABC+\dfrac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD-\dfrac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}<0$ 且

$$
\begin{aligned}
&-c(3a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta BCD+c(a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta ADC\\
&-[a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac(\Delta ABC+\Delta ADC)](\Delta BCD-\Delta ADC)^2\\
&<2b^2(\Delta BCD-\Delta ADC)^2\\
&+b[2c\Delta ABC-(3a-b+c+d)\Delta BCD+(a-b+c+d)\Delta ADC](\Delta BCD-\Delta ADC)
\end{aligned}
$$

或② $\dfrac{c\Delta ABC+\dfrac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD-\dfrac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}\ge 0$ 且

$$
\begin{aligned}
&0<-c(3a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta BCD+c(a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta ADC\\
&-[a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac(\Delta ABC+\Delta ADC)](\Delta BCD-\Delta ADC)^2\\
&<2b^2(\Delta BCD-\Delta ADC)^2\\
&+b[2c\Delta ABC-(3a-b+c+d)\Delta BCD+(a-b+c+d)\Delta ADC](\Delta BCD-\Delta ADC)
\end{aligned}
$$

（c）整理如下：

令① $p=\dfrac{c\Delta ABC+\dfrac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD-\dfrac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}$

② $$
\begin{aligned}
q=&-c(3a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta BCD+c(a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta ADC\\
&-[a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac(\Delta ABC+\Delta ADC)](\Delta BCD-\Delta ADC)^2
\end{aligned}
$$

③ $r = 2a^2(\Delta BCD - \Delta ADC)^2 + a[2c\Delta ABC - (3a-b+c+d)\Delta BCD + (a-b+c+d)\Delta ADC](\Delta BCD - \Delta ADC)$

④ $s = 2b^2(\Delta BCD - \Delta ADC)^2 + b[2c\Delta ABC - (3a-b+c+d)\Delta BCD + (a-b+c+d)\Delta ADC](\Delta BCD - \Delta ADC)$

(1)若滿足以下二條件之一

① $-2a < p < 0$ 且 $-2b < p < 0$ 且 $q < r$ 且 $q < 0$

或② $-2a < p \le -2b$ 且 $q < r$ 且 $s < q < 0$

則有一過任意四邊形對邊（a 邊和 c 邊）的平分線

令
$$D = \left[\frac{c\Delta ABC - \frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD + \frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD - \Delta ADC}\right]^2 - 2\frac{a(a-b+c+d)\Delta BCD - ac\Delta ABC - ac\Delta ADC}{\Delta BCD - \Delta ADC}$$

其中
$$(x, y) = \left(\frac{\frac{-c\Delta ABC - \frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD + \frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD - \Delta ADC} + \sqrt{D}}{2}, \frac{\frac{-c\Delta ABC - \frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD + \frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD - \Delta ADC} - \sqrt{D}}{2}\right)$$

(2)若滿足以下二條件之一

① $-2a < p < 0$ 且 $-2b < p < 0$ 且 $q < 0$ 且 $q < s$

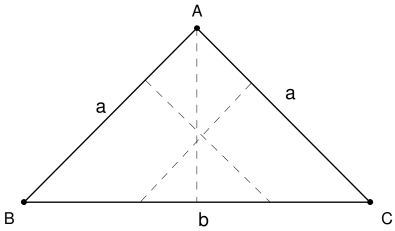
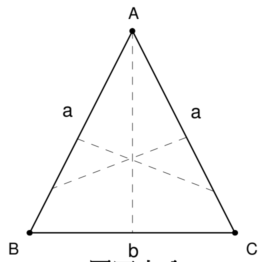
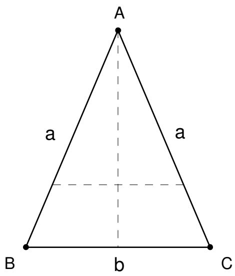
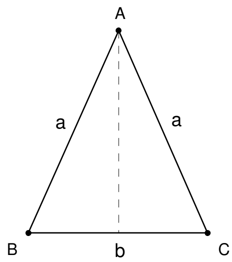
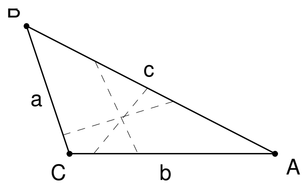
或② $-2b < p \le -2a$ 且 $r < q < 0$ 且 $q < s$

