中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

---

# 國中組 數學科

# 第一名

030421
完美正方形

臺北市立敦化國民中學

作者姓名：
國二 林怡君 國二 葉姝昀 國二 劉欣瑜

傅淑婷

# 中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
# 作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：完美正方形

關 鍵 詞：巧分格紙、完美正方形

編　號：

# 完美正方形

## 壹、　摘要

「完美正方形」是指在一正方形內切割出大小都相異的小正方形。而我們的研究，則放寬條件，允許同樣大小的正方形不超過三個。

我們先估算出正方形中可切割的最大正方形邊長範圍，再以方格紙手畫的方式找出邊長１至 25 的解，在過程中，我們發現可用放大的方式解決邊長爲合數的正方形。

因此我們將重點放在邊長爲質數的正方形，我們將正方形分割成兩個連續整數邊長的正方形，則剩下少一單位的缺角正方形區域。我們探討缺角正方形區域的解，再討論分析回原來的正方形。最後解出了邊長 1 至 100 中全部有解的正方形。

對於更大邊長的正方形，我們的方法也可行。所以我們以流程圖來表示解決問題的過程，並用電腦試算邊長 1 至 1000 的完美正方形。

## 貳、 研究動機

在暑假專書研讀：名人趣題妙解 書中，我們看到了塔爾塔利亞的巧分格紙，覺得很感興趣，所以我們將完美正方形與巧分格紙兩個融合，當作我們科展的題目。

## 參、 研究目的

「完美正方形」是指，在一正方形內切割成不同大小、邊長為整數的正方形，且這些切割出的正方形，均不能全等，這個主題在文獻上有不錯的研究成果。而我們的研究，則放寬條件，允許每一種同樣大小的正方形不超過三個，希望可以探討邊長 1～100 中哪些正方形有解、哪些正方形無解？如果有解如何切割？

## 肆、 文獻探討

1926 年，蘇聯數學家魯金對“完美正方形”的存在提出了猜想。到 1938 年，他們終於找到了一個由 63 個大小不同的正方形組成的大正方形，人們稱它為 63 階的完美正方形。次年有人給出了一個 39 階的完美正方形。1964 年，塔特的學生，滑鐵盧大學的威爾遜博士找到了一個 25 階的完美正方形。1948 年，威爾科克斯提出了一個 24 階的完美正方形，在往後的 30 年中，人們一度以為 24 就是完美正方形的最小階。1978 年，荷蘭 特溫特技術大學的杜依維斯蒂尤，用大型電子電腦算出了一個 21 階的完美正方形。這是完美正方形的最終目標了。因為魯金曾證明，小於 21 階的完美正方形是不存在的。

魯金當時在研究此問題時發現：一塊邊長為 13 的正方形最少可以裁出 6 種不同規格的小正方形，且每種正方塊個數不超過三塊。但是這種裁法﹝允許相同規格的小正方數不超過三塊﹞在其他正方形邊長的結果如何，我們在文獻上並沒有找到資料，於是我們開始研究，試試看能否找出所有解？

## 伍、 研究過程

一、 我們先估計完美正方形中最大正方形邊長的上下界：

我們在手畫的過程中，習慣先切割一個大正方形，再在剩下的區域中分割，但我們常常不知道要先放多大的正方形，所以爲了增加求解速度，我們用數學式子研究邊長 n 的正方形中，所能切割的最大正方形邊長範圍。

設 n 爲正方形邊長， x 爲正方形內切割的最大正方形邊長

先找 x 的上界：

因爲每一種正方形不超過三個，所以當最大正方形排入後，所剩的區域最多僅能排下邊長 1、2、3……(n－x)的所有正方形各三個，我們可以列式如下：

$$n^2 - x^2 \le 3\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-x)^2\right]$$

$$(n+x)(n-x) \le \frac{3(n-x)(n-x+1)(2n-2x+1)}{6}$$

$$2(n+x) \le (n-x+1)(2n-2x+1)$$

$$2n + 2x \le 2n^2 - 4xn + 2x^2 + 3n - 3x + 1$$

$$0 \le 2n^2 - 4xn + 2x^2 + n - 5x + 1$$

$$0 \le 2x^2 - (4n+5)x + 2n^2 + n + 1$$

$$0 \le \left(x - \frac{4n+5+\sqrt{(4n+5)^2 - 4\times 2(2n^2+n+1))}}{4}\right)\times$$

$$\left(x - \frac{4n+5-\sqrt{(4n+5)^2-4\times 2(2n^2+n+1)}}{4}\right)$$

$$0 \le \left(x - \frac{4n+5+\sqrt{32n+17}}{4}\right)\left(x - \frac{4n+5-\sqrt{32n+17}}{4}\right)$$

