中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第三名

030424
方格遊戲的探討

臺北縣立永和國民中學

作者姓名：
國一 陳璿宇 國一 沈昇勳 國一 張毓哲
國一 洪嘉翎

指導老師：
陳永福

中華民國第四十五屆

中小學科學展覽說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：方格遊戲的探討

關鍵詞：三角數、二階等差數列、同餘(模)

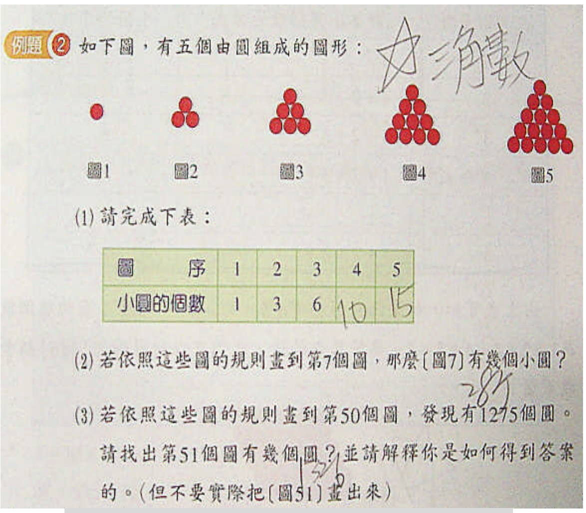
編號：

目　錄

壹、摘　　要

一、作品與教材的相關性

我們在**翰林版國中數學課本**第一冊第三章「**數與型的規律**」單元中，學習到「數型規律」，也在**第三章第四節例題 2** 中學習到三角數，在**自我評量第 4 題**中學習到四角數。



例題 2 如下圖，有五個由圓組成的圖形：

圖1　圖2　圖3　圖4　圖5

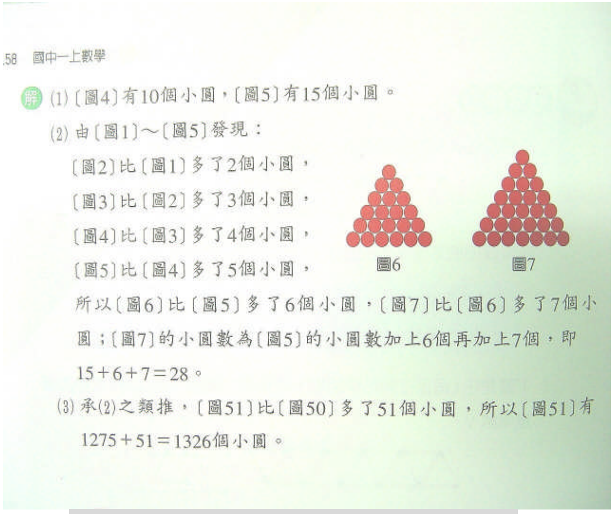
(1) 請完成下表：

圖　序	1	2	3	4	5
小圓的個數	1	3	6	10	15

(2) 若依照這些圖的規則畫到第7個圖，那麼〔圖7〕有幾個小圓？ 28

(3) 若依照這些圖的規則畫到第50個圖，發現有1275個圓。請找出第51個圖有幾個圓？並請解釋你是如何得到答案的。（但不要實際把〔圖51〕畫出來） 1326

翰林版國中數學第一冊第 157 頁



58 國中一上數學

解 (1)〔圖4〕有10個小圓，〔圖5〕有15個小圓。

(2) 由〔圖1〕～〔圖5〕發現：

〔圖2〕比〔圖1〕多了2個小圓，

〔圖3〕比〔圖2〕多了3個小圓，

〔圖4〕比〔圖3〕多了4個小圓，

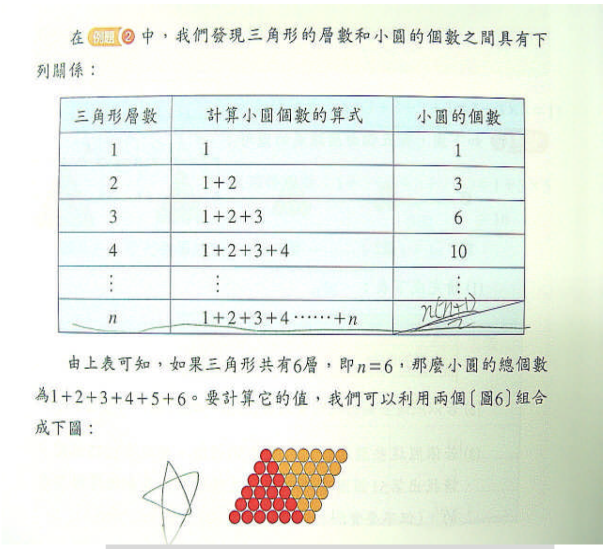
〔圖5〕比〔圖4〕多了5個小圓，

圖6　圖7

所以〔圖6〕比〔圖5〕多了6個小圓，〔圖7〕比〔圖6〕多了7個小圓；〔圖7〕的小圓數為〔圖5〕的小圓數加上6個再加上7個，即15＋6＋7＝28。

(3) 承(2)之類推，〔圖51〕比〔圖50〕多了51個小圓，所以〔圖51〕有1275＋51＝1326個小圓。

翰林版國中數學第一冊第 158 頁

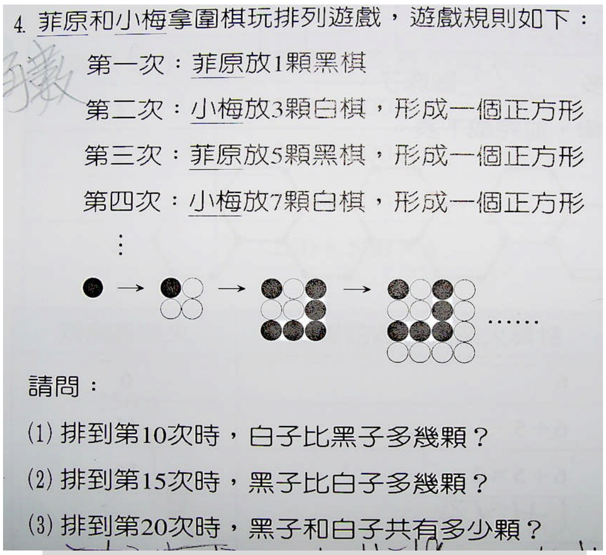


在例題 2 中，我們發現三角形的層數和小圓的個數之間具有下列關係：

三角形層數	計算小圓個數的算式	小圓的個數
1	1	1
2	1+2	3
3	1+2+3	6
4	1+2+3+4	10
⋮	⋮	⋮
n	1+2+3+4……+n	$\frac{n(n+1)}{2}$

由上表可知，如果三角形共有6層，即$n=6$，那麼小圓的總個數為1+2+3+4+5+6。要計算它的值，我們可以利用兩個〔圖6〕組合成下圖：

翰林版國中數學第一冊第 158 頁



4. 菲原和小梅拿圍棋玩排列遊戲，遊戲規則如下：

第一次：菲原放1顆黑棋

第二次：小梅放3顆白棋，形成一個正方形

第三次：菲原放5顆黑棋，形成一個正方形

第四次：小梅放7顆白棋，形成一個正方形

⋮

請問：

(1) 排到第10次時，白子比黑子多幾顆？

(2) 排到第15次時，黑子比白子多幾顆？

(3) 排到第20次時，黑子和白子共有多少顆？

翰林版國中數學第三章自我評量第 4 題

二、作品的研究過程與展望

本組以「數形規律性」作為數理資優班研究主題，又在美國 AMC8 數學測驗書中找到有趣的「方格著色」問題，我們研究該問題的解法，發現應用了我們在課本所學到的三角數知識。我們將原題的行數延伸為 2 至 n 行，研究其可行解。又將著色方法改變，使著色格為四角數、五角數至多角數，並應用整數同餘觀念研究其可行解。也推廣找出二階等差數列之可行解，且整理出一些規律，並以直接證題法、矛盾證題法、數學歸納法來證明結果之正確性。還發現利用我們的研究結果可運用在密碼學上，我們將做為未來的研究方向。

貳、研究動機

在數學教材第一冊「**數與型的規律**」單元中，我們瞭解到型式與數量模式之間的關係。在日常生活中諸如月曆、乘法表、數字方陣、工作排班表等都可發現到數字的規則性，另外老師介紹火車及飛機座位表排序規則性，讓我們瞭解到數字規則性與 mod 同餘概念，配合等差數列及等比數列的補充教材，更增加了我們對數量規律性的學習興趣。所以，在數理資優班分組活動中，本組選定**數型規律性**作為報告主題。我們在美國 AMC8 數學測驗書中找到一個有趣的「方格著色」問題，即是有關**數型規律性**的問題。經過研究後，本組發現許多延伸的相關問題，在老師指導下，我們更進一步研究有趣的「方格著色」遊戲。

叁、研究目的

一、研究美國 AMC8 方格問題的解法。

二、研究三角數的可行解(縮小放大原題行數研究)。

三、研究各種多角數的可行解。

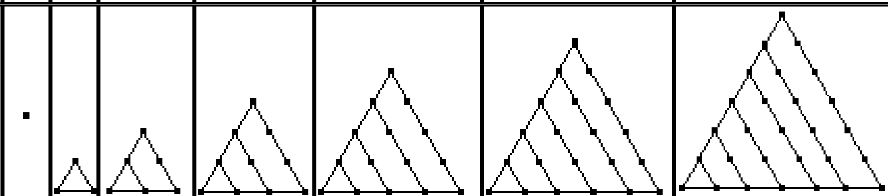
四、研究二階等差數列的可行解。

肆：研究器材：筆，紙，電子計算器，電腦應用軟體(MS_Excel，MS_Word)

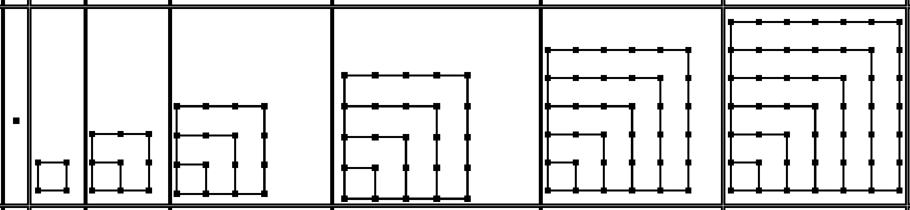
伍、研究過程

一、定義：

(一)三角數：三角數是三角形中包含的點數，第一個為 1，第二個為三角形的頂點，第三個是延伸兩個邊所構成每邊 3 個點的三角形中所有點，以此類推。

階數	1	2	3	4	5	6	7	n
三角數								$1+2+3+\cdots\cdots+n$ $=\dfrac{n\times(n+1)}{2}$
總數	1	3	6	10	15	21	28	

(二)四角數：四角數是正方形中包含的點數，第一個為 1，第二個為正方形的頂點，第三個是延伸兩個邊所構成每邊 3 個點的正方形中所有點，以此類推。

階數	1	2	3	4	5	6	7	n
四角數								$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$
總數	1	4	9	16	25	36	49	

(三)多角數：多角數是正多邊形中包含點數，第一個為 1，第二個為正多邊形的頂點，第三個是延伸兩個邊所構成每邊 3 個點的正多邊形中所有點，以此類推。

(四)<u>二階等差數列</u>：若數列的二階差數列是一非零常數列，則稱數列為**二階等差數列**。

1、三角數數列為二階等差數列，通項公式為 $\frac{n\times[1n-(-1)]}{2}$ ，二階差為 1。

2、M 角數數列為二階等差數列，通項公式為 $\frac{n\times[(m-2)n-(m-4)]}{2}$，二階差為 (m-2)。

M 角數數列 1 ， m ， 3m−3 ， 6m−8 ， 10m−15，…

一階差 m−1　2m−3　3m−5　4m−7　…

二階差　m−2　m−2　m−2　…

M 角數數列的第 n 項公式 $=\{[(n-2)(m-2)+m-1]+m-1\}\times(n-1)\times\frac{1}{2}+1$

$=(nm-2n-2m+2m-2+4)\times(n-1)\times\frac{1}{2}+1=(nm-2n+2)\times(n-1)\times\frac{1}{2}+1$

$=[(m-2)n^2+2n-(m-2)n-2]\times\frac{1}{2}+1=n[(m-2)n-(m-4)]\times\frac{1}{2}$

3、設二階等差數列$\{a_n\}$：a_1， a_2 ， a_3 ， a_4 ， …… ，a_n

一階差　Da_1, Da_2 , Da_3 , …　, Da_{n-1}

二階差　d2　d2　　d2

$a_n=a_1+\Delta a_1+\Delta a_2+\Delta a_3+\ldots+\Delta a_{n-1}=a_1+(\Delta a_1+\Delta a_{n-1})\times(n-1)\times\frac{1}{2}$

$=a_1+[\Delta a_1+\Delta a_1+(n-2)\times d2]\times(n-1)\times\frac{1}{2}=a_1+[2\Delta a_1\times(n-1)+d2\times(n-1)(n-2)]\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\times d2\times n^2-\frac{1}{2}\times(3\times d2-2\Delta a_1)\times n+(d2-\Delta a_1+a_1)$

則二階等差數列一般項為 n 的二次多項式，且二階差 d2 為首項係數乘 2。

(五)<u>可行解</u>：若整數數列模 m(m 為正整數)，可以得到 m 種不同餘數，

則稱 m 為此數列的<u>可行解</u>。

二、AMC8 問題研究：

如右圖，一個 8 行的長方形棋盤，第一列由左至右依序標上 1 至 8 號，第二列標上 9 至 16 號，其餘以此類推。如今將方格 1 著黑，跳 1 格，將方格 3 著黑，跳兩格，將方格 6 著黑，跳三格，將方格 10 著黑，依此方法直到每一行都至少有一個方格被著黑。請問至少需著黑至哪一方格才會達到這個要求。

■	2	■	4	5	■	7	8
9	■	11	12	13	14	■	16
17	18	19	20	■	22	23	24
25	26	27	■	29	30	31	32
33	34	35	■	37	38	39	40
41	42	43	44	■	46	47	48

[解]

按著原題的規則，所塗黑的格數為 1、3、6、10、15、21…。從實作中可以發現，最難著黑的是第 8 行。但是第 8 行是 8 的倍數，所以只要找到最小的 8 倍數，就可以著黑第 8 行，就是本題的解。又 1＝1，3＝1+2，6＝1+2+3，

10＝1+2+3+4，15＝1+2+3+4+5，

所以著黑的格數即是三角數，通式為 $\frac{n(n+1)}{2}$ 。

設 $\frac{n(n+1)}{2}$＝8k，k 為最小正整數，則 n(n+1)=16k，因為 n 是正整數且 k 是最小正整數，當 n=15，k=15，上式就會成立。所以，找到符合三角數又是 8 倍數的最小正整數是 120。當著黑到第 120 格時，可使每一行都被著黑到，即是本題的解。

1		3			6		
	10					15	
				21			
			28				
			36				
				45			
						55	
	66						
					78		
		91					
105							
							120

三、延伸問題研究：

(一)將原題的行數減少為 **2、3、4、5、6、7 行**，研究其是否可完成題設之要求。

作出 2、3、4、5、6、7 行的方格表，將三角數數列填入各個表格中，觀察其是否可成為可行解。

2 行		3 行			4 行				5 行					6 行						7 行						
1		1		3	1		3		1		3			1		3			6	1		3			6	
3				6		6			6				10				10					10				
	6					10							15			15				15						21
		10					15									21										28
				15					21								28									
					21						28								36	36						
				21				28														45				
									36							45									55	
													45													
		28												55								66				

由上表的實驗結果可以得到：

1、可完成題設之要求(每行都有被塗黑的方格)：2 行、4 行。

2、不可完成題設之要求(有某些行不會被塗黑)：3 行、5 行、6 行、7 行。

(二)將原題的行數增加為 **10 行、13 行**，研究其是否可完成題設之要求。

將三角數數列填入 10 行、13 行的方格表中，觀察其是否可成為可行解。

10 行										13 行												
1		3			6				10	1		3			6				10			
				15							15						21					
21							28				28								36			
					36										45							
				45								55										
				55						66												78
					66																	91
							78															
										105												
91												120										
				105											136							
									120										153			
					136						171											

由上表的實驗結果可以得到：10 行和 13 行不可完成題設之要求，不是可行解。

(三)將原題的行數增加為 **16 行**，研究其是否可完成題設之要求。

將三角數數列填入 16 行的方格表中，觀察其是否可成為可行解。

1		3			6				10					15	
				21							28				
			36									45			
						55									
	66												78		
										91					
								105							
							120								
							136								
								153							
										171					
													190		
	210														
						231									
												253			