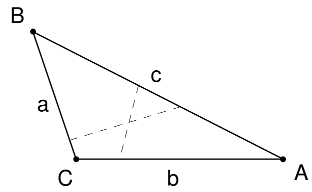
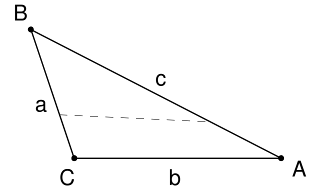
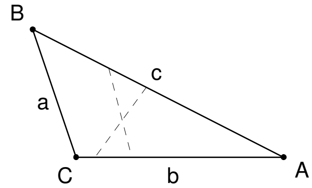
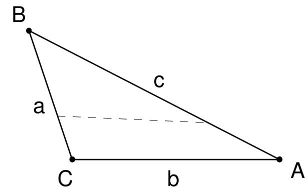
則有另一過任意四邊形對邊（a 邊和 c 邊）的平分線

其中
$$(x, y) = \left(\frac{\frac{-c\Delta ABC - \frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD + \frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD - \Delta ADC} - \sqrt{D}}{2}, \frac{\frac{-c\Delta ABC - \frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD + \frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD - \Delta ADC} + \sqrt{D}}{2}\right)$$

肆、結論

一、 三角形

（一） 正三角形	1、有 3 條平分線，即 3 中線 2、三中線均爲最短平分線。
（二） 等腰三角形	1、設二腰爲 a ，底邊爲 b $(a \neq b)$ (1) $b > a$ 平分線共 3 條 平分線底上的中線 1 條，通過腰和底的平分線 2 條（2 條相等）（圖四十七）  圖四十七 (2) $a > b > 2(\sqrt{2}-1)a$ 平分線共 3 條 底上的中線 1 條，通過兩腰的平分線 2 條（2 條相等）（圖四十八）  圖四十八 (3) $b = 2(\sqrt{2}-1)a$ 平分線共 2 條 底上的中線 1 條，通過兩腰且平行底的平分線 1 條（圖四十九）  圖四十九 (4) $b < 2(\sqrt{2}-1)a$ 平分線共 1 條 僅有底上的中線 1 條（圖五十） 2、最短平分線 (1) $b > a$ 三條平分線相等，均爲最短平分線 (2) $a > b \geq 2(\sqrt{2}-1)a$ 最短邊 b 所對的平分線爲最短平分線 (3) $b < 2(\sqrt{2}-1)a$ 僅有一條平分線，即爲最短平分線  圖五十
（三） 不等邊三角形	1、設三角形的三邊長爲 a 、 b 、 c ， 且 $c > b > a$ (1)若 $(a+b+c)^2 > 8bc$ 時 平分線共 3 條 （通過 b 、 c 邊 2 條，通過 a 、 c 邊 1 條，通過 a 、 b 邊 0 條，其解如前述）（圖五十一）  圖五十一