$$\to\ x \ge \frac{4n+5+\sqrt{32n+17}}{4} \qquad \text{——不合〔}\Theta\ x \ge n\text{〕}$$

$$\to\ x \le \frac{4n+5-\sqrt{32n+17}}{4}$$

再找 x 的下界：

$$3\left[x^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2\right] \ge n^2$$

$$3\times\frac{x(x+1)(2x+1)}{6} \ge n^2$$

$$2x^3 + 3x^2 + x \ge 2n^2$$

這個式子，我們的能力無法求解，只好尋求電腦幫忙。

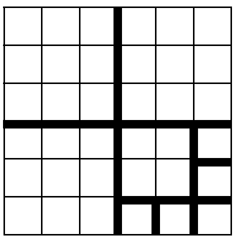
我們以 Mathematica 這個軟體求出 x 的範圍如下：

| n | x 的範圍 | x 的可能解 | n | x 的範圍 | x 的可能解 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.58≦x≦0.5 | 無整數解 | 2 | 1.14≦x≦1 | 無整數解 |
| 3 | 1.62≦x≦1.59 | 無整數解 | 4 | 2.05≦x≦2.24 | 無整數解 |
| 5 | 2.45≦x≦2.92 | 無整數解 | 6 | 2.83≦x≦3.64 | 3 |
| 7 | 3.18≦x≦4.37 | 4 | 8 | 3.52≦x≦5.12 | 4、5 |
| 9 | 3.84≦x≦5.88 | 4、5 | 10 | 4.16≦x≦6.66 | 5、6 |
| 11 | 4.46≦x≦7.45 | 5、6、7 | 12 | 4.76≦x≦8.24 | 5、6、7、8 |
| 13 | 5.04≦x≦9.05 | 6、7、8、9 | 14 | 5.32≦x≦9.86 | 6、7、8、9 |
| 15 | 5.60≦x≦10.68 | 6~10 | 16 | 5.86≦x≦11.50 | 6~11 |
| 17 | 6.12≦x≦12.33 | 7~12 | 18 | 6.38≦x≦13.16 | 7~13 |
| 19 | 6.63≦x≦14.00 | 7~14 | 20 | 6.88≦x≦14.84 | 7~14 |
| 21 | 7.12≦x≦15.69 | 8~15 | 22 | 7.36≦x≦16.53 | 8~16 |
| 23 | 7.60≦x≦17.39 | 8~17 | 24 | 7.83≦x≦18.25 | 8~19 |
| 25 | 8.06≦x≦19.10 | 9~19 | | | |