			276												
											300				
				325											
														351	
									378						
					406										
		435													
465															
															496

由上表的實驗結果可知，塗到第 31 個三角數 496 時，16 行中每一行都至少被塗黑一個方格，所以，16 行可完成題設之要求，故 16 為三角數數列的可行解。

(四)將原題的行數增加為 **32 行**，研究其是否可完成題設之要求。

從前面幾個例子的研究可以發現，最不容易著黑的是 2 的次方行。所以，32 行時最不容易著黑的是第 32 行，就是要找 32 倍數的最小三角數。

設 $\frac{n(n+1)}{2}$ ＝32k，k 為最小正整數，則 n(n+1)=64k，因為 n 為正整數且 k 為最小正整數。當 n=63，k=63，上式就會成立。

即第 63 個三角數 2016 就會著黑到第 32 行。所以，32 為三角數數列的可行解。

(五)將原題的行數增加為 **64 行**，研究其是否可完成題設之要求。

從(一)到(四)研究中可以發現，64 行時最不容易塗黑的是第 64 行，就是要找 64 倍數的最小三角數。設 $\frac{n(n+1)}{2}$ ＝64k，k 為最小正整數，則 n(n+1)=128k，所以，n=127，k=127，上式就會成立。第 127 個三角數 8128 就會著黑到第 64 行。所以，64 為三角數數列的可行解。

(六)延伸問題的結果：

由以上的研究可以得到下面幾個結果：

1、行數不是 2 的次方數時，皆無法達成 AMC8 原題之要求。

2、行數是 2 的次方時，皆可達成題目之要求。

3、若行數是 2^k(k 為 0 或正整數)，將三角數數列除以 2^k 並取餘數，可以得到 2^k 種不同的餘數，所以，2^k 行都會被著黑，故 2^k 為三角數數列的可行解。

4、不是可行解的證明：

(1)**6 不是可行解之證明**：

將所有正整數分為 12 類{12k,12k+1,¼,12k+11}，代入三角數一般式，再模 6 可得餘數為{0,1,3,4},就是所有三角數數列模 6 的餘數，都不可能為 2、5。所以，6 行方格不可符合題目要求，即 6 不是三角數數列的可行解。

(2)**10 不是可行解之證明**：

由上面的實驗可看出第 2.4.7.9 行都沒有被塗到，只要證明一行沒有被塗到即可。考慮第 4 行，若有三角數會出現在第四行，則可表示成：$\frac{n(n+1)}{2}$=10P+4

即是　n(n+1)=20P+8，就是連續兩個數 n(n+1)相乘的個位數是 8，

但相乘個位數是 8 的情形有：1×8，2×4，2×9，3×6，4×7，6×8，

都不是連續兩個正整數相乘，就是符合 $\frac{n(n+1)}{2}$=10P+4 的正整數 n 不存在，

第 4 行不可能被塗到。

所以，10 行方格不可符合題目要求，即 10 不是可行解。

四、加深問題研究： 對其他多角數數列作可行解研究

將各種多角數對正整數取餘數，並觀察其餘數的個數，檢查是否符合可行解之要求。

下面列出部分的實驗結果：

(一)五角數可行解之研究：$\dfrac{n\times(3n-1)}{2}$

N	可行解 N(3N-1)/2	1	2	3	4	6	8	9	12	16	18	24	27	32	36	…
1	1	**0**	1	**1**	1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	
2	5	0	**1**	**2**	**1**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	
3	12	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**4**	**3**	**0**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	
4	22	0	0	1	**2**	**4**	**6**	**4**	**10**	**6**	**4**	**22**	**22**	**22**	**22**	
5	35	0	1	2	**3**	5	**3**	**8**	**11**	**3**	**17**	**11**	**8**	**3**	**35**	
6	51	0	1	0	3	**3**	3	**6**	**3**	3	**15**	**3**	**24**	**19**	**15**	
7	70	0	0	1	2	4	6	**7**	10	6	**16**	22	**16**	**6**	**34**	
8	92	0	0	2	0	**2**	4	**2**	**8**	12	**2**	**20**	**11**	**28**	**20**	
9	117	0	1	0	1	3	5	**0**	**9**	5	**9**	**21**	**9**	**21**	**9**	
10	145	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**	**17**	1	
11	176	0	0	2	0	2	**0**	5	8	**0**	**14**	**8**	**14**	**16**	**32**	
12	210	0	0	0	2	0	**2**	3	**6**	**2**	12	**18**	**21**	**18**	**30**	
13	247	0	1	1	3	1	**7**	4	**7**	**7**	**13**	**7**	**4**	**23**	**31**	
14	287	0	1	2	3	5	7	8	11	**15**	17	**23**	**17**	**31**	35	
15	330	0	0	0	2	0	2	6	6	**10**	**6**	18	**6**	**10**	**6**	
16	376	0	0	1	0	4	0	7	**4**	**8**	16	**16**	**25**	**24**	**16**	
17	425	0	1	2	1	5	1	2	5	**9**	**11**	**17**	**20**	**9**	**29**	
18	477	0	1	0	1	3	5	0	9	**13**	9	**21**	**18**	**29**	9	
19	532	0	0	1	0	4	4	1	4	**4**	**10**	**4**	**19**	**20**	**28**	
20	590	0	0	2	2	2	6	5	**2**	**14**	14	**14**	**23**	**14**	**14**	
21	651	0	1	0	3	3	3	3	3	**11**	**3**	3	**3**	**11**	**3**	
22	715	0	1	1	3	1	3	4	7	11	13	**19**	**13**	11	31	
23	782	0	0	2	2	2	6	8	2	14	**8**	14	**26**	14	**26**	
24	852	0	0	0	0	0	4	6	0	4	6	12	**15**	**20**	**24**	
25	925	0	1	1	1	1	5	7	1	13	**7**	**13**	**7**	29	**25**	
26	1001	0	1	2	1	5	1	2	5	9	11	17	**2**	9	29	
27	1080	0	0	0	0	0	0	0	0	8	**0**	**0**	**0**	24	**0**	
28	1162	0	0	1	2	4	2	1	10	10	10	**10**	1	10	**10**	
29	1247	0	1	2	3	5	7	5	11	15	5	23	5	31	**23**	
30	1335	0	1	0	3	3	7	3	3	7	3	**15**	12	23	3	
31	1426	0	0	1	2	4	2	4	10	2	4	10	22	18	22	
32	1520	0	0	2	0	2	0	8	8	0	8	8	8	16	**8**	
33	1617	0	1	0	1	3	1	6	9	1	15	**9**	24	17	**33**	
34	1717	0	1	1	1	1	5	7	1	5	7	13	16	21	25	
35	1820	0	0	2	0	2	4	2	8	12	2	20	11	28	20	
36	1926	0	0	0	2	0	6	0	6	6	0	**6**	9	6	**18**	

由此表可得知，可行解型式為 **2 的次方×3 的次方(次方可以為 0 次)**。

(二)八角數可行解之研究：$\dfrac{n\times(6n-4)}{2}$

N	可行解 N(6N-4)/2	1	2	3	6	9	18	27	54	81	N	可行解 N(6N-4)/2	1	2	3	6	9	18	27	54	81
1	1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	41	4961	0	1	2	5	2	11	20	**47**	**20**
2	8	0	**0**	**2**	**2**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	42	5208	0	0	0	0	6	6	24	**24**	**24**
3	21	0	1	**0**	**3**	**3**	**3**	**21**	**21**	**21**	43	5461	0	1	1	1	7	7	7	**7**	**34**
4	40	0	0	1	**4**	**4**	**4**	**13**	**40**	**40**	44	5720	0	0	2	2	5	14	23	**50**	**50**
5	65	0	1	2	**5**	**2**	**11**	**11**	**11**	**65**	45	5985	0	1	0	3	0	9	18	**45**	**72**

6	96	0	0	0	**0**	**6**	**6**	**15**	**42**	**15**	46	6256	0	0	1	4	1	10	19	**46**	**19**
7	133	0	1	1	1	**7**	**7**	**25**	**25**	**52**	47	6533	0	1	2	5	8	17	26	**53**	**53**
8	176	0	0	2	2	**5**	**14**	**14**	**14**	**14**	48	6816	0	0	0	0	3	12	12	**12**	**12**
9	225	0	1	0	3	**0**	**9**	**9**	**9**	**63**	49	7105	0	1	1	1	4	13	4	**31**	**58**
10	280	0	0	1	4	1	**10**	**10**	**10**	**37**	50	7400	0	0	2	2	2	2	2	**2**	**29**
11	341	0	1	2	5	8	**17**	**17**	**17**	**17**	51	7701	0	1	0	3	6	15	6	**33**	**6**
12	408	0	0	0	0	3	**12**	**3**	**30**	**3**	52	8008	0	0	1	4	7	16	16	**16**	**70**
13	481	0	1	1	1	4	**13**	**22**	**49**	**76**	53	8321	0	1	2	5	5	5	5	**5**	**59**
14	560	0	0	2	2	2	**2**	**20**	**20**	**74**	54	8640	0	0	0	0	0	0	0	**0**	**54**
15	645	0	1	0	3	6	**15**	**24**	**51**	**78**	55	8965	0	1	1	1	1	1	1	1	**55**
16	736	0	0	1	4	7	**16**	**7**	**34**	**7**	56	9296	0	0	2	2	8	8	8	8	**62**
17	833	0	1	2	5	5	**5**	**23**	**23**	**23**	57	9633	0	1	0	3	3	3	21	21	**75**
18	936	0	0	0	0	0	**0**	**18**	**18**	**45**	58	9976	0	0	1	4	4	4	13	40	**13**
19	1045	0	1	1	1	1	1	**19**	**19**	**73**	59	10325	0	1	2	5	2	11	11	11	**38**
20	1160	0	0	2	2	8	8	**26**	**26**	**26**	60	10680	0	0	0	0	6	6	15	42	**69**
21	1281	0	1	0	3	3	3	**12**	**39**	**66**	61	11041	0	1	1	1	7	7	25	25	**25**
22	1408	0	0	1	4	4	4	**4**	**4**	**31**	62	11408	0	0	2	2	5	14	14	14	**68**
23	1541	0	1	2	5	2	11	**2**	**29**	**2**	63	11781	0	1	0	3	0	9	9	9	**36**
24	1680	0	0	0	0	6	6	**6**	**6**	**60**	64	12160	0	0	1	4	1	10	10	10	**10**
25	1825	0	1	1	1	7	7	**16**	**43**	**43**	65	12545	0	1	2	5	8	17	17	17	**71**
26	1976	0	0	2	2	5	14	**5**	**32**	**32**	66	12936	0	0	0	0	3	12	3	30	**57**
27	2133	0	1	0	3	0	9	**0**	**27**	**27**	67	13333	0	1	1	1	4	13	22	49	**49**
28	2296	0	0	1	4	1	10	1	**28**	**28**	68	13736	0	0	2	2	2	2	20	20	**47**
29	2465	0	1	2	5	8	17	8	**35**	**35**	69	14145	0	1	0	3	6	15	24	51	**51**
30	2640	0	0	0	0	3	12	21	**48**	**48**	70	14560	0	0	1	4	7	16	7	34	**61**
31	2821	0	1	1	1	4	13	13	**13**	**67**	71	14981	0	1	2	5	5	5	23	23	**77**
32	3008	0	0	2	2	2	2	11	**38**	**11**	72	15408	0	0	0	0	0	0	18	18	**18**
33	3201	0	1	0	3	6	15	15	**15**	**42**	73	15841	0	1	1	1	1	1	19	19	**46**
34	3400	0	0	1	4	7	16	25	**52**	**79**	74	16280	0	0	2	2	8	8	26	26	**80**
35	3605	0	1	2	5	5	5	14	**41**	**41**	75	16725	0	1	0	3	3	3	12	39	**39**
36	3816	0	0	0	0	0	0	9	**36**	**9**	76	17176	0	0	1	4	4	4	4	4	**4**
37	4033	0	1	1	1	1	1	10	**37**	**64**	77	17633	0	1	2	5	2	11	2	29	**56**
38	4256	0	0	2	2	8	8	17	**44**	**44**	78	18096	0	0	0	0	6	6	6	6	**33**
39	4485	0	1	0	3	3	3	3	**3**	**30**	79	18565	0	1	1	1	7	7	16	43	**16**
40	4720	0	0	1	4	4	4	22	**22**	**22**	80	19040	0	0	2	2	5	14	5	32	**5**
											81	19521	0	1	0	3	0	9	0	27	**0**

由此表可得知，可行解的型式為 2×3 的次方**(次方可以為 0 次)**。

(三)十七角數可行解之研究：$\dfrac{n\times(15n-13)}{2}$

n	可行解 / n(15n-13)/2	1	2	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	27	30	32	36	40	45	50	54	60	64
1	1	**0**	1	1	**1**	**1**	1	**1**	**1**	**1**	**1**	1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
2	17	0	**1**	**1**	**2**	**5**	**1**	**8**	**7**	**5**	**2**	**1**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**
3	48	0	**0**	**0**	**3**	**0**	**0**	**3**	**8**	**0**	**3**	**0**	**12**	**8**	**0**	**23**	**21**	**18**	**16**	**12**	**8**	**3**	**48**	**48**	**48**	**48**
4	94	0	0	**2**	**4**	**4**	**6**	**4**	**4**	**10**	**4**	**14**	**4**	**14**	**22**	**19**	**13**	**4**	**30**	**22**	**14**	**4**	**44**	**40**	**34**	**30**
5	155	0	1	**3**	**0**	5	**3**	**2**	**5**	**11**	**5**	**11**	**11**	**15**	**11**	**5**	**20**	**5**	**27**	**11**	**35**	**20**	**5**	**47**	**35**	**27**
6	231	0	1	3	1	**3**	**7**	**6**	1	**3**	**6**	**7**	**15**	**11**	**15**	**6**	**15**	**21**	**7**	**15**	**31**	**6**	**31**	**15**	**51**	**39**
7	322	0	0	2	2	4	**2**	**7**	**2**	10	**7**	**2**	**16**	**2**	**10**	**22**	**25**	**22**	**2**	**34**	**2**	**7**	**22**	**52**	**22**	**2**
8	428	0	0	0	3	**2**	**4**	**5**	8	**8**	**8**	**12**	**14**	8	**20**	**3**	**23**	**8**	**12**	**32**	**28**	**23**	**28**	**50**	**8**	**44**
9	549	0	1	1	4	3	**5**	**0**	**9**	**9**	**9**	**5**	**9**	**9**	**21**	**24**	**9**	**9**	**5**	**9**	**29**	**9**	**49**	**9**	**9**	**37**
10	685	0	1	1	0	1	5	1	5	1	**10**	**13**	1	**5**	**13**	**10**	**10**	**25**	**13**	1	**5**	**10**	**35**	**37**	**25**	**45**
11	836	0	0	0	1	2	4	8	**6**	8	**11**	**4**	**8**	**16**	20	**11**	**26**	**26**	**4**	**8**	**36**	**26**	**36**	**26**	**56**	**4**
12	1002	0	0	2	2	0	2	3	2	**6**	**12**	**10**	12	2	**18**	**2**	**3**	**12**	**10**	**30**	2	**12**	**2**	**30**	**42**	**42**
13	1183	0	1	3	3	1	7	4	**3**	**7**	**13**	**15**	**13**	**3**	**7**	**8**	**22**	**13**	**31**	**31**	**23**	**13**	**33**	**49**	**43**	**31**
14	1379	0	1	3	4	5	3	2	9	11	**14**	**3**	11	**19**	11	**4**	**2**	**29**	**3**	11	**19**	**29**	**29**	**29**	**59**	**35**
15	1590	0	0	2	0	0	6	6	**0**	6	**0**	**6**	**6**	**10**	**6**	**15**	**24**	**0**	**22**	**6**	**30**	**15**	**40**	**24**	**30**	**54**
16	1816	0	0	0	1	4	0	7	6	**4**	1	**8**	16	16	**16**	**16**	**7**	**16**	**24**	**16**	**16**	**16**	**16**	**34**	**16**	**24**