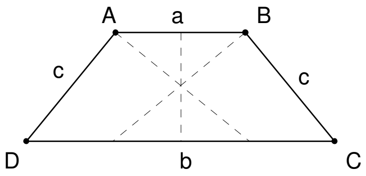
	(2)若$(a+b+c)^2=8bc$時 平分線共 2 條 （通過b 、c邊 1 條（重根），通過a 、c邊 1 條，通過a 、b邊 0 條）（圖五十二）  圖五十二 (3)若$8ac \le (a+b+c)^2 < 8bc$時 平分線共 1 條 （只有通過a 、c邊 1 條）（圖五十三）  圖五十三 (4)若$(a+b+c)^2 < 8ac$時 平分線共 0 條 2、最短平分線 (1)$(a+b+c)^2 \ge 8bc$時 通過b 、c邊上的平分線爲最短（圖五十四）  圖五十四 (2)$8bc > (a+b+c)^2 \ge 8ac$時 僅有 1 條通過 a、c 邊的平分線，即爲最短平分線（圖五十五）  圖五十五 (3)$(a+b+c)^2 < 8ac$時 無平分線

二、四邊形

（一） 平行四邊形（含正方形、長方形、菱形）	1、平行四邊形的平分線分類如下 (1)平分線過二頂點 平分線即爲 2 條對角線。 (2)平分線過二對邊 過平行四邊形的重心（即二對角線交點），任作一直線即爲平分線。因此，平分線過二對邊有無限多條。 2、最短平分線 以垂直於平行四邊形較長的一組對邊的平分線爲最短平分線。
（二） 等腰梯形	1、設等腰梯形$ABCD$，二底爲a,b $(a<b)$，一腰爲c （任一等腰梯形中，皆有無限多條過上下底的平分線。已知上下底平行，則在過上下底的平分線中，只取最短的一條平分線（垂直上下底）作討論，其餘的無限多條平分線不列入討論。）

(1) $c \le \dfrac{a+b}{2}$ 時（圖五十六）

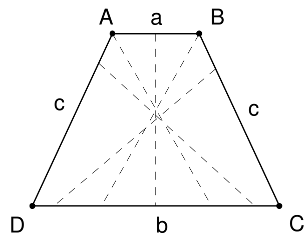
方有過上底的頂點及下底的平分線 2 條（左右對稱）、過上底及下底的平分線 1 條，共 3 條。



圖五十六

(2) $\dfrac{a+b}{2} < c < b$ 時（圖五十七）

方有過上底的頂點及下底的平分線 2 條（左右對稱），過上底及下底的平分線 1 條，過一腰及下底的平分線 2 條（左右對稱），共 5 條。

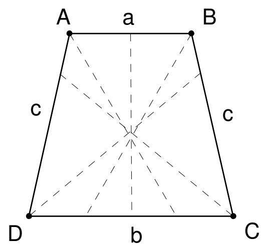


圖五十七

(3) $b = c$ 時（圖五十八）

方有過上底的頂點及下底的平分線 2 條（左右對稱），過上底及下底的

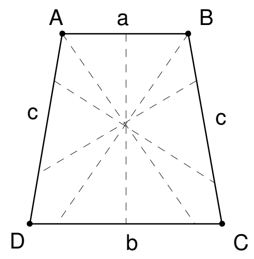
平分線 1 條，過底角的頂點及一腰的平分線 2 條（左右對稱），共 5 條。



圖五十八

(4) $c > b$ 且 $(-a+b+2c)^2 > 8c(c-a)$ 時（圖五十九）

方有過上底的頂點及下底的平分線 2 條（左右對稱），過上底及下底的平分線 1 條，過兩腰的平分線 2 條（左右對稱），共 5 條。

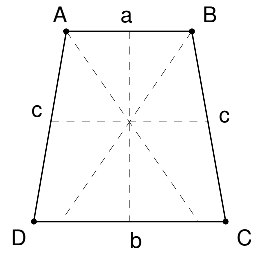


圖五十九

(5) $c > b$ 且 $(-a+b+2c)^2 = 8c(c-a)$ 時

（圖六十）

方有過上底的頂點及下底的平分線2條（左右對稱），過上底及下底的平分線 1 條，過兩腰的平分線 1 條（平行上、下底），共 4 條。

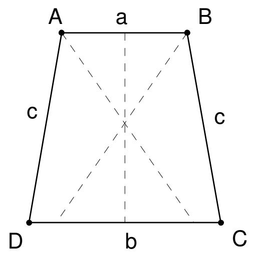


圖六十

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

(6) $c > b$ 且 $(-a+b+2c)^2 < 8c(c-a)$ 時（圖六十一）

方有過上底的頂點及下底的平分線 2 條（左右對稱），過上底及下底的平分線 1 條，共 3 條。



圖六十一

2、最短平分線

(1) 當 $c > b$ 且 $(-a+b+2c)^2 \geq 8c(c-a)$ 時

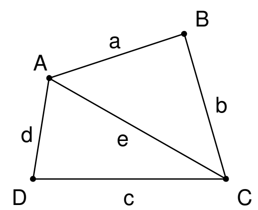
過兩腰的平分線為最短平分線

(2) 當 $c < b$ 或 $(-a+b+2c)^2 < 8c(c-a)$ 時

垂直上下底的平分線為最短平分線

</td>
</tr>
<tr>
<td>（三）任意四邊形</td>
<td>

設四邊形 $ABCD$ 的邊長依次為 a,b,c,d ，其一條對角線長為 e（如圖六十二）。且滿足 $|a-b| < e < a+b$ ，$|c-d| < e < c+d$ 。



圖六十二

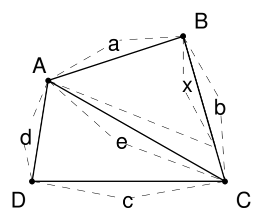
1、通過二頂點的平分線（圖六十三）

四邊形 $ABCD$ 必為平行四邊形或箏形。

2、通過一頂點和一邊的平分線

當四邊形 $ABCD$ 滿足 $\dfrac{-a+c+d}{b} = \dfrac{\Delta ACD}{\Delta ABC}$ 且 $\Delta ADC < \Delta ABC$ 時，即有通過頂點 A 和 b 邊的平分線，此時

$$x = \frac{-a+b+c+d}{2}$$



圖六十三

3、通過鄰邊的平分線（圖六十四）

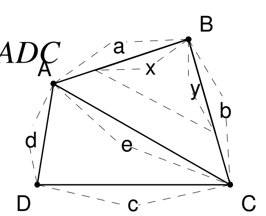
令

$$D = \left[(a+b+c+d)^2 - 8ab\right](\Delta ABC)^2 - 8ab\Delta ABC \cdot \Delta ADC$$

(1)當 $D > 0$ 時且 $a+b = c+d$ 且

$b\Delta ADC > (c+d-a)\Delta ABC < 2a\Delta ADC$ 且

$a\Delta ADC > (c+d-b)\Delta ABC < 2b\Delta ADC$ 時，



圖六十四

</td>
</tr>
</table>

有二條過鄰邊的平分線：

$$x=\frac{(a+b+c+d)\Delta ABC\pm\sqrt{D}}{4\Delta ABC}\ ,$$

$$y=\frac{(a+b+c+d)\Delta ABC\mp\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$$

(2)當 $D>0$ 且 $a>b$ 且

$b\Delta ADC>(c+d-a)\Delta ABC<2a\Delta ADC<2(c+d-b)\Delta ABC$ 時，

有一條過鄰邊的平分線，$x=\dfrac{(a+b+c+d)\Delta ABC+\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$ ，

$$y=\frac{(a+b+c+d)\Delta ABC-\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$$

(3)當 $D>0$ 且 $a<b$ 且

$a\Delta ADC>(c+d-b)\Delta ABC<2b\Delta ADC<2(c+d-a)\Delta ABC$ 時

有一條過鄰邊的平分線，$x=\dfrac{(a+b+c+d)\Delta ABC-\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$ ，

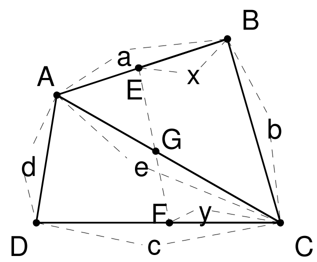
$$y=\frac{(a+b+c+d)\Delta ABC+\sqrt{D}}{4\Delta ABC}$$