17	2057	0	1	1	2	5	1	5	7	5	2	9	5	17	17	7	5	17	9	5	17	32	7	5	17	9
18	2313	0	1	1	3	3	1	0	3	9	3	9	9	13	9	13	18	3	9	9	33	18	13	45	33	9
19	2584	0	0	0	4	4	0	1	4	4	4	8	10	4	16	9	19	4	24	28	24	19	34	46	4	24
20	2870	0	0	2	0	2	6	8	0	2	5	6	8	10	14	20	8	20	22	26	30	35	20	8	50	54
21	3171	0	1	3	1	3	3	3	1	3	6	3	3	11	3	21	12	21	3	3	11	21	21	39	51	35
22	3487	0	1	3	2	1	7	4	7	7	7	15	13	7	7	12	4	7	31	31	7	22	37	31	7	31
23	3818	0	0	2	3	2	2	2	8	2	8	10	2	18	2	18	11	8	10	2	18	38	18	38	38	42
24	4164	0	0	0	4	0	4	6	4	0	9	4	6	4	12	14	6	24	4	24	4	24	14	6	24	4
25	4525	0	1	1	0	1	5	7	5	1	10	13	7	5	13	0	16	25	13	25	5	25	25	43	25	45
26	4901	0	1	1	1	5	5	5	1	5	11	5	5	1	5	1	14	11	5	5	21	41	1	41	41	37
27	5292	0	0	0	2	0	4	0	2	0	12	12	0	12	12	17	0	12	12	0	12	27	42	0	12	44
28	5698	0	0	2	3	4	2	1	8	10	13	2	10	18	10	23	1	28	2	10	18	28	48	28	58	2
29	6119	0	1	3	4	5	7	8	9	11	14	7	17	19	23	19	17	29	7	35	39	44	19	17	59	39
30	6555	0	1	3	0	3	3	3	5	3	0	11	3	15	3	5	21	15	27	3	35	30	5	21	15	27
31	7006	0	0	2	1	4	6	4	6	10	1	14	4	6	22	6	13	16	30	22	6	31	6	40	46	30
32	7472	0	0	0	2	2	0	2	2	8	2	0	2	12	8	22	20	2	16	20	32	2	22	20	32	48
33	7953	0	1	1	3	3	1	6	3	9	3	1	15	13	9	3	15	3	17	33	33	33	3	15	33	17
34	8449	0	1	1	4	1	1	7	9	1	4	1	7	9	1	24	25	19	1	25	9	34	49	25	49	1
35	8960	0	0	0	0	2	0	5	0	8	5	0	14	0	8	10	23	20	0	32	0	5	10	50	20	0
36	9486	0	0	2	1	0	6	0	6	6	6	14	0	6	6	11	9	6	14	18	6	36	36	36	6	14
37	10027	0	1	3	2	1	3	1	7	7	7	11	1	7	19	2	10	7	11	19	27	37	27	37	7	43
38	10583	0	1	3	3	5	7	8	3	11	8	7	17	3	23	8	26	23	23	35	23	8	33	53	23	23
39	11154	0	0	2	4	0	2	3	4	6	9	2	12	14	18	4	3	24	18	30	34	39	4	30	54	18
40	11740	0	0	0	0	4	4	4	0	4	10	12	4	0	4	15	22	10	28	4	20	40	40	22	40	28
41	12341	0	1	1	1	5	5	2	1	5	11	5	11	1	5	16	2	11	21	29	21	11	41	29	41	53
42	12957	0	1	1	2	3	5	6	7	9	12	13	15	17	21	7	24	27	29	33	37	42	7	51	57	29
43	13588	0	0	0	3	4	4	7	8	4	13	4	16	8	4	13	7	28	20	16	28	43	38	34	28	20
44	14234	0	0	2	4	2	2	5	4	2	14	10	14	14	2	9	5	14	26	14	34	14	34	32	14	26
45	14895	0	1	3	0	3	7	0	5	3	0	15	9	15	15	20	18	15	15	27	15	0	45	45	15	47
46	15571	0	1	3	1	1	3	1	1	7	1	3	1	11	19	21	19	1	19	19	11	1	21	19	31	19
47	16262	0	0	2	2	2	6	8	2	2	2	6	8	2	14	12	8	2	6	26	22	17	12	8	2	6
48	16968	0	0	0	3	0	0	3	8	0	3	8	12	8	0	18	12	18	8	12	8	3	18	12	48	8
49	17689	0	1	1	4	1	1	4	9	1	4	9	13	9	1	14	4	19	25	13	9	4	39	31	49	25
50	18425	0	1	1	0	5	1	2	5	5	5	9	11	5	17	0	11	5	25	29	25	20	25	11	5	57
51	19176	0	0	0	1	0	0	6	6	0	6	8	6	16	0	1	6	6	8	24	16	6	26	6	36	40
52	19942	0	0	2	2	4	6	7	2	10	7	6	16	2	22	17	16	22	6	34	22	7	42	16	22	38
53	20723	0	1	3	3	5	3	5	3	11	8	3	5	3	11	23	14	23	19	23	3	23	23	41	23	51
54	21519	0	1	3	4	3	7	0	9	3	9	15	9	19	15	19	0	9	15	27	39	9	19	27	39	15
55	22330	0	0	2	0	4	2	1	0	10	10	10	10	10	10	5	1	10	26	10	10	10	30	28	10	58
56	23156	0	0	0	1	2	4	8	6	8	11	4	8	16	20	6	17	26	20	8	36	26	6	44	56	52
57	23997	0	1	1	2	3	5	3	7	9	12	13	3	17	21	22	21	27	29	21	37	12	47	21	57	61
58	24853	0	1	1	3	1	5	4	3	1	13	5	13	13	13	3	13	13	21	13	13	13	3	13	13	21
59	25724	0	0	0	4	2	4	2	4	8	14	12	2	4	20	24	20	14	28	20	4	29	24	20	44	60
60	26610	0	0	2	0	0	2	6	0	6	0	2	6	10	18	10	15	0	18	6	10	15	10	42	30	50
61	27511	0	1	3	1	1	7	7	1	7	1	7	7	11	7	11	25	1	23	7	31	16	11	25	31	55
62	28427	0	1	3	2	5	3	5	7	11	2	11	5	7	11	2	23	17	11	23	27	32	27	23	47	11
63	29358	0	0	2	3	0	6	0	8	6	3	14	0	18	6	8	9	18	14	18	38	18	8	36	18	46
64	30304	0	0	0	4	4	0	1	4	4	4	0	10	4	16	4	10	4	0	28	24	19	4	10	4	32

由此表可得知，可行解型式為 **2 的次方×3 的次方×5 的次方(次方可以為 0 次)**。

(四)**107** 角數可行解之研究：$\dfrac{n\times(105n-103)}{2}$

N	可行解	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	18	20	21	25	27	28	30	35	36	40	42	45	49	50	54	63	75	84	96	98	105
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	107	0	1	2	3	2	5	2	3	8	7	11	9	2	17	7	2	7	26	23	17	2	35	27	23	17	9	7	53	44	32	23	11	9	2
3	318	0	0	0	2	3	0	3	6	3	8	6	10	3	12	18	3	18	21	10	18	3	30	38	24	3	24	18	48	3	18	66	30	24	3
4	634	0	0	1	2	4	4	4	2	4	4	10	4	4	4	14	4	9	13	18	4	4	22	34	4	4	46	34	40	4	34	46	58	46	4

5	1055	0	1	2	3	0	5	5	7	2	5	11	5	5	11	15	5	5	2	19	5	5	11	15	5	20	26	5	29	47	5	47	95	75	5
6	1581	0	1	0	1	1	3	6	5	6	1	9	13	6	15	1	6	6	15	13	21	6	33	21	27	6	13	31	15	6	6	69	45	13	6
7	2212	0	0	1	0	2	4	0	4	7	2	4	0	7	16	12	7	12	25	0	22	7	16	12	28	7	7	12	52	7	37	28	4	56	7
8	2948	0	0	2	0	3	2	1	4	5	8	8	8	8	14	8	8	23	5	8	8	8	32	28	8	23	8	48	32	50	23	8	68	8	8
9	3789	0	1	0	1	4	3	2	5	0	9	9	9	9	9	9	9	14	9	9	9	9	9	29	9	9	16	39	9	9	39	9	45	65	9
10	4735	0	1	1	3	0	1	3	7	1	5	7	3	10	1	15	10	10	10	3	25	10	19	15	31	10	31	35	37	10	10	31	31	31	10
11	5786	0	0	2	2	1	2	4	2	8	6	2	4	11	8	6	11	11	8	18	26	11	26	26	32	26	4	36	8	53	11	74	26	4	11
12	6942	0	0	0	2	2	0	5	6	3	2	6	12	12	12	2	12	17	3	26	12	12	30	22	12	12	33	42	30	12	42	54	30	82	12
13	8203	0	1	1	3	3	1	6	3	4	3	7	13	13	13	3	13	3	22	27	13	13	31	3	13	13	20	3	49	13	28	55	43	69	13
14	9569	0	1	2	1	4	5	0	1	2	9	5	7	14	11	9	14	19	11	21	29	14	29	9	35	29	14	19	11	56	44	77	65	63	14
15	11040	0	0	0	0	0	0	1	0	6	0	0	8	0	6	0	15	15	24	8	0	15	24	0	36	15	15	40	24	15	15	36	0	64	15
16	12616	0	0	1	0	1	4	2	0	7	6	4	2	1	16	16	16	16	7	16	16	16	16	16	16	16	23	16	34	16	16	16	40	72	16
17	14297	0	1	2	1	2	5	3	1	5	7	5	3	2	5	17	17	22	14	17	17	17	5	17	17	32	38	47	41	59	47	17	89	87	17
18	16083	0	1	0	3	3	3	4	3	0	3	3	11	3	9	3	18	8	18	11	3	18	27	3	39	18	11	33	45	18	33	39	51	11	18
19	17974	0	0	1	2	4	4	5	6	1	4	10	12	4	10	14	19	24	19	26	4	19	10	14	40	19	40	24	46	19	49	82	22	40	19
20	19970	0	0	2	2	0	2	6	2	8	0	2	6	5	8	10	20	20	17	6	20	20	26	10	20	35	27	20	44	62	20	62	2	76	20
21	22071	0	1	0	3	1	3	0	7	3	1	3	7	6	3	11	0	21	12	7	21	21	3	31	21	21	21	21	39	21	21	63	87	21	21
22	24277	0	1	1	1	2	1	1	5	4	7	1	1	7	13	17	1	2	4	1	7	22	13	37	1	22	22	27	31	22	52	1	85	71	22
23	26588	0	0	2	0	3	2	2	4	2	8	8	2	8	2	8	2	13	20	16	8	23	20	28	2	38	30	38	20	2	38	44	92	30	23
24	29004	0	0	0	0	4	0	3	4	6	4	0	10	9	6	4	3	4	6	24	24	24	24	4	24	24	45	4	6	24	54	24	12	94	24
25	31525	0	1	1	1	0	1	4	5	7	5	1	11	10	7	5	4	0	16	25	25	25	25	5	25	25	18	25	43	25	25	25	37	67	25
26	34151	0	1	2	3	1	5	5	7	5	1	11	5	11	5	11	5	1	23	19	11	26	23	31	5	41	47	1	23	5	26	47	71	47	26
27	36882	0	0	0	2	2	0	6	2	0	2	6	6	12	0	2	6	7	0	6	12	27	18	2	6	27	34	32	0	27	57	6	18	34	27
28	39718	0	0	1	2	3	4	0	6	1	8	10	0	13	10	18	7	18	1	14	28	28	10	38	28	28	28	18	28	28	43	70	70	28	28
29	42659	0	1	2	3	4	5	1	3	8	9	11	1	14	17	19	8	9	26	15	29	29	35	19	29	44	29	9	53	8	59	71	35	29	29
30	45705	0	1	0	1	0	3	2	1	3	5	9	9	0	3	5	9	5	21	9	15	30	21	25	9	30	37	5	21	30	30	9	9	37	30
31	48856	0	0	1	0	1	4	3	0	4	6	4	10	1	4	16	10	6	13	24	16	31	4	16	10	31	3	6	40	31	31	52	88	52	31
32	52112	0	0	2	0	2	2	4	0	2	2	8	4	2	2	12	11	12	2	4	2	32	20	32	32	2	25	12	2	11	62	32	80	74	32
33	55473	0	1	0	1	3	3	5	1	6	3	9	5	3	15	13	12	23	15	5	3	33	33	33	33	33	5	23	15	33	48	33	81	5	33
34	58939	0	1	1	3	4	1	6	3	7	9	7	13	4	7	19	13	14	25	27	19	34	7	19	13	34	41	39	25	34	64	55	91	41	34
35	62510	0	0	2	2	0	2	0	6	5	0	2	0	5	14	10	14	10	5	14	20	0	14	30	14	5	35	10	32	14	35	14	14	84	35
36	66186	0	0	0	2	1	0	1	2	0	6	6	8	6	0	6	15	11	9	22	6	1	18	26	36	36	36	36	36	36	36	78	42	36	36
37	69967	0	1	1	3	2	1	2	7	1	7	7	9	7	1	7	16	17	10	23	7	2	19	7	37	37	44	17	37	37	67	79	79	93	37
38	73853	0	1	2	1	3	5	3	5	8	3	5	3	8	17	13	17	3	8	17	23	3	17	13	17	8	10	3	35	17	53	17	29	59	38
39	77844	0	0	0	0	4	0	4	4	3	4	0	4	9	12	4	18	19	3	4	24	4	12	4	18	39	32	44	30	39	69	60	84	32	39
40	81940	0	0	1	0	0	4	5	4	4	0	4	12	10	4	0	19	15	22	12	10	5	4	20	40	40	12	40	22	40	40	40	52	12	40
41	86141	0	1	2	1	1	5	6	5	2	1	5	13	11	11	1	20	16	11	13	11	6	29	21	41	11	48	41	11	20	41	41	29	97	41
42	90447	0	1	0	3	2	3	0	7	6	7	3	7	12	15	7	0	22	24	7	27	7	15	7	21	42	42	47	51	42	72	63	15	91	42
43	94858	0	0	1	2	3	4	1	2	7	8	10	8	13	16	18	1	8	7	22	28	8	34	18	22	43	43	8	34	43	58	22	10	92	43
44	99374	0	0	2	2	4	2	2	6	5	4	2	2	14	14	14	2	24	14	2	14	9	14	14	2	14	2	24	14	23	74	2	14	2	44
45	103995	0	1	0	3	0	3	3	3	0	5	3	3	0	9	15	3	20	18	3	15	10	27	35	3	0	17	45	45	45	45	3	27	17	45
46	108721	0	1	1	1	1	1	4	1	1	1	1	11	1	1	1	4	21	19	25	1	11	1	1	25	1	39	21	19	46	46	25	49	39	46
47	113552	0	0	2	0	2	2	5	0	8	2	8	12	2	8	12	5	2	17	12	2	12	8	32	26	17	19	2	44	26	2	68	80	68	47
48	118488	0	0	0	0	3	0	6	0	3	8	0	6	3	12	8	6	13	12	20	18	13	12	8	6	3	6	38	12	48	63	48	24	6	48
49	123529	0	1	1	1	4	1	0	1	4	9	1	7	4	13	9	7	4	4	21	19	14	13	9	7	4	0	29	31	49	4	49	73	49	49
50	128675	0	1	2	3	0	5	1	3	2	5	11	1	5	11	15	8	0	20	15	5	15	11	35	29	20	1	25	47	29	50	71	35	1	50
51	133926	0	0	0	2	1	0	2	6	6	6	6	2	6	6	6	9	1	6	2	6	16	6	6	30	6	9	26	6	51	51	30	6	58	51
52	139282	0	0	1	2	2	4	3	2	7	2	10	10	7	16	2	10	7	16	10	22	17	34	2	10	7	24	32	16	52	7	10	82	24	52
53	144743	0	1	2	3	3	5	4	7	5	3	11	11	8	5	3	11	18	23	11	23	18	23	23	11	23	46	43	23	32	68	11	71	95	53
54	150309	0	1	0	1	4	3	5	5	0	9	9	5	9	9	9	12	9	0	5	9	19	9	29	33	9	26	9	27	54	9	33	69	75	54
55	155980	0	0	1	0	0	4	6	4	1	0	4	6	10	10	0	13	5	1	20	10	20	28	20	34	10	13	30	28	55	55	76	76	62	55
56	161756	0	0	2	0	1	2	0	4	8	6	8	0	11	8	16	14	6	26	0	26	21	8	36	14	26	7	6	26	35	56	56	92	56	56
57	167637	0	1	0	1	2	3	1	5	3	7	9	1	12	3	17	15	12	21	1	27	22	21	37	15	12	8	37	21	57	12	57	21	57	57
58	173623	0	1	1	3	3	1	2	7	4	3	7	9	13	13	3	16	23	13	23	13	23	31	23	37	13	16	23	13	58	73	79	55	65	58
59	179714	0	0	2	2	4	2	3	2	2	4	2	10	14	2	14	17	14	2	10	14	24	2	34	38	29	31	14	2	38	14	38	2	80	59
60	185910	0	0	0	2	0	0	4	6	6	0	6	4	0	6	10	18	10	15	18	0	25	6	30	18	15	4	10	42	60	60	18	54	4	60
61	192211	0	1	1	3	1	1	5	3	7	1	7	5	1	7	11	19	11	25	19	1	26	7	11	19	16	33	11	25	61	61	19	19	33	61
62	198617	0	1	2	1	2	5	6	1	5	7	5	13	2	5	17	20	17	5	13	17	27	5	17	41	32	20	17	5	41	17	41	89	69	62
63	205128	0	0	0	0	3	0	0	0	0	8	0	0	3	0	8	0	3	9	0	18	28	0	8	0	18	14	28	36	0	3	0	72	14	63
64	211744	0	0	1	0	4	4	1	0	1	4	4	8	4	10	4	1	19	10	8	4	29	28	24	22	19	15	44	10	1	19	64	64	64	64
65	218465	0	1	2	1	0	5	2	1	8	5	5	9	5	17	5	2	15	8	9	5	30	17	25	23	35	23	15	35	44	65	65	65	23	65

66	225291	0	1	0	3	1	3	3	3	3	1	3	3	6	3	11	3	16	3	3	21	31	3	11	3	21	38	41	3	3	66	3	75	87	**66**
67	232222	0	0	1	2	2	4	4	6	4	2	10	4	7	4	2	4	22	22	18	22	32	22	22	4	22	11	22	22	4	22	46	94	60	**67**
68	239258	0	0	2	2	3	2	5	2	2	8	2	12	8	2	18	5	8	11	26	8	33	2	18	26	38	40	8	38	47	8	26	26	40	**68**
69	246399	0	1	0	3	4	3	6	7	6	9	3	13	9	15	19	6	24	24	27	9	34	15	39	27	24	27	49	51	6	24	27	63	27	**69**
70	253645	0	1	1	1	0	1	0	5	7	5	1	7	10	7	5	7	20	7	21	25	0	25	5	7	25	21	45	7	7	70	49	13	21	**70**
71	260996	0	0	2	0	1	2	1	4	5	6	8	8	11	14	16	8	21	14	8	26	1	32	36	8	41	22	46	14	50	71	8	68	22	**71**
72	268452	0	0	0	0	2	0	2	4	0	2	0	2	12	0	12	9	2	18	16	12	2	0	12	30	27	30	2	18	9	27	72	36	30	**72**
73	276013	0	1	1	1	3	1	3	5	1	3	1	3	13	1	13	10	13	19	17	13	3	1	13	31	28	45	13	19	10	13	73	13	45	**73**
74	283679	0	1	2	3	4	5	4	7	8	9	11	11	14	17	19	11	4	17	11	29	4	35	39	11	44	18	29	17	53	29	11	95	67	**74**
75	291450	0	0	0	2	0	0	5	2	3	0	6	12	0	12	10	12	0	12	26	0	5	30	10	12	30	47	0	12	12	0	54	90	96	**75**
76	299326	0	0	1	2	1	4	6	6	4	6	10	6	1	4	6	13	1	4	6	16	6	22	6	34	31	34	26	4	13	1	34	94	34	**76**
77	307307	0	1	2	3	2	5	0	3	2	7	11	7	2	11	7	14	7	20	7	17	7	11	27	35	2	28	7	47	56	32	35	11	77	**77**
78	315393	0	1	0	1	3	3	1	1	6	3	9	1	3	15	13	15	18	6	1	3	8	33	33	15	33	29	43	33	15	18	57	33	29	**78**
79	323584	0	0	1	0	4	4	2	0	7	4	4	2	4	16	4	16	9	16	16	4	9	16	24	16	34	37	34	16	16	34	16	64	86	**79**
80	331880	0	0	2	0	0	2	3	0	5	0	8	10	5	14	0	17	5	23	24	20	10	32	0	38	5	3	30	50	59	5	80	8	52	**80**
81	340281	0	1	0	1	1	3	4	1	0	1	9	11	6	9	1	18	6	0	25	21	11	9	1	39	36	25	31	27	18	6	81	57	25	**81**
82	348787	0	1	1	3	2	1	5	3	1	7	7	5	7	1	7	19	12	1	19	7	12	19	27	19	37	5	37	1	19	37	19	19	5	**82**
83	357398	0	0	2	2	3	2	6	6	8	8	2	6	8	8	18	20	23	26	6	8	13	26	38	20	8	41	48	26	62	23	62	86	90	**83**
84	366114	0	0	0	2	4	0	0	2	3	4	6	0	9	12	14	0	14	21	14	24	14	30	34	0	39	35	14	48	21	39	42	66	84	**84**
85	374935	0	1	1	3	0	1	1	7	4	5	7	1	10	13	15	1	10	13	15	25	15	31	15	1	40	36	35	13	22	10	43	55	85	**85**
86	383861	0	1	2	1	1	5	2	5	2	1	5	9	11	11	1	2	11	2	9	11	16	29	21	23	11	44	11	29	2	11	65	53	93	**86**
87	392892	0	0	0	0	2	0	3	4	6	2	0	10	12	6	12	3	17	15	24	12	17	24	12	24	42	10	42	42	24	42	24	60	10	**87**
88	402028	0	0	1	0	3	4	4	4	7	8	4	4	13	16	8	4	3	25	4	28	18	16	28	4	43	32	28	52	25	28	4	76	32	**88**
89	411269	0	1	2	1	4	5	5	5	5	9	5	5	14	5	9	5	19	5	5	29	19	5	29	5	14	12	19	5	5	44	5	5	61	**89**
90	420615	0	1	0	3	0	3	6	7	0	5	3	13	0	9	15	6	15	9	27	15	20	27	15	27	0	48	15	9	27	15	27	39	97	**90**
91	430066	0	0	1	2	1	4	0	2	1	6	10	0	1	10	6	7	16	10	14	16	21	10	26	28	1	42	16	10	28	16	70	82	42	**91**
92	439622	0	0	2	2	2	2	1	6	8	2	2	8	2	8	2	8	22	8	22	2	22	26	22	8	17	43	22	8	8	47	50	38	92	**92**
93	449283	0	1	0	3	3	3	2	3	3	3	3	9	3	3	3	9	8	3	23	3	23	3	3	9	3	2	33	3	30	33	51	3	51	**93**
94	459049	0	1	1	1	4	1	3	1	4	9	1	3	4	13	9	10	24	22	17	19	24	13	9	31	4	17	49	49	31	49	73	73	17	**94**
95	468920	0	0	2	0	0	2	4	0	2	0	8	4	5	2	0	11	20	11	4	20	25	20	0	32	20	39	20	38	11	20	32	56	88	**95**
96	478896	0	0	0	0	1	0	5	0	6	6	0	12	6	6	16	12	21	24	12	6	26	24	16	12	6	19	46	24	33	21	12	48	68	**96**
97	488977	0	1	1	1	2	1	6	1	7	7	1	13	7	7	17	13	2	7	13	7	27	25	17	13	7	6	27	7	34	52	13	49	55	**97**
98	499163	0	1	2	3	3	5	0	3	5	3	11	7	8	5	3	14	13	14	7	23	28	23	3	35	23	0	13	41	14	38	35	59	49	**98**
99	509454	0	0	0	2	4	0	1	6	0	4	6	8	9	0	14	15	4	18	22	24	29	18	14	36	9	1	4	18	36	54	78	78	50	**99**
100	519850	0	0	1	2	0	4	2	2	1	0	10	2	10	10	10	16	0	19	2	10	30	10	10	16	10	9	0	46	37	25	58	10	58	**100**
101	530351	0	1	2	3	1	5	3	7	8	1	11	3	11	17	11	17	1	17	3	11	31	35	31	17	26	24	1	17	17	26	59	47	73	**101**
102	540957	0	1	0	1	2	3	4	5	3	7	9	11	12	3	17	18	7	12	25	27	32	21	37	39	12	46	7	39	39	57	81	93	95	**102**
103	551668	0	0	1	0	3	4	5	4	4	8	4	12	13	4	8	19	18	4	12	28	33	4	28	40	13	26	18	4	40	43	40	52	26	**103**
104	562484	0	0	2	0	4	2	6	4	2	4	8	6	14	2	4	20	9	20	20	14	34	20	4	20	29	13	34	20	20	59	20	20	62	**104**
105	573405	0	1	0	1	0	3	0	5	6	5	9	7	0	15	5	0	5	6	21	15	0	33	5	21	15	7	5	33	42	30	21	93	7	**0**

由表可知，可行解型式為 **2 的次方×3 的次方×5 的次方×7 的次方(次方可以為 0 次)**

(五)多角數的可行解整理：

<table>
<tr><th>一般項公式</th><th>可行解</th><th>一般項公式</th><th>可行解</th></tr>
<tr><td rowspan="2">五角數</td><td>1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, …</td><td rowspan="2">十七角數</td><td>1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 50, 54, 60, 64,…,…</td></tr>
<tr><td>2 的次方×3 的次方
(次方可以為 0 次)</td><td>2 的次方×3 的次方×5 的次方
(次方可以為 0 次)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">八角數</td><td>1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, …</td><td rowspan="2">107 角數</td><td>1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 50, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 75, 80, 81,…</td></tr>
<tr><td>2×3 的次方
(次方可以為 0 次)</td><td>2 的次方×3 的次方×5 的次方×7 的次方
(次方可以為 0 次)</td></tr>
</table>

五、推廣問題研究：

因為多角數數列是二階等差數列，所以，推廣對一般二階等差數列研究其可行解。

(一)二階等差數列，一般項為 $a_n=3n^2+4n+1$															
	數値	d1	d2	可行解											
n				**1**	**2**	**3**	**6**	**9**	**18**	**27**	**54**	**81**	**162**	**243**	
1	8			**0**	**0**	**2**	**2**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	
2	21	13		0	**1**	**0**	**3**	**3**	**3**	**21**	**21**	**21**	**21**	**21**	
3	40	19	6	0	0	**1**	**4**	**4**	**4**	**13**	**40**	**40**	**40**	**40**	
4	65	25	6	0	1	2	**5**	**2**	**11**	**11**	**11**	**65**	**65**	**65**	
5	96	31	6	0	0	0	**0**	**6**	**6**	**15**	**42**	**15**	**96**	**96**	
6	133	37	6	0	1	1	**1**	**7**	**7**	**25**	**25**	**52**	**133**	**133**	
7	176	43	6	0	0	2	2	**5**	**14**	**14**	**14**	**14**	**14**	**176**	
8	225	49	6	0	1	0	3	**0**	**9**	**9**	**9**	**63**	**63**	**225**	
9	280	55	6	0	0	1	4	**1**	**10**	**10**	**10**	**37**	**118**	**37**	
10	341	61	6	0	1	2	5	8	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**	**98**	
11	408	67	6	0	0	0	0	3	**12**	**3**	**30**	**3**	**84**	**165**	
12	481	73	6	0	1	1	1	4	**13**	**22**	**49**	**76**	**157**	**238**	
13	560	79	6	0	0	2	2	2	**2**	**20**	**20**	**74**	**74**	**74**	
14	645	85	6	0	1	0	3	6	**15**	**24**	**51**	**78**	**159**	**159**	
15	736	91	6	0	0	1	4	7	**16**	**7**	**34**	**7**	**88**	**7**	
16	833	97	6	0	1	2	5	5	**5**	**23**	**23**	**23**	**23**	**104**	
17	936	103	6	0	0	0	0	0	**0**	**18**	**18**	**45**	**126**	**207**	
18	1045	109	6	0	1	1	1	1	**1**	**19**	**19**	**73**	**73**	**73**	
19	1160	115	6	0	0	2	2	8	8	**26**	**26**	**26**	**26**	**188**	
20	1281	121	6	0	1	0	3	3	3	**12**	**39**	**66**	**147**	**66**	
21	1408	127	6	0	0	1	4	4	4	**4**	**4**	**31**	**112**	**193**	
22	1541	133	6	0	1	2	5	2	11	**2**	**29**	**2**	**83**	**83**	
23	1680	139	6	0	0	0	0	6	6	**6**	**6**	**60**	**60**	**222**	
24	1825	145	6	0	1	1	1	7	7	**16**	**43**	**43**	**43**	**124**	
25	1976	151	6	0	0	2	2	5	14	**5**	**32**	**32**	**32**	**32**	
26	2133	157	6	0	1	0	3	0	9	**0**	**27**	**27**	**27**	**189**	
27	2296	163	6	0	0	1	4	1	10	**1**	**28**	**28**	**28**	**109**	
28	2465	169	6	0	1	2	5	8	17	8	**35**	**35**	**35**	**35**	
29	2640	175	6	0	0	0	0	3	12	21	**48**	**48**	**48**	**210**	
30	2821	181	6	0	1	1	1	4	13	13	**13**	**67**	**67**	**148**	

(二)二階等差數列，一般項為 $a_n=3n^2+6n+1$													
	數値	d1	d2	可行解									
n				**1**	**2**								
1	10			**0**	**0**								
2	25	15		0	**1**								
3	46	21	6	0	0								
4	73	27	6	0	1								
5	106	33	6	0	0								
6	145	39	6	0	1								
7	190	45	6	0	0								
8	241	51	6	0	1								
9	298	57	6	0	0								
10	361	63	6	0	1								
11	430	69	6	0	0								
12	505	75	6	0	1								
13	586	81	6	0	0								
14	673	87	6	0	1								
15	766	93	6	0	0								
16	865	99	6	0	1								
17	970	105	6	0	0								
18	1081	111	6	0	1								
19	1198	117	6	0	0								
20	1321	123	6	0	1								
21	1450	129	6	0	0								
22	1585	135	6	0	1								
23	1726	141	6	0	0								
24	1873	147	6	0	1								
25	2026	153	6	0	0								
26	2185	159	6	0	1								
27	2350	165	6	0	0								
28	2521	171	6	0	1								
29	2698	177	6	0	0								
30	2881	183	6	0	1								

（表一）$3n^2+4n+1$ 的可行解為 **1, 2,3,6,9,18,27,54,81,162,** … 。

（表二）$3n^2+6n+1$ 的可行解為 **1, 2**。

比較：(表一)中 $3 \nmid (3,4)$，所以 3 為可行解。 (表二)中 $3 \mid (3,6)$，所以 3 不為可行解。

(三)二階等差數列，一般項為 $a_n=6n^2+8n+1$																
	數値	d1	d2	粗體爲可行解												
n				**1**	2	**3**	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12	**27**
1	15			**0**	1	**0**	3	0	3	1	7	**6**	5	4	3	**15**
2	41	26		0	1	**2**	1	1	5	6	1	**5**	1	8	5	**14**
3	79	38	12	0	1	**1**	3	4	1	2	7	**7**	9	2	7	**25**
4	129	50	12	0	1	**0**	1	4	3	3	1	**3**	9	8	9	**21**
5	191	62	12	0	1	**2**	3	1	5	2	7	**2**	1	4	11	**2**
6	265	74	12	0	1	**1**	1	0	1	6	1	**4**	5	1	1	**22**
7	351	86	12	0	1	**0**	3	1	3	1	7	**0**	1	10	3	**0**
8	449	98	12	0	1	**2**	1	4	5	1	1	**8**	9	9	5	**17**
9	559	110	12	0	1	**1**	3	4	1	6	7	**1**	9	9	7	**19**
10	681	122	12	0	1	**0**	1	1	3	2	1	6	1	10	9	**6**
11	815	134	12	0	1	**2**	3	0	5	3	7	5	5	1	11	**5**

(四)二階等差數列，一般項為 $a_n=6n^2+7n+1$															
	數値	d1	d2	粗體爲可行解											
n				**1**	**2**	**3**	**4**	5	**6**	7	**8**	**9**	10	11	**12**
1	14			**0**	**0**	**2**	**2**	4	**2**	0	**6**	**5**	4	3	**2**
2	39	25		0	**1**	**0**	**3**	4	**3**	4	**7**	**3**	9	6	**3**
3	76	37	12	0	0	**1**	**0**	1	**4**	6	**4**	**4**	6	10	**4**
4	125	49	12	0	1	2	**1**	0	**5**	6	**5**	**8**	5	4	**5**
5	186	61	12	0	0	0	2	1	**0**	4	**2**	**6**	6	10	**6**
6	259	73	12	0	1	1	3	4	**1**	0	**3**	**7**	9	6	**7**
7	344	85	12	0	0	2	0	4	2	1	**0**	**2**	4	3	**8**
8	441	97	12	0	1	0	1	1	3	0	**1**	**0**	1	1	**9**
9	550	109	12	0	0	1	2	0	4	4	6	**1**	0	0	**10**
10	671	121	12	0	1	2	3	1	5	6	7	5	1	0	**11**
11	804	133	12	0	0	0	0	4	0	6	4	3	4	1	**0**