(4)當 $D=0$ 時

有 1 解，$x=y=\dfrac{a+b+c+d}{4}$

(5)當 $D<0$ 時

0 解



圖六十五

4、通過對邊的平分線（圖六十五）

令① $p=\dfrac{c\Delta ABC+\dfrac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD-\dfrac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}$ ，

② $q=-c(3a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta BCD+c(a-b+c+d)\Delta ABC\cdot\Delta ADC$
$\quad-[a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac(\Delta ABC+\Delta ADC)](\Delta BCD-\Delta ADC)^2$，

③ $r=2a^2(\Delta BCD-\Delta ADC)^2$
$\quad+a[2c\Delta ABC-(3a-b+c+d)\Delta BCD+(a-b+c+d)\Delta ADC](\Delta BCD-\Delta ADC)$，

④ $s=2b^2(\Delta BCD-\Delta ADC)^2$
$\quad+b[2c\Delta ABC-(3a-b+c+d)\Delta BCD+(a-b+c+d)\Delta ADC](\Delta BCD-\Delta ADC)$

(1)若滿足以下二條件之一

① $-2a<p<0$ 且 $-2b<p<0$ 且 $q<r$ 且 $q<0$

或② $-2a<p\le -2b$ 且 $q<r$ 且 $s<q<0$

則有一過任意四邊形對邊（a 邊和 c 邊）的平分線

令 $$D=\left[\frac{c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}\right]^2-2\frac{a(a-b+c+d)\Delta BCD-ac\Delta ABC-ac\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}$$

其中 $$(x,y)=\left(\frac{\frac{-c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}+\sqrt{D}}{2},\ \frac{\frac{-c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}-\sqrt{D}}{2}\right)$$

(2)若滿足以下二條件之一

①$-2a<p<0$ 且 $-2b<p<0$ 且 $q<0$ 且 $q<s$

或②$-2b<p\leq -2a$ 且 $r<q<0$ 且 $q<s$

則有另一過任意四邊形對邊（a 邊和 c 邊）的平分線

其中 $$(x,y)=\left(\frac{\frac{-c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}-\sqrt{D}}{2},\ \frac{\frac{-c\Delta ABC-\frac{3a-b+c+d}{2}\Delta BCD+\frac{a-b+c+d}{2}\Delta ADC}{\Delta BCD-\Delta ADC}+\sqrt{D}}{2}\right)$$

伍、未來發展

一、 研究任意四邊形在特定範圍內的平分線數量，並求出各種平分方法之最小周長。

二、 研究如何同時三等分三角形的周長與面積，找出可行方法及特定範圍內平分線數量，並求出各種平分方法之最小周長。

三、 可將此平分方式應用於土地的分配，同時平分土地的面積及其周長，並利用本研究中最小周長的求法做出最短平分線，將土地分隔之成本減至最低。

陸、參考資料

一、王擎天、宋昭明　著／三角函數的基本概念／高中大學出版中心／181 頁
二、國中數學課本／第三冊／第三單元／二元一次方程式／翰林出版
三、國中數學課本／第四冊／第二單元／乘法公式與因式分解／翰林出版
四、國中數學課本／第四冊／第三單元／一元二次方程式／翰林出版
五、國中數學課本／第四冊／第四單元／三角形的全等性質／翰林出版

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

國中組 數學科

第三名

030425
同時平分三角形、四邊形的周長與面積之研究

臺北縣立江翠國民中學

評語：
考慮三角形和四邊形內，同時平分面積與周長的分割線。多邊形的面積分割是常見於科展的主題，作者給出了額外的限制，大大小加深了難度，是很有意思的作品，分析的方法與技巧也很好，若能加入對一般 n 邊形，此分割線是否存在的討論會更好。