12	961	146	12	0	1	**1**	1	1	1	2	1	7	1	4	1	**16**
13	1119	158	12	0	1	**0**	3	4	3	6	7	3	9	8	3	**12**
14	1289	170	12	0	1	**2**	1	4	5	1	1	2	9	2	5	**20**
15	1471	182	12	0	1	**1**	3	1	1	1	7	4	1	8	7	**13**
16	1665	194	12	0	1	**0**	1	0	3	6	1	0	5	4	9	**18**
17	1871	206	12	0	1	**2**	3	1	5	2	7	8	1	1	11	**8**
18	2089	218	12	0	1	**1**	1	4	1	3	1	1	9	10	1	**10**
19	2319	230	12	0	1	**0**	3	4	3	2	7	6	9	9	3	**24**
20	2561	242	12	0	1	**2**	1	1	5	6	1	5	1	9	5	**23**
21	2815	254	12	0	1	**1**	3	0	1	1	7	7	5	10	7	**7**
22	3081	266	12	0	1	**0**	1	1	3	1	1	3	1	1	9	**3**
23	3359	278	12	0	1	**2**	3	4	5	6	7	2	9	4	11	**11**
24	3649	290	12	0	1	**1**	1	4	1	2	1	4	9	8	1	**4**
25	3951	302	12	0	1	**0**	3	1	3	3	7	0	1	2	3	**9**
26	4265	314	12	0	1	**2**	1	0	5	2	1	8	5	8	5	**26**
27	4591	326	12	0	1	**1**	3	1	1	6	7	1	1	4	7	**1**

12	949	145	12	0	1	1	1	4	1	4	5	4	9	3	**1**
13	1106	157	12	0	0	2	2	1	2	0	2	8	6	6	2
14	1275	169	12	0	1	0	3	0	3	1	3	6	5	10	3
15	1456	181	12	0	0	1	0	1	4	0	0	7	6	4	4
16	1649	193	12	0	1	2	1	4	5	4	1	2	9	10	5
17	1854	205	12	0	0	0	2	4	0	6	6	0	4	6	6
18	2071	217	12	0	1	1	3	1	1	6	7	1	1	3	7
19	2300	229	12	0	0	2	0	0	2	4	4	5	0	1	8
20	2541	241	12	0	1	0	1	1	3	0	5	3	1	0	9
21	2794	253	12	0	0	1	2	4	4	1	2	4	4	0	10
22	3059	265	12	0	1	2	3	4	5	0	3	8	9	1	11
23	3336	277	12	0	0	0	0	1	0	4	0	6	6	3	0
24	3625	289	12	0	1	1	1	0	1	6	1	7	5	6	1
25	3926	301	12	0	0	2	2	1	2	6	6	2	6	10	2
26	4239	313	12	0	1	0	3	4	3	4	7	0	9	4	3
27	4564	325	12	0	0	1	0	4	4	0	4	1	4	10	4

(表三)$6n^2+8n+1$ 可行解為 **1,3,9,27,81,243, …**。

(表四)$6n^2+7n+1$ 可行解為 **1,2,3,4,6,8,9,12,16,24,27, …**。

比較：(表三)中 $2\mid(6+8)$，所以 2 不為可行解。 (表四)中 $2\nmid(6+7)$，所以 2 為可行解。

(五)二階等差數列，一般項為 $a_n=15n^2+8n+1$																
	數値	D1	d2	粗體爲可行解												
n				**1**	**2**	**3**	4	**5**	**6**	7	8	**9**	**10**	11	12	**15**
1	24			**0**	**0**	**0**	0	**4**	**0**	3	0	**6**	**4**	2	0	**9**
2	77	53		0	**1**	**2**	1	**2**	**5**	0	5	**5**	**7**	0	5	**2**
3	160	83	30	0	0	**1**	0	**0**	**4**	6	0	**7**	**0**	6	4	**10**
4	273	113	30	0	1	0	1	**3**	**3**	0	1	**3**	**3**	9	9	**3**
5	416	143	30	0	0	2	0	**1**	**2**	3	0	**2**	**6**	9	8	**11**
6	589	173	30	0	1	1	1	4	**1**	1	5	**4**	**9**	6	1	**4**
7	792	203	30	0	0	0	0	2	0	1	0	**0**	**2**	0	0	**12**
8	1025	233	30	0	1	2	1	0	5	3	1	**8**	**5**	2	5	**5**
9	1288	263	30	0	0	1	0	3	4	0	0	**1**	**8**	1	4	**13**
10	1581	293	30	0	1	0	1	1	3	6	5	6	**1**	8	9	**6**
11	1904	323	30	0	0	2	0	4	2	0	0	5	4	1	8	**14**
12	2257	353	30	0	1	1	1	2	1	3	1	7	7	2	1	**7**
13	2640	383	30	0	0	0	0	0	0	1	0	3	0	0	0	**0**
14	3053	413	30	0	1	2	1	3	5	1	5	2	3	6	5	**8**
15	3496	443	30	0	0	1	0	1	4	3	0	4	6	9	4	**1**
16	3969	473	30	0	1	0	1	4	3	0	1	0	9	9	9	9
17	4472	503	30	0	0	2	0	2	2	6	0	8	2	6	8	2
18	5005	533	30	0	1	1	1	0	1	0	5	1	5	0	1	10
19	5568	563	30	0	0	0	0	3	0	3	0	6	8	2	0	3
20	6161	593	30	0	1	2	1	1	5	1	1	5	1	1	5	11
21	6784	623	30	0	0	1	0	4	4	1	0	7	4	8	4	4
22	7437	653	30	0	1	0	1	2	3	3	5	3	7	1	9	12
23	8120	683	30	0	0	2	0	0	2	0	0	2	0	2	8	5
24	8833	713	30	0	1	1	1	3	1	6	1	4	3	0	1	13
25	9576	743	30	0	0	0	0	1	0	0	0	0	6	6	0	6
26	10349	773	30	0	1	2	1	4	5	3	5	8	9	9	5	14
27	11152	803	30	0	0	1	0	2	4	1	0	1	2	9	4	7

(六)二階等差數列，一般項為 $a_n=15n^2+5n+1$															
	數値	d1	d2	粗體爲可行解											
n				**1**	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	26			**0**	1	**0**	1	1	3	0	5	3	1	10	9
2	81	55		0	1	**2**	3	1	5	1	7	8	1	5	11
3	166	85	30	0	1	**1**	3	1	1	4	7	7	1	8	7
4	281	115	30	0	1	0	1	1	3	2	5	0	1	8	9
5	426	145	30	0	1	2	1	1	5	2	1	5	1	5	5
6	601	175	30	0	1	1	3	1	1	4	3	4	1	10	7
7	806	205	30	0	1	0	3	1	3	1	3	6	1	1	3
8	1041	235	30	0	1	2	1	1	5	0	1	2	1	0	5
9	1306	265	30	0	1	1	1	1	1	1	5	1	1	7	1
10	1601	295	30	0	1	0	3	1	3	4	7	3	1	0	3
11	1926	325	30	0	1	2	3	1	5	2	7	8	1	1	11
12	2281	355	30	0	1	1	1	1	1	2	5	7	1	10	1
13	2666	385	30	0	1	0	1	1	3	4	1	0	1	5	9
14	3081	415	30	0	1	2	3	1	5	1	3	5	1	8	11
15	3526	445	30	0	1	1	3	1	1	0	3	4	1	8	7
16	4001	475	30	0	1	0	1	1	3	1	1	6	1	5	9
17	4506	505	30	0	1	2	1	1	5	4	5	2	1	10	5
18	5041	535	30	0	1	1	3	1	1	2	7	1	1	1	7
19	5606	565	30	0	1	0	3	1	3	2	7	3	1	0	3
20	6201	595	30	0	1	2	1	1	5	4	5	8	1	7	5
21	6826	625	30	0	1	1	1	1	1	1	1	7	1	0	1
22	7481	655	30	0	1	0	3	1	3	0	3	0	1	1	3
23	8166	685	30	0	1	2	3	1	5	1	3	5	1	10	11
24	8881	715	30	0	1	1	1	1	1	4	1	4	1	5	1
25	9626	745	30	0	1	0	1	1	3	2	5	6	1	8	9
26	10401	775	30	0	1	2	3	1	5	2	7	2	1	8	11
27	11206	805	30	0	1	1	3	1	1	4	7	1	1	5	7

(表五) $15n^2+8n+1$ 可行解為 **1,2,3,5,6,9,10,15,18,25, …**。

(表六) $15n^2+5n+1$ 可行解為 **1,3,9,27,81,243,729, …**。

比較：1.(表五)中 $2\nmid(15+8)$，所以 2 為可行解。 (表六)中 $2\mid(15+5)$，所以 2 不為可行解。

2.(表五)中 $5\nmid(15,8)$，所以 5 為可行解。 (表六)中 $5\mid(15,5)$，所以 5 不為可行解。

(七)二階等差數列一般項為 $a_n=35n^2+12n+1$

	數値	d1	d2	粗體爲可行解												
n				**1**	**2**	3	4	**5**	6	**7**	8	9	**10**	11	12	13
1	48			**0**	**0**	0	0	**3**	0	**6**	0	3	**8**	4	0	9
2	165	117		0	**1**	0	1	**0**	3	**4**	5	3	**5**	0	9	9
3	352	187	70	0	0	1	0	**2**	4	**2**	0	1	**2**	0	4	1
4	609	257	70	0	1	0	1	**4**	3	**0**	1	6	**9**	4	9	11
5	936	327	70	0	0	0	0	**1**	0	**5**	0	0	**6**	1	0	0
6	1333	397	70	0	1	1	1	3	1	**3**	5	1	**3**	2	1	7
7	1800	467	70	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	**0**	7	0	6
8	2337	537	70	0	1	0	1	2	3	6	1	6	**7**	5	9	10
9	2944	607	70	0	0	1	0	4	4	4	0	1	**4**	7	4	6
10	3621	677	70	0	1	0	1	1	3	2	5	3	**1**	2	9	7
11	4368	747	70	0	0	0	0	3	0	0	0	3	8	1	0	0
12	5185	817	70	0	1	1	1	0	1	5	1	1	5	4	1	11
13	6072	887	70	0	0	0	0	2	0	3	0	6	2	0	0	1
14	7029	957	70	0	1	0	1	4	3	1	5	0	9	0	9	9
15	8056	1027	70	0	0	1	0	1	4	6	0	1	6	4	4	9
16	9153	1097	70	0	1	0	1	3	3	4	1	0	3	1	9	1
17	10320	1167	70	0	0	0	0	0	0	2	0	6	0	2	0	11
18	11557	1237	70	0	1	1	1	2	1	0	5	1	7	7	1	0
19	12864	1307	70	0	0	0	0	4	0	5	0	3	4	5	0	7
20	14241	1377	70	0	1	0	1	1	3	3	1	3	1	7	9	6
21	15688	1447	70	0	0	1	0	3	4	1	0	1	8	2	4	10
22	17205	1517	70	0	1	0	1	0	3	6	5	6	5	1	9	6
23	18792	1587	70	0	0	0	0	2	0	4	0	0	2	4	0	7
24	20449	1657	70	0	1	1	1	4	1	2	1	1	9	0	1	0
25	22176	1727	70	0	0	0	0	1	0	0	0	0	6	0	0	11
26	23973	1797	70	0	1	0	1	3	3	5	5	6	3	4	9	1
27	25840	1867	70	0	0	1	0	0	4	3	0	1	0	1	4	9

(八)二階等差數列一般項為 $a_n=35n^2+14n+1$

	數値	d1	d2	粗體爲可行解											
n				**1**	**2**	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**	11	12
1	50			**0**	**0**	2	2	**0**	2	1	2	5	**0**	6	2
2	169	119		0	**1**	1	1	**4**	1	1	1	7	**9**	4	1
3	358	189	70	0	0	1	2	**3**	4	1	6	7	**8**	6	10
4	617	259	70	0	1	2	1	**2**	5	1	1	5	**7**	1	5
5	946	329	70	0	0	1	2	**1**	4	1	2	1	**6**	0	10
6	1345	399	70	0	1	1	1	0	1	1	1	4	**5**	3	1
7	1814	469	70	0	0	2	2	4	2	1	6	5	**4**	10	2
8	2353	539	70	0	1	1	1	3	1	1	1	4	**3**	10	1
9	2962	609	70	0	0	1	2	2	4	1	2	1	**2**	3	10
10	3641	679	70	0	1	2	1	1	5	1	1	5	**1**	0	5
11	4390	749	70	0	0	1	2	0	4	1	6	7	0	1	10
12	5209	819	70	0	1	1	1	4	1	1	1	7	9	6	1
13	6098	889	70	0	0	2	2	3	2	1	2	5	8	4	2
14	7057	959	70	0	1	1	1	2	1	1	1	1	7	6	1
15	8086	1029	70	0	0	1	2	1	4	1	6	4	6	1	10
16	9185	1099	70	0	1	2	1	0	5	1	1	5	5	0	5
17	10354	1169	70	0	0	1	2	4	4	1	2	4	4	3	10
18	11593	1239	70	0	1	1	1	3	1	1	1	1	3	10	1
19	12902	1309	70	0	0	2	2	2	2	1	6	5	2	10	2
20	14281	1379	70	0	1	1	1	1	1	1	1	7	1	3	1
21	15730	1449	70	0	0	1	2	0	4	1	2	7	0	0	10
22	17249	1519	70	0	1	2	1	4	5	1	1	5	9	1	5
23	18838	1589	70	0	0	1	2	3	4	1	6	1	8	6	10
24	20497	1659	70	0	1	1	1	2	1	1	1	4	7	4	1
25	22226	1729	70	0	0	2	2	1	2	1	2	5	6	6	2
26	24025	1799	70	0	1	1	1	0	1	1	1	4	5	1	1
27	25894	1869	70	0	0	1	2	4	4	1	6	1	4	0	10

(表七) $35n^2+12n+1$ 可行解為 **1,2,5,7,10,14,25,49,50, …**。

(表八) $35n^2+14n+1$ 可行解為 **1,2,5,10,25,50, …**。

比較：(表七)中 $7\nmid(35,12)$，所以 7 為可行解。 (表八)中 $7\mid(35,14)$，所以 7 不為可行解。

(九)二階等差數列，一般項為 $a_n=105n^2+16n+1$

	數値	d1	d2	粗體爲可行解																											
n				**1**	**2**	**3**	**5**	**6**	**7**	**9**	**10**	**14**	**15**	16	**18**	**21**	**25**	26	**27**	28	29	**30**	32	**35**	36	40	**42**	44	**45**	48	**49**
1	122			**0**	**0**	**2**	**2**	**2**	**3**	**5**	**2**	**10**	**2**	10	**14**	**17**	**22**	18	**14**	10	6	**2**	26	**17**	14	2	**38**	34	**32**	26	**24**
2	453	331		0	**1**	**0**	**3**	**3**	**5**	**3**	**3**	**5**	**3**	5	**3**	**12**	**3**	11	**21**	5	18	**3**	5	**33**	21	13	**33**	13	**3**	21	**12**
3	994	541	210	0	0	**1**	**4**	**4**	**0**	**4**	**4**	**0**	**4**	2	**4**	**7**	**19**	6	**22**	14	8	**4**	2	**14**	22	34	**28**	26	**4**	34	**14**
4	1745	751	210	0	1	2	**0**	**5**	**2**	**8**	**5**	**9**	**5**	1	**17**	**2**	**20**	3	**17**	9	5	**5**	17	**30**	17	25	**23**	29	**35**	17	**30**
5	2706	961	210	0	0	0	**1**	**0**	**4**	**6**	**6**	**4**	**6**	2	**6**	**18**	**6**	2	**6**	18	9	**6**	18	**11**	6	26	**18**	22	**6**	18	**11**
6	3877	1171	210	0	1	1	2	**1**	**6**	**7**	**7**	**13**	**7**	5	**7**	**13**	**2**	3	**16**	13	20	**7**	5	**27**	25	37	**13**	5	**7**	37	**6**
7	5258	1381	210	0	0	2	3	2	**1**	**2**	**8**	**8**	**8**	10	**2**	**8**	**8**	6	**20**	22	9	**8**	10	**8**	2	18	**8**	22	**38**	26	**15**
8	6849	1591	210	0	1	0	4	3	3	**0**	**9**	**3**	**9**	1	**9**	**3**	**24**	11	**18**	17	5	**9**	1	**24**	9	9	**3**	29	**9**	33	**38**
9	8650	1801	210	0	0	1	0	4	5	**1**	**0**	**12**	**10**	10	**10**	**19**	**0**	18	**10**	26	8	**10**	10	**5**	10	10	**40**	26	**10**	10	**26**
10	10661	2011	210	0	1	2	1	5	0	5	**1**	**7**	**11**	5	**5**	**14**	**11**	1	**23**	21	18	**11**	5	**21**	5	21	**35**	13	**41**	5	**28**
11	12882	2221	210	0	0	0	2	0	2	3	2	**2**	**12**	2	**12**	**9**	**7**	12	**3**	2	6	**12**	18	**2**	30	2	**30**	34	**12**	18	**44**
12	15313	2431	210	0	1	1	3	1	4	4	3	**11**	**13**	1	**13**	**4**	**13**	25	**4**	25	1	**13**	17	**18**	13	33	**25**	1	**13**	1	**25**
13	17954	2641	210	0	0	2	4	2	6	8	4	**6**	**14**	2	**8**	**20**	**4**	14	**26**	6	3	**14**	2	**34**	26	34	**20**	2	**44**	2	**20**
14	20805	2851	210	0	1	0	0	3	1	6	5	**1**	**0**	5	**15**	**15**	**5**	5	**15**	1	12	**15**	5	**15**	33	5	**15**	37	**15**	21	**29**
15	23866	3061	210	0	0	1	1	4	3	7	6	10	**1**	10	**16**	**10**	**16**	24	**25**	10	28	**16**	26	**31**	34	26	**10**	18	**16**	10	**3**

16	27137	3271	210	0	1	2	2	5	5	2	7	5	2	1	**11**	**5**	**12**	19	**2**	5	22	**17**	1	**12**	29	17	**5**	33	**2**	17	**40**
17	30618	3481	210	0	0	0	3	0	0	0	8	0	3	10	**0**	**0**	**18**	16	**0**	14	23	**18**	26	**28**	18	18	**0**	38	**18**	42	**42**
18	34309	3691	210	0	1	1	4	1	2	1	9	9	4	5	**1**	**16**	**9**	15	**19**	9	2	**19**	5	**9**	1	29	**37**	33	**19**	37	**9**
19	38210	3901	210	0	0	2	0	2	4	5	0	4	5	2	14	**11**	**10**	16	**5**	18	17	**20**	2	**25**	14	10	**32**	18	**5**	2	**39**
20	42321	4111	210	0	1	0	1	3	6	3	1	13	6	1	3	**6**	**21**	19	**12**	13	10	**21**	17	**6**	21	1	**27**	37	**21**	33	**34**
21	46642	4321	210	0	0	1	2	4	1	4	2	8	7	2	4	**1**	**17**	24	**13**	22	10	**22**	18	**22**	22	2	**22**	2	**22**	34	**43**
22	51173	4531	210	0	1	2	3	5	3	8	3	3	8	5	17	17	**23**	5	**8**	17	17	**23**	5	**3**	17	13	**17**	1	**8**	5	**17**
23	55914	4741	210	0	0	0	4	0	5	6	4	12	9	10	6	12	**14**	14	**24**	26	2	**24**	10	**19**	6	34	**12**	34	**24**	42	**5**
24	60865	4951	210	0	1	1	0	1	0	7	5	7	10	1	7	7	**15**	25	**7**	21	23	**25**	1	**0**	25	25	**7**	13	**25**	1	**7**
25	66026	5161	210	0	0	2	1	2	2	2	6	2	11	10	2	2	**1**	12	**11**	2	22	**26**	10	**16**	2	26	**2**	26	**11**	26	**23**
26	71397	5371	210	0	1	0	2	3	4	0	7	11	12	5	9	18	22	1	**9**	25	28	**27**	5	**32**	9	37	**39**	29	**27**	21	**4**
27	76978	5581	210	0	0	1	3	4	6	1	8	6	13	2	10	13	3	18	**1**	6	12	**28**	18	**13**	10	18	**34**	22	**28**	34	**48**
28	82769	5791	210	0	1	2	4	5	1	5	9	1	14	1	5	8	19	11	14	1	3	**29**	17	**29**	5	9	**29**	5	**14**	17	**8**
29	88770	6001	210	0	0	0	0	0	3	3	0	10	0	2	12	3	20	6	21	10	1	**0**	2	**10**	30	10	**24**	22	**30**	18	**31**
30	94981	6211	210	0	1	1	1	1	5	4	1	5	1	5	13	19	6	3	22	5	6	**1**	5	**26**	13	21	**19**	29	**31**	37	**19**
31	101402	6421	210	0	0	2	2	2	0	8	2	0	2	10	8	14	2	2	17	14	18	2	26	**7**	26	2	**14**	26	**17**	26	**21**
32	108033	6631	210	0	1	0	3	3	2	6	3	9	3	1	15	9	8	3	6	9	8	3	1	**23**	33	33	**9**	13	**33**	33	**37**
33	114874	6841	210	0	0	1	4	4	4	7	4	4	4	10	16	4	24	6	16	18	5	4	26	**4**	34	34	**4**	34	**34**	10	**18**
34	121925	7051	210	0	1	2	0	5	6	2	5	13	5	5	11	20	0	11	20	13	9	5	5	**20**	29	5	**41**	1	**20**	5	**13**
35	129186	7261	210	0	0	0	1	0	1	0	6	8	6	2	0	15	11	18	18	22	20	6	2	**1**	18	26	**36**	2	**36**	18	**22**
36	136657	7471	210	0	1	1	2	1	3	1	7	3	7	1	1	10	7	1	10	17	9	7	17	17	1	17	**31**	37	**37**	1	**45**
37	144338	7681	210	0	0	2	3	2	5	5	8	12	8	2	14	5	13	12	23	26	5	8	18	33	14	18	**26**	18	**23**	2	**33**
38	152229	7891	210	0	1	0	4	3	0	3	9	7	9	5	3	0	4	25	3	21	8	9	5	14	21	29	**21**	33	**39**	21	**35**
39	160330	8101	210	0	0	1	0	4	2	4	0	2	10	10	4	16	5	14	4	2	18	10	10	30	22	10	**16**	38	**40**	10	**2**
40	168641	8311	210	0	1	2	1	5	4	8	1	11	11	1	17	11	16	5	26	25	6	11	1	11	17	1	**11**	33	**26**	17	**32**
41	177162	8521	210	0	0	0	2	0	6	6	2	6	12	10	6	6	12	24	15	6	1	12	10	27	6	2	**6**	18	**42**	42	**27**
42	185893	8731	210	0	1	1	3	1	1	7	3	1	13	5	7	1	18	19	25	1	3	13	5	8	25	13	**1**	37	**43**	37	**36**
43	194834	8941	210	0	0	2	4	2	3	2	4	10	14	2	2	17	9	16	2	10	12	14	18	24	2	34	**38**	2	**29**	2	**10**
44	203985	9151	210	0	1	0	0	3	5	0	5	5	0	1	9	12	10	15	0	5	28	15	17	5	9	25	33	1	**0**	33	**47**
45	213346	9361	210	0	0	1	1	4	0	1	6	0	1	2	10	7	21	16	19	14	22	16	2	21	10	26	28	34	**1**	34	**0**
46	222917	9571	210	0	1	2	2	5	2	5	7	9	2	5	5	2	17	19	5	9	23	17	5	2	5	37	23	13	32	5	**16**
47	232698	9781	210	0	0	0	3	0	4	3	8	4	3	10	12	18	23	24	12	18	2	18	26	18	30	18	18	26	3	42	**46**
48	242689	9991	210	0	1	1	4	1	6	4	9	13	4	1	13	13	14	5	13	13	17	19	1	34	13	9	13	29	4	1	**41**
49	252890	10201	210	0	0	2	0	2	1	8	0	8	5	10	8	8	15	14	8	22	10	20	26	15	26	10	8	22	35	26	**1**

(表九)$105n^2+16n+1$ 可行解為 **1,2,3,5,7,9,10,14,15,18,21,25,27, ……**。

(十)二階等差數列，一般項為 $a_n=105n^2+42n+1$

	數值	d1	d2	粗體爲可行解																													
n				**1**	**2**	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	**25**	26	27	28	29	30
1	148			**0**	**0**	1	0	**3**	4	1	4	4	**8**	5	4	5	8	13	4	12	4	15	8	1	16	10	4	**23**	18	13	8	3	28
2	505	357		0	**1**	1	1	**0**	1	1	1	1	**5**	10	1	11	1	10	9	12	1	11	5	1	21	22	1	**5**	11	19	1	12	25
3	1072	567	210	0	0	1	0	**2**	4	1	0	1	**2**	5	4	6	8	7	0	1	10	8	12	1	16	14	16	**22**	6	19	8	28	22
4	1849	777	210	0	1	1	1	**4**	1	1	1	4	**9**	1	1	3	1	4	9	13	13	6	9	1	1	9	1	**24**	3	13	1	22	19
5	2836	987	210	0	0	1	0	**1**	4	1	4	1	**6**	9	4	2	8	1	4	14	10	5	16	1	20	7	4	**11**	2	1	8	23	16
6	4033	1197	210	0	1	1	1	3	1	1	1	1	**3**	7	1	3	1	13	1	4	1	5	13	1	7	8	1	**8**	3	10	1	2	13
7	5440	1407	210	0	0	1	0	0	4	1	0	4	**0**	6	4	6	8	10	0	0	4	6	0	1	6	12	16	**15**	6	13	8	17	10
8	7057	1617	210	0	1	1	1	2	1	1	1	1	**7**	6	1	11	1	7	1	2	1	8	17	1	17	19	1	**7**	11	10	1	10	7
9	8884	1827	210	0	0	1	0	4	4	1	4	1	**4**	7	4	5	8	4	4	10	10	11	4	1	18	6	4	**9**	18	1	8	10	4
10	10921	2037	210	0	1	1	1	1	1	1	1	4	**1**	9	1	1	1	1	9	7	13	15	1	1	9	19	1	**21**	1	13	1	17	1
11	13168	2247	210	0	0	1	0	3	4	1	0	1	8	1	4	12	8	13	0	10	10	1	8	1	12	12	16	**18**	12	19	8	2	28
12	15625	2457	210	0	1	1	1	0	1	1	1	1	5	5	1	12	1	10	9	2	1	7	5	1	5	8	1	**0**	25	19	1	23	25
13	18292	2667	210	0	0	1	0	2	4	1	4	4	2	10	4	1	8	7	4	0	4	14	12	1	10	7	4	**17**	14	13	8	22	22
14	21169	2877	210	0	1	1	1	4	1	1	1	1	9	5	1	5	1	4	1	4	1	3	9	1	5	9	1	**19**	5	1	1	28	19
15	24256	3087	210	0	0	1	0	1	4	1	0	1	6	1	4	11	8	1	0	14	10	12	16	1	12	14	16	**6**	24	10	8	12	16
16	27553	3297	210	0	1	1	1	3	1	1	1	4	3	9	1	6	1	13	1	13	13	3	13	1	9	22	1	**3**	19	13	1	3	13
17	31060	3507	210	0	0	1	0	0	4	1	4	1	0	7	4	3	8	10	4	1	10	14	0	1	18	10	4	**10**	16	10	8	1	10
18	34777	3717	210	0	1	1	1	2	1	1	1	1	7	6	1	2	1	7	9	12	1	7	17	1	17	1	1	**2**	15	1	1	6	7

19	38704	3927	210	0	0	1	0	4	4	1	0	4	4	6	4	3	8	4	0	12	4	1	4	1	6	18	16	**4**	16	13	8	18	4
20	42841	4137	210	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	7	1	6	1	1	9	1	1	15	1	1	7	15	1	**16**	19	19	1	8	1
21	47188	4347	210	0	0	1	0	3	4	1	4	1	8	9	4	11	8	13	4	13	10	11	8	1	20	15	4	**13**	24	19	8	5	28
22	51745	4557	210	0	1	1	1	0	1	1	1	4	5	1	1	5	1	10	1	14	13	8	5	1	1	18	1	**20**	5	13	1	9	25
23	56512	4767	210	0	0	1	0	2	4	1	0	1	2	5	4	1	8	7	0	4	10	6	12	1	16	1	16	**12**	14	1	8	20	22
24	61489	4977	210	0	1	1	1	4	1	1	1	1	9	10	1	12	1	4	1	0	1	5	9	1	21	10	1	**14**	25	10	1	9	19
25	66676	5187	210	0	0	1	0	1	4	1	4	4	6	5	4	12	8	1	4	2	4	5	16	1	16	22	4	**1**	12	13	8	5	16

(表十)$105n^2+42n+1$ 可行解為 **1,2,5,10,25,50, ……**。

比較：1. (表九)中 3∤(105,16)，所以 3 為可行解。(表十)中 3|(105,42)，所以 3 不為可行解。

2. (表九)中 7∤(105,16)，所以 7 為可行解。 (表十)中 7| (105,42)，所以 7 不為可行解。

(十一)、各種二階等差數列(一般項 an^2+bn+c)的**可行解**整理

<table>
<tr><td>一般項公式</td><td>可行解</td><td></td><td>一般項公式</td><td>可行解</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$3n^2+4n+1$</td><td>1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">$15n^2+5n+1$</td><td>1, 3, 9, 27, ……</td></tr>
<tr><td>可行解為
2×3 的次方。</td><td>可行解為
3 的次方。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$3n^2+6n+1$</td><td>1, 2</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">$35n^2+12n+1$</td><td>1,2,5,7,10,14,25,49,50, ……</td></tr>
<tr><td>可行解為 1,2。</td><td>可行解為
2×5 的次方×7 的次方。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$6n^2+8n+1$</td><td>1, 3, 9, 27, 81, 243,</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">$35n^2+14n+1$</td><td>1,2,5,10,25,50, ……</td></tr>
<tr><td>可行解為 3 的次方。</td><td>可行解為 2×5 的次方。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$6n^2+7n+1$</td><td>1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 16, 18, 24, 27,</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">$105n^2+16n+1$</td><td>1,2,3,5,7,9,10,14,15,18,21,25,27, ……</td></tr>
<tr><td>可行解為
2 的次方×3 的次方。</td><td>可行解為
2×3 的次方×5 的次方×7 的次方。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$15n^2+8n+1$</td><td>1,2,3,5,6,9,10,15,18,25,</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">$105n^2+42n+1$</td><td>1,2,5,10,25,50, ……</td></tr>
<tr><td>可行解為
2×3 的次方×5 的次方。</td><td>可行解為
2×5 的次方。</td></tr>
</table>

1、由上表可知，可行解都是**質因數**或**質因數的次方**(**次方可為 0 次**)。

2、不同的二階等差數列的可行解並不一定相同。

陸、研究結果：

一、對固定一種多角數，可以找出很多組的可行解。但不同多角數之可行解並不相同。

二、各種多角數的**二階差**和**可行解**的關係整理如下表(列出幾個有代表性的多角數)

名稱 公式	**二階差**	可行解
三角數 $\frac{n\times[1n-(-1)]}{2}$	1	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64
	$1=2^0$	可行解=2^a，a=0, 1, 2, 3, …
五角數 $\frac{n\times(3n-1)}{2}$	3	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36
	$3=3^1$	可行解=$2^a\times3^b$，a、b=0,1,2,3,…
六角數 $\frac{n\times(4n-2)}{2}$	4	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64
	$4=2^2$	可行解=2^a，a=0,1,2,3,…
七角數 $\frac{n\times(5n-3)}{2}$	5	1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64
	$5=5^1$	可行解=$2^a\times5^b$，a、b=0,1,2,3,…
八角數 $\frac{n\times(6n-4)}{2}$	6	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 243, 486
	$6=2^1\times3^1$	可行解=$2^a\times3^b$，a=0,1，b=0,1,2,3,…
十二角數 $\frac{n\times(10n-8)}{2}$	10	1, 2, 5, 10, 25, 50, 125, 250, 625
	$10=2^1\times5^1$	可行解=$2^a\times5^b$，a=0,1，b=0,1,2,3,…
107 角數 $\frac{n\times(105n-103)}{2}$	105	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 50, 54, 56, 60, 63, 64, 70, 72, 75, 80, 81, 84, 90, 96, 98, 100, 105, 108, 112, 120, 125, 126, 128
	$105=3^1\times5^1\times7^1$	可行解=$2^a\times3^b\times5^c\times7^d$，a、b、c、d=0,1,2,3,…

可行解和多角數數列的**二階差**關係如下：

(一)若二階差只有一個 2^1，則可行解為 **1** 或 **2**。

(二)若二階差為 2 的次方(次方＞1 或 0)，則可行解為 **2 的次方**。

(三)若二階差為 2 乘奇質因數，則可行解為**奇質因數的次方**或 **2^1×奇質因數的次方**。

(四)若二階差為 2 的次方乘奇質因數，則可行解為 **2 的次方×奇質因數的次方**。

(五)若二階差為奇質因數，則可行解為**奇質因數的次方**或 **2 的次方×奇質因數的次方**。

三、各種二階等差數列(一般項 an^2+bn+c)的**二階差**和**可行解**的關係

一般項公式	二階差	可行解	一般項公式	二階差	可行解
$3n^2+4n+1$	6=2×3	**$2^a\times3^b$，a=0、1，b=0、1、2、……**	**$15n^2+5n+1$**	30 =2×3×5	**3^a，a =0、1、2、……**
$3n^2+6n+1$	6=2×3	**2^a，a=0、1，**	**$35n^2+12n+1$**	70 =2×5×7	**$2^a\times5^b\times7^c$，a=0、1，b、c=0、1、2、……**
$6n^2+8n+1$	12 $=2^2\times3$	**3^b，b=0、1、2、…**	**$35n^2+14n+1$**	70 =2×5×7	**$2^a\times5^b$，a=0、1，b=0、1、2、……**
$6n^2+7n+1$	12 $=2^2\times3$	**$2^a\times3^b$，a、b=0、1、2、…**	**$105n^2+16n+1$**	210 =2×3×5×7	**$2^a\times3^b\times5^c\times7^d$，a=0、1，b、c、d=0、1、2、……**
$15n^2+8n+1$	30 =2×3×5	**$2^a\times3^b\times5^c$，a=0、1 b、c=0、1、2、…**	**$105n^2+42n+1$**	210 =2×3×5×7	**$2^a\times5^b$，a=0、1，b=0、1、2、…**

由上表得知，可行解和數列的**二階差 d2** 有密切的關係，整理如下表

(一)由上面的例子發現

1、$6n^2+7n+1$，其二階差質因數有 2，因為 $2\nmid(6+7)$，所以 2 為可行解。

2、$6n^2+8n+1$，其二階差質因數有 2，因為 $2\mid(6+8)$，所以 2 不為可行解。

所以，若 $2\nmid(a+b)$，則 2 是可行解。

若 $2\mid(a+b)$，則 2 不是可行解。

(二)由上面的例子發現

1、$3n^2+4n+1$，二階差質因數有 3，因為 $3\nmid(3，4)$，所以 3 為可行解。

2、$3n^2+6n+1$，二階差質因數有 3，因為 $3\mid(3，6)$，所以 3 不為可行解。

3、$35n^2+12n+1$，其二階差質因數有 5、7，因為 $5\nmid(35，12)$、$7\nmid(35，12)$，所以 5、7 皆為可行解。

4、$35n^2+14n+1$，其二階差質因數有 5、7，因為 $5\nmid(35，14)$、$7\mid(35，14)$，所以，5 為可行解，但 7 不為可行解。

5、$105n^2+16n+1$，其二階差質因數有 3、5、7，因為 $3\nmid(105，16)$、$5\nmid(105，16)$、$7\nmid(105，16)$，所以 3、5、7 皆為可行解。

6、$105n^2+16n+1$，二階差質因數有 3、5、7，且 3、5、7 為可行解，則 3、5、7 的次方也為可行解。

所以，若二階差的奇質因數不整除(a，b)，則此質因數和其次方是可行解。

若二階差的奇質因數整除(a，b)，則此質因數和其次方皆不是可行解。

(三)由上面的例子發現

1、$3n^2+4n+1$，其二階差質因數有 2，因為 $2\nmid(3+4)$，所以 2 為可行解，但是 $2\mid 4$，所以，$2^k(k>1)$不是可行解。

2、$6n^2+7n+1$，其二階差質因數有 2，因為 $2\nmid(6+7)$，所以 2 為可行解，但是 $2\nmid 7$，所以，$2^k(k>1)$是可行解。

(四)二階差的質因數是否為可行解的質因數的**判別方法**：

1、質因數 2 的判別法：若 $2\nmid(a+b)$，則 2 就是可行解。

2、奇質因數的判別法：若奇質因數不為 a、b 的公因數，則奇質因數就是可行解。

(五)若二階差的質因數 2 是可行解，則 2^k 是否為可行解的**判別方法**：

1、若 $2\nmid b$，則 $2^k(k>1)$是可行解。

2、若 $2\mid b$，則 $2^k(k>1)$不是可行解。

(六)若二階差的奇質因數是可行解，則奇質因數的次方是可行解。

柒、討論：

一、各種多角數可行解的證明

(一)五角數[$\frac{n\times(3n-1)}{2}$]的二階差為 3，則可行解為 **3 的次方**或 **2 的次方×3 的次方**。

1、證明五角數模 2 的餘數為 0、1，<u>所以 2 是可行解</u>。

(1)設 n=4k，k 為正整數，則 $\frac{n\times(3n-1)}{2}=\frac{4k\times(3\times4k-1)}{2}=2(12k^2-k)\equiv0 \mod 2$

(2)設 n=4k+1，則 $\frac{n\times(3n-1)}{2}=\frac{(4k+1)\times[3\times(4k+1)-1]}{2}=2(12k^2+5k)+1\equiv1 \mod 2$

2、證明五角數模 3 的餘數為 0、1、2，<u>所以 3 是可行解</u>。

(1)設 n=6k，k 為正整數，則 $\frac{n\times(3n-1)}{2}=\frac{6k\times(3\times6k-1)}{2}=3(18k^2-1k)\equiv0 \mod 3$

(2)設 n=6k+1，則 $\frac{(6k+1)\times[3\times(6k+1)-1]}{2}=3(18k^2+5k)+1\equiv1 \mod 3$

(3)設 n=6k+2，則 $\frac{(6k+2)\times[3\times(6k+2)-1]}{2}=3(18k^2+11k)+2\equiv2 \mod 3$

3、證明五角數模 2×3 的餘數為 0、1、2、3、4、5，<u>所以 2×3 是可行解</u>。

(1)設 n=12k，k 為正整數，則 $\frac{n\times(3n-1)}{2}=\frac{12k\times(3\times12k-1)}{2}=6k(36k-1)\equiv0 \mod 6$

(2)設 n=12k+1，則 $\frac{(12k+1)\times[3\times(12k+1)-1]}{2}=216k^2+30k+1\equiv1 \mod 6$

(3)設 n=12k+2，則 $\frac{(12k+2)\times[3\times(12k+2)-1]}{2}=216k^2+66k+5\equiv5 \mod 6$

(4)設 n=12k+4，則 $\frac{(12k+4)\times[3\times(12k+4)-1]}{2}=216k^2+138k+22\equiv4 \mod 6$

(5)設 n=12k+6，則 $\frac{(12k+6)\times[3\times(12k+6)-1]}{2}=216k^2+210k+51\equiv3 \mod 6$

(6)設 n=12k+8，則 $\frac{(12k+8)\times[3\times(12k+8)-1]}{2}=216k^2+282k+92\equiv2 \mod 6$

由上面的證明可以得知，五角數的可行解為 **3 的次方**或 **2 的次方×3 的次方**。

(二)八角數[通式＝$\frac{n\times(6n-4)}{2}$]的二階差為 6，6＝2×3，則可行解為 **3 的次方**或 **2^1×3 的次方**。

1、證明 $3n^2-2n$(n 為正整數)，模 2 的餘數為 0、1，<u>所以 2 是可行解</u>。

(1) 設 $n=2k, k$ 爲正整數, 則 $3n^2-2n=3\times(2k)^2-2\times2k=2(6k^2-2k)\equiv0 \mod 2$

(2) 設 $n=2k+1$, 則 $3n^2-2n=3\times(2k+1)^2-2\times(2k+1)=2(6k^2+4k)+1\equiv1 \mod 2$

2、證明 $3n^2-2n$(n 為正整數)，模 3 的餘數為 0、1、2，<u>所以 3 是可行解</u>。

(1) 設 $n=3k, k$ 爲正整數, 則 $3n^2-2n=3\times(3k)^2-2\times3k=3(9k^2-2k)\equiv0 \mod 3$

(2) 設 $n=3k+1$, 則 $3n^2-2n=3\times(3k+1)^2-2\times(3k+1)=3(9k^2+4k)+1\equiv1 \mod 3$

(3) 設 $n=3k+2$, 則 $3n^2-2n=3\times(3k+2)^2-2\times(3k+2)=3(9k^2+10k+2)+2\equiv2 \mod 3$

3、證明 $3n^2-2n$(n 為正整數)，模 2^2 的餘數為 0、1，<u>所以 2^2 不是可行解</u>。

(1) 設 $n=4k, k$ 爲正整數, 則 $3n^2-2n=3\times(4k)^2-2\times4k=4(12k^2-2k)\equiv0 \mod 4$

(2) 設 $n=4k+1$, 則 $3\times(4k+1)^2-2\times(4k+1)=4(12k^2+4k)+1\equiv1 \mod 4$

(3) 設 $n=4k+2$, 則 $3\times(4k+2)^2-2\times(4k+2)=4(12k^2+10k+2)\equiv0 \mod 4$

(4) 設 $n=4k+3$, 則 $3\times(4k+3)^2-2\times(4k+3)=4(12k^2+16k+5)+1\equiv1 \mod 4$

4、證明$3n^2-2n$(n 為正整數)，模 3^2的餘數為 0、1、2、3、4、5、6、7、8，

所以 3^2是可行解。

(1)設 n=9k，k 為正整數，則 $3n^2-2n=3\times(9k)^2-2\times 9k=9(27k^2-2k)\equiv 0 \mod 9$

(2)設 n=9k+1，則$3\times(9k+1)^2-2\times(9k+1)=9(27k^2+4k)+1\equiv 1 \mod 9$

(3)設 n=9k+2，則$3\times(9k+2)^2-2\times(9k+2)=9(27k^2+10k)+8\equiv 8 \mod 9$

(4)設 n=9k+3，則$3\times(9k+3)^2-2\times(9k+3)=9(27k^2+16k+2)+3\equiv 3 \mod 9$

(5)設 n=9k+4，則$3\times(9k+4)^2-2\times(9k+4)=9(27k^2+22k+4)+4\equiv 4 \mod 9$

(6)設 n=9k+5，則$3\times(9k+5)^2-2\times(9k+5)=9(27k^2+28k+7)+2\equiv 2 \mod 9$

(7)設 n=9k+6，則$3\times(9k+6)^2-2\times(9k+6)=9(27k^2+34k+10)+6\equiv 6 \mod 9$

(8)設 n=9k+7，則$3\times(9k+7)^2-2\times(9k+7)=9(27k^2+40k+14)+7\equiv 7 \mod 9$

(9)設 n=9k+8，則$3\times(9k+8)^2-2\times(9k+8)=9(27k^2+46k+19)+5\equiv 5 \mod 9$

※由上面的證明可以得知，八角數的可行解為 **3 的次方**或 **$2^1\times 3$ 的次方**。

(三)十七角數[通式＝$\frac{n\times(15n-13)}{2}$]的二階差為 15，15＝3×5，則可行解為 **2 的次方×3 的次方×5 的次方**。

證明$\frac{n\times(15n-13)}{2}$ (n 為正整數)，模 15 的餘數為 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14，所以 15 是可行解。

(1)設 n=30k，k 為正整數，則$\frac{n\times(15n-13)}{2}=15k\times(450k-13)\equiv 0 \mod 15$

(2)設 n=30k+1，則$\frac{(30k+1)\times[15(30k+1)-13]}{2}=6750k^2+255k+1\equiv 1 \mod 15$

(3)設 n=30k+2，則$\frac{(30k+2)\times[15(30k+2)-13]}{2}=6750k^2+705k+17\equiv 2 \mod 15$

(4)設 n=30k+3，則$\frac{(30k+3)\times[15(30k+3)-13]}{2}=6750k^2+1155k+48\equiv 3 \mod 15$

(5)設 n=30k+4，則$\frac{(30k+4)\times[15(30k+4)-13]}{2}=6750k^2+1605k+94\equiv 4 \mod 15$

(6)設 n=30k+5，則$\frac{(30k+5)\times[15(30k+5)-13]}{2}=6750k^2+2055k+155\equiv 5 \mod 15$

(7)設 n=30k+6，則$\frac{(30k+6)\times[15(30k+6)-13]}{2}=6750k^2+2505k+231\equiv 6 \mod 15$

(8)設 n=30k+7，則$\frac{(30k+7)\times[15(30k+7)-13]}{2}=6750k^2+2955k+322\equiv 7 \mod 15$

(9)設 n=30k+8，則$\frac{(30k+8)\times[15(30k+8)-13]}{2}=6750k^2+3405k+428\equiv 8 \mod 15$

(10)設 n=30k+9，則$\frac{(30k+9)\times[15(30k+9)-13]}{2}=6750k^2+3855k+549\equiv 9 \mod 15$

(11)設 n=30k+10，則$\frac{(30k+10)\times[15(30k+10)-13]}{2}=6750k^2+4305k+685\equiv 10 \mod 15$

(12)設 n=30k+11，則$\frac{(30k+11)\times[15(30k+11)-13]}{2}=6750k^2+4755k+836\equiv 11 \mod 15$

(13)設 n=30k+12，則$\frac{(30k+12)\times[15(30k+12)-13]}{2}=6750k^2+5205k+1002\equiv 12 \mod 15$

(14)設 n=30k+13，則 $\dfrac{(30k+13)\times[15(30k+13)-13]}{2}=6750\text{k}^2+5655\text{k}+1183\equiv 13 \mod 15$

(15)設 n=30k+14，則 $\dfrac{(30k+14)\times[15(30k+14)-13]}{2}=6750\text{k}^2+6105\text{k}+1379\equiv 14 \mod 15$

由上面的證明可以得知，十七角數的可行解為 **2 的次方×3 的次方×5 的次方**。

二、一般二階等差數列的可行解證明：

設二階等差數列$\{a_n\}$的一般項為 an^2+bn+c，二階差為 d2，

設 d2 的標準分解式為 $p_1^{k1}\times p_2^{k2}\times\ldots\times p_s^{ks}$。

(一)若 $2\nmid(a+b)$，則 2 就是可行解。

證明：設 2 是 d2 的質因數，

若 $2\nmid(a+b)$，則

1、設 n=2k(k 為正整數)，

則 $an^2+bn+c=a(2k)^2+b(2k)+c=4ak^2+2bk+c\equiv c \mod 2$

2、設 n=2k+1(k 為正整數)，

則 $an^2+bn+c=a(2k+1)^2+b(2k+1)+c$

$=4ak^2+4ak+a+2bk+b+c\equiv a+b+c \mod 2$

因為 $2\nmid(a+b)$，所以 a+b+c mod 2 的餘數和 c mod 2 的餘數必不相同，

即是 $an^2+bn+c \mod 2$ 有兩個不同的餘數，

所以，若 $2\nmid(a+b)$，則 2 就是可行解。

(二)若 2 為可行解且 $2\nmid b$，則 2^k(k＞1,正整數)也是可行解。

證明：1、先證明 k=2 時會成立。

令 $x_1\not\equiv x_2 \mod 2^2$，設$ax_1^2+bx_1+c\equiv ax_2^2+bx_2+c \mod 2^2$，

因為 $2\mid 2^2$，所以$ax_1^2+bx_1+c\equiv ax_2^2+bx_2+c \mod 2$，

又 2 為可行解，所以，$x_1\equiv x_2 \mod 2$，

令 $x_1=x_2+2t$，t 為正整數，

$ax_1^2+bx_1+c=a(x_2+2t)^2+b(x_2+2t)+c=ax_2^2+4ax_2t+4at^2+bx_2+2bt+c$

則$(ax_1^2+bx_1+c)-(ax_2^2+bx_2+c)=4ax_2t+4at^2+2bt\equiv 2bt \mod 2^2$

又 $2\nmid b$，所以，$2bt\not\equiv 0 \mod 2^2$，

即是，$ax_1^2+bx_1+c\not\equiv ax_2^2+bx_2+c \mod 2^2$。

故，若 $x_1\not\equiv x_2 \mod 2^2$，則 $ax_1^2+bx_1+c\not\equiv ax_2^2+bx_2+c \mod 2^2$。

所以，2^2 為可行解。

2、若 2^{k-1} 為可行解，

令 $x_1\not\equiv x_2 \mod 2^k$， 設$ax_1^2+bx_1+c\equiv ax_2^2+bx_2+c \mod 2^k$，

因為 $2^{k-1}\mid 2^k$，所以$ax_1^2+bx_1+c\equiv ax_2^2+bx_2+c \mod 2^{k-1}$

又 2^{k-1} 為可行解，所以，$x_1\equiv x_2 \mod 2^{k-1}$，

令 $x_1=x_2+2^{k-1}t$，t 為正整數，

$ax_1^2+bx_1+c=a(x_2+2^{k-1}t)^2+b(x_2+2^{k-1}t)+c=ax_2^2+2^kax_2t+2^{2k-2}at^2+bx_2+2^{k-1}bt+c$

則$(ax_1^2+bx_1+c)-(ax_2^2+bx_2+c)=2^kax_2t+2^{2k-2}at^2+2^{k-1}bt\equiv 2^{k-1}bt \mod 2^k$

又 $2\nmid b$，所以，$2^{k-1}bt\not\equiv 0 \mod 2^k$，

即是，$ax_1^2+bx_1+c\not\equiv ax_2^2+bx_2+c \mod 2^k$。

故，若 $x_1\not\equiv x_2 \mod 2^k$，則 $ax_1^2+bx_1+c\not\equiv ax_2^2+bx_2+c \mod 2^k$。

所以，2^k 為可行解。

3、由數學歸納法可得知，若 2 為可行解且 $2\nmid b$，則 2^k($k>1$,正整數)為可行解。

(三)若 2 為可行解且 $2\mid b$，則 2^k($k>1$,正整數)不是可行解。

證明：1、先證明 k=2 時會成立。

將正整數模 4 分為 4 部分，以{4t，4t+1，4t+2，4t+3}表示，

因為 $2\mid b$，所以，設 $b=2b_1$

當 n=4t 時，$an^2+bn+c=a(4t)^2+b(4t)+c=16at^2+4bt+c\equiv c \mod 2^2$

當 n=4t+2 時，

$$an^2+bn+c=a(4t+2)^2+b(4t+2)+c=4a(2t+1)^2+2b(2t+1)+c$$

$$=4a(2t+1)^2+4b_1(2t+1)+c\equiv c \mod 2^2$$

即是，n=4t 或 n=4t+2 時，代入 an^2+bn+c 所得之值模 4 之後相等，

所以，2^2 不是可行解。

2、再證明 k＝3 時，

設 2^3 為可行解，則當 n 以{8t，8t+1，…，8t+7}分別代入 an^2+bn+c 後，再對 2^3 取餘數，必可得到{0，1，2，3，4，5，6，7}八個不同的餘數，

但因為 $2^2\mid 2^3$，所以，{0，1，2，3，4，5，6，7}八個不同的餘數，再對 2^2 取餘數可得到{0，1，2，3}，即是模 2^2 可以得到 4 個不同餘數，所以，2^2 為可行解。與上面的結果矛盾，故 2^3 不是可行解。

3、若 2^{k-1} 不為可行解，

設 2^k 是可行解，則當 n 以{2^kt，2^kt+1，2^kt+2，…，2^kt+2^k-1}分別代入 an^2+bn+c 後，再對 2^k 取餘數，必可得到{0，1，2，…，2^k-1}等 2^k 個不同的餘數，但因為 $2^{k-1}\mid 2^k$，所以，{0，1，2，…，2^k-1}等 2^k 個不同的餘數，再對 2^{k-1} 取餘數可得到{0，1，2，…，$2^{k-1}-1$}等 2^{k-1} 個不同的餘數，所以，2^{k-1} 為可行解。與已知條件矛盾，故 2^k 不是可行解。

4、由數學歸納法可得知，

若 2 為可行解且 $2\mid b$，則 2^k($k>1$,正整數)不是可行解。

(四)若 2 不為可行解，則 2^k 不是可行解。

證明：1、先證明 k＝2 時，

設 2^2 為可行解，

則當 n 以{4t，4t+1，4t+2，4t+3}分別代入 an^2+bn+c 後，再對 4 取餘數必可得到{0，1，2，3}四個不同的餘數，

但因為 $2\mid 2^2$，所以，{0，1，2，3}四個不同的餘數，再對 2 取餘數可得到{0，1}，即是模 2 可以得到 2 個不同餘數，所以，2 為可行解。

與已知條件矛盾，故 2^2 不是可行解。

2、若 2^{k-1} 不是可行解，

設 2^k 是可行解，

則當 n 以{2^kt，2^kt+1，2^kt+2，…，2^kt+2^k-1}分別代入 an^2+bn+c 後，再對 2^k 取餘數，必可得到{0，1，2，…，2^k-1}等 2^k 個不同的餘數，

但因為 $2^{k-1}\mid 2^k$，所以，{0，1，2，…，2^k-1}等 2^k 個不同的餘數，

再對 2^{k-1} 取餘數可得到{0，1，2，…，$2^{k-1}-1$}等 2^{k-1} 個不同的餘數，

所以，2^{k-1} 為可行解。與已知條件矛盾，故 2^k 不是可行解。

3、由數學歸納法可得知，

若 2 不為可行解，則 2^k($k>1$,正整數)不是可行解。

(五)若奇質因數不整除 a、b 的公因數，則此奇質因數就是可行解。

證明：設 p_i 是二階差 2a 的奇質因數，則 $p_i | a$，又 $p_i \nmid (a，b)$，所以 $p_i \nmid b$。

設 $a=p_i \times a_i$，$b=p_i \times b_i+r_2 \quad 0<r_2<p_i$，

令 $x_1 T x_2 \quad \mod p_i$ ，

設 $x_1 - x_2 = p_i \times t_i + r_i \quad 0 < r_i < p_i$

$ax_1^2 + bx_1 + c = p_i a_i x_1^2 + (p_i b_i + r_2)x_1 + c = p_i a_i x_1^2 + p_i b_i x_1 + r_2 x_1 + c$

$ax_2^2 + bx_2 + c = p_i a_i x_2^2 + (p_i b_i + r_2)x_2 + c = p_i a_i x_2^2 + p_i b_i x_2 + r_2 x_2 + c$

$(ax_1^2 + bx_1 + c) - (ax_2^2 + bx_2 + c) = p_i a_i (x_1^2 - x_2^2) + p_i b_i (x_1 - x_2) + r_2 (x_1 - x_2)$

$= p_i a_i (x_1^2 - x_2^2) + p_i b_i (x_1 - x_2) + r_2 \times p_i \times t_i + r_2 \times r_i \equiv r_2 \times r_i \quad \mod p_i$

$T 0 \quad \mod p_i$

所以，$(ax_1^2+bx_1+c) T (ax_2^2+bx_2+c) \quad \mod p_i$ ，故 p_i 是可行解。

(六)若奇質因數為可行解，則奇質因數的次方(次方＞1)也是可行解。

證明：若 $p_i \neq 2$ 是 d2 的質因數，且 p_i 是可行解，則 $p_i \nmid (a，b)$。

設 $a=p_i a_1$， $b=p_i b_1+b_r$，$c=p_i c_1+c_r$，

檢驗 p_i^k(k＞1,正整數)是否為可行解，

1、先證明 k=2 時會成立。

令 $x_1 T x_2 \quad \mod p_i^2$，

設 $ax_1^2 + bx_1 + c \equiv ax_2^2 + bx_2 + c \quad \mod p_i^2$，

因為 $p_i | p_i^2$，所以 $ax_1^2 + bx_1 + c \equiv ax_2^2 + bx_2 + c \quad \mod p_i$ ，

又 p_i 為可行解，所以，$x_1 \equiv x_2 \mod p_i$ ，

令 $x_1 = x_2 + p_i t$，t 為正整數，

$ax_1^2 + bx_1 + c = a(x_2 + p_i t)^2 + b(x_2 + p_i t) + c = ax_2^2 + 2ax_2 p_i t + ap_i^2 t^2 + bx_2 + bp_i t + c$

則 $(ax_1^2 + bx_1 + c) - (ax_2^2 + bx_2 + c) = 2ax_2 p_i t + ap_i^2 t^2 + bp_i t$

$= 2p_i a_1 x_2 p_i t + p_i a_1 p_i^2 t^2 + (b_1 p_i + b_r) p_i t$

$= 2p_i a_1 x_2 p_i t + p_i a_1 p_i^2 t^2 + b_1 p_i^2 t + b_r p_i t \equiv b_r p_i t \quad \mod p_i^2$

又 $b_r \nmid p_i$，所以，$b_r p_i t T 0 \quad \mod p_i^2$，

即是，$ax_1^2+bx_1+c T ax_2^2+bx_2+c \quad \mod p_i^2$。

故，若 $x_1 T x_2 \quad \mod p_i^2$，則 $ax_1^2+bx_1+c T ax_2^2+bx_2+c \quad \mod p_i^2$。

所以，p_i^2 為可行解。

2、若 p_i^{k-1} 為可行解，

令 $x_1 T x_2 \quad \mod p_i^k$，設 $ax_1^2 + bx_1 + c \equiv ax_2^2 + bx_2 + c \quad \mod p_i^k$

因為 $p_i^{k-1} | p_i^k$，所以 $ax_1^2 + bx_1 + c \equiv ax_2^2 + bx_2 + c \quad \mod p_i^{k-1}$，

又 p_i^{k-1} 為可行解，所以，$x_1 \equiv x_2 \mod p_i^{k-1}$，

令 $x_1 = x_2 + p_i^{k-1} t$，t 為正整數，

$ax_1^2 + bx_1 + c = a(x_2 + p_i^{k-1} t)^2 + b(x_2 + p_i^{k-1} t) + c$

$= ax_2^2 + 2ax_2 p_i^{k-1} t + ap_i^{2k-2} t^2 + bx_2 + bp_i^{k-1} t + c$

則 $(ax_1^2 + bx_1 + c) - (ax_2^2 + bx_2 + c) = 2ax_2 p_i^{k-1} t + ap_i^{2k-2} t^2 + bp_i^{k-1} t$

$= 2p_i a_1 x_2 p_i^{k-1} t + p_i a_1 p_i^{2k-2} t^2 + (b_1 p_i + b_r) p_i^{k-1} t$

$= 2p_i a_1 x_2 p_i^{k-1} t + p_i a_1 p_i^{2k-2} t^2 + b_1 p_i p_i^{k-1} t + b_r p_i^{k-1} t$

$\equiv b_r p_i^{k-1} t \quad \mod p_i^k$

又 $b_r \nmid p_i$，所以，$b_r p_i^{k-1} t \not\equiv 0 \mod p_i^k$，

即是，$ax_1^2+bx_1+c \not\equiv ax_2^2+bx_2+c \mod p_i^k$。

故，若 $x_1 \not\equiv x_2 \mod p_i^k$，則 $ax_1^2+bx_1+c \not\equiv ax_2^2+bx_2+c \mod p_i^k$。

所以，p_i^k 為可行解。

3、由數學歸納法可得知，

若 p_i 為可行解且 $p_i \nmid (a, b)$，則 p_i^k($k>1$,正整數)為可行解。

(七)若奇質因數不是可行解，則此質因數的次方也不是可行解。

證明：若 p_i 是 d2 的奇質因數，且 p_i 不是可行解，則 $p_i \mid (a，b)$。

設 $a=p_i a_1$，$b=p_i b_1$，$c=p_i c_1+c_r$，

檢驗 p_i^k($k>1$,正整數)是否為可行解，

若 p_i^k 為可行解，則當 n 以$\{p_i^k t，p_i^k t+1，p_i^k t+2，\ldots，p_i^k t+p_i^k-1\}$分別代入 an^2+bn+c 後，必可得到$\{0，1，2，\ldots，p_i^k-1\}$等 p_i^k 個不同的餘數。

1、當 $n= p_i^k t$ 時，

$$an^2+bn+c=a(p_i^k t)^2+b(p_i^k t)+c=ap_i^{2k}t^2+bp_i^k t+c\equiv c \mod p_i^k$$

2、當 $n= p_i^k t+p_i^{k-1}$ 時，

$$\begin{aligned}an^2+bn+c&=a(p_i^k t+p_i^{k-1})^2+b(p_i^k t+p_i^{k-1})+c=a(p_i^{k-1})^2(p_i t+1)^2+bp_i^{k-1}(p_i t+1)+c\\&=p_i a_1(p_i^{k-1})^2(p_i t+1)^2+p_i b_1 p_i^{k-1}(p_i t+1)+c\\&=a_1 p_i^k p_i^{k-1}(p_i t+1)^2+b_1 p_i^k(p_i t+1)+c\equiv c \mod p_i^k\end{aligned}$$

因為 $p_i^k t$、$p_i^k t+p_i^{k-1}$ 都在$\{p_i^k t，p_i^k t+1，p_i^k t+2，\ldots，p_i^k t+p_i^k-1\}$中，

但兩個代入 an^2+bn+c 後，對 p_i^k 取餘數卻相同，

所以，p_i^k($k>1$,正整數)不是可行解。

捌、結論

一、各種多角數(m 角數通式：$\frac{n\times[(m-2)n-(m-4)]}{2}$，n≧1)的可行解整理：由二階差的型式，可以得到可行解的型式。

(一)若多角數數列的二階差為 2^k(k 為正整數)，

則：1、若 k＝1，則可行解為 1、2。如：四角數(二階差為 2)。

2、若 k＞1 或 k=0，則可行解為 2^a(a 為 0 或正整數)。如：十角數(二階差為 8)。

(二)若多角數數列的二階差為 $2^1\times p_1^{k1}\times p_2^{k2}\times\ldots\times p_s^{ks}$,其中$p_1,p_2,\ldots,p_s$為不等於 2 的質數，則可行解為 $2^a\times p_1^{a1}\times p_2^{a2}\times\cdots\times p_s^{as},(a=0,1,a1,\cdots,as爲0或正整數)$ 。

如：八角數(二階差為 6)，十二角數(二階差為 10)，……。

(三)若多角數數列的二階差為 $2^k\times p_1^{k1}\times p_2^{k2}\times\ldots\times p_s^{ks}$,其中$k>1,p_1,p_2,\ldots,p_s$為不等於 2 的質數，則可行解為 $2^a\times p_1^{a1}\times p_2^{a2}\times\cdots\times p_s^{as},(a,a1,\cdots,as爲0或正整數)$ 。

如：十四角數(二階差為 12)，二十二角數(二階差為 20)，二十六角數(二階差為 24)。

(四)若多角數數列的二階差為 $p_1^{k1}\times p_2^{k2}\times\ldots\times p_s^{ks}$,其中$p_1,p_2,\ldots,p_s$為不等於 2 的質數，則可行解行數為 $2^a\times p_1^{a1}\times p_2^{a2}\times\cdots\times p_s^{as},(a,a1,\cdots,as爲0或正整數)$ 。

如：五角數(二階差為 3)，七角數(二階差為 5)，九角數(二階差為 7)，十七角數(二階差為 15)，107 角數(二階差為 105)，……。

二、二階等差數列(通式：an^2+bn+c，n≧1 正整數)的可行解整理：由二階差的型式，可以得到可行解的型式。

設二階等差數列二階差 d2=$p_1^{k1}\times p_2^{k2}\times\ldots\times p_s^{ks}$,其中$p_1,p_2,\ldots,p_s$為相異質數。

(一)若 2|(a+b)，則可行解為 p_i^k連乘積，其中 $p_i\in\{p_1,p_2,\cdots,p_s\}$且 $p_i\nmid(a,b)$，k 為 0 或正整數。

(二)若 2∤(a+b)且 2|b，則可行解為 $2^a\times p_i^k$連乘積，其中 $p_i\in\{p_1,p_2,\cdots,p_s\}$且 $p_i\nmid(a,b)$，a＝0、1，k 為 0 或正整數。

(三)若 2∤(a+b)且 2∤b，則可行解為 $2^a\times p_i^k$連乘積，其中 $p_i\in\{p_1,p_2,\cdots,p_s\}$且 $p_i\nmid(a,b)$，a、k 為 0 或正整數。

玖、參考資料

資料出處	頁數	作者	出版社
美國 AMC8 數學測驗	44		博凱出版社
高中基礎數學第一冊	124~134	柳賢、左太政	翰林出版社
初等代數研究	213~215,288~300	左銓如、季素月、朱家生、陳鼎	九章出版社
置換多項式及其應用	6,7,8,9	孫琦、萬大慶	九章出版社
數學小魔女	63~135	Sarah Flannery 著 葉偉文 譯	天下出版社
參考網站：昌爸工作坊 http://www.mathland.idv.tw/fun/squarenumber.htm			
參考網站：http://www.cbe21.com/subject/maths/html/040401/2002_09/20020908_1791.html			

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

國中組 數學科

第三名

030424
方格遊戲的探討

臺北縣立永和國民中學

評語：
考慮 an^2+sn+c 是否是一個 complete system of residues modulo m 的問題，對某些特殊的係數作了完整的分析。論述清楚且條理分明，活用歸納法及餘數的概念處理問題，分析問題的手法十分的適切，是很不錯的作品。