二、 算出正方形內可切割最大正方形邊長（x）後，我們再用方格紙實際畫圖，以下是實際畫出來的結果：

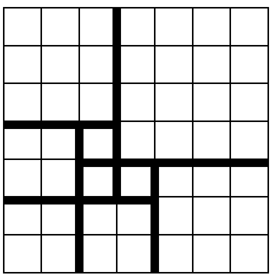
(一) 1×1~5×5，x 沒有可能解，所以不必畫就知無解。

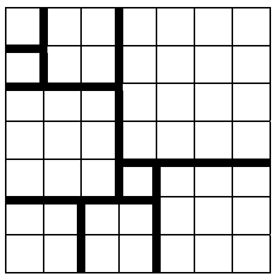
(二) 6×6



2.83≦x≦3.64
x 的整數解 3
但畫出 5 個 1×1
所以無解。

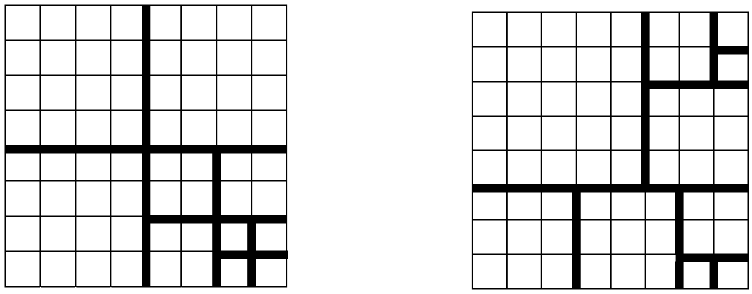
(三) 7×7





3.18≦x≦4.37
x 整數解爲 4
找出 2 種解

(四) 8×8



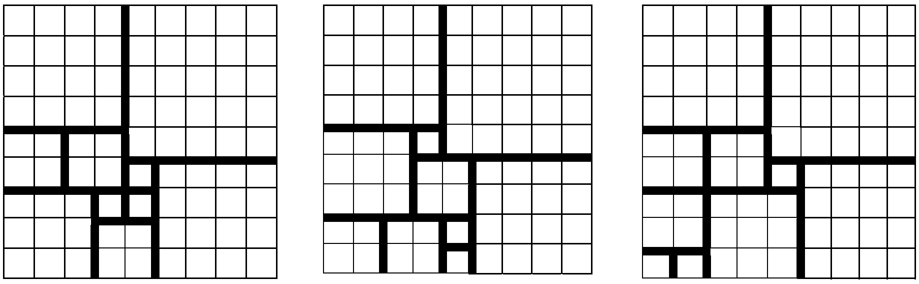
$3.52 \leqq x \leqq 5.12$

x 可能解爲 4、5

但畫出 4 個 1×1

所以無解

(五) 9×9

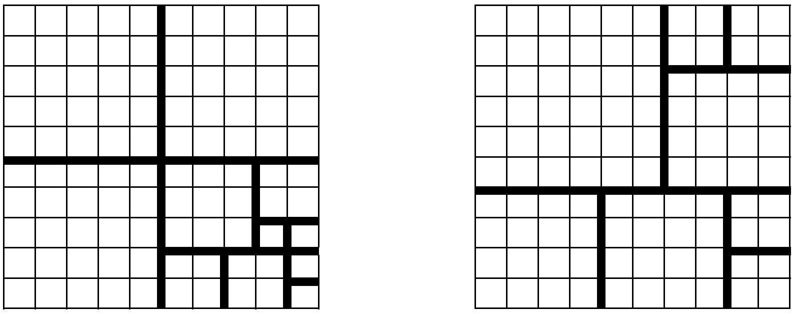


$3.84 \leqq x \leqq 5.88$

x 可能解爲 4、5

找出 3 種解

(六) 10×10



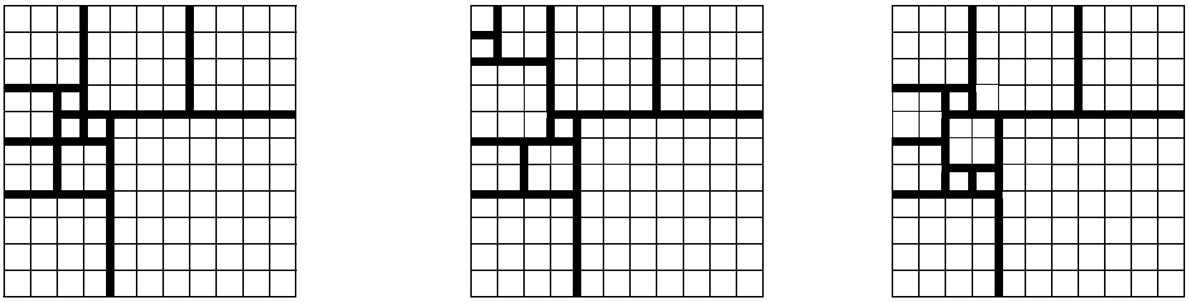
$4.16 \leqq x \leqq 6.66$

x 可能解爲 5、6

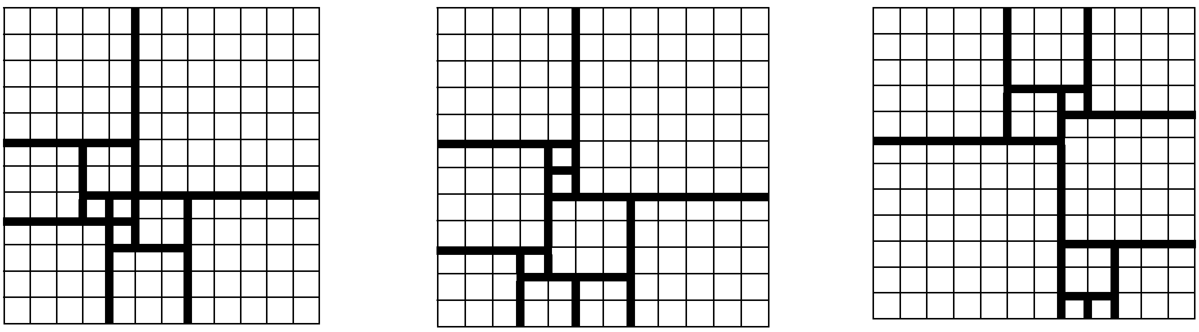
畫出 4 個相同正方形

所以無解

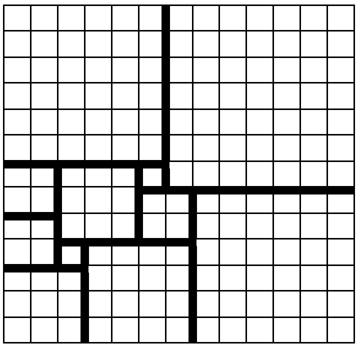
(七) 11×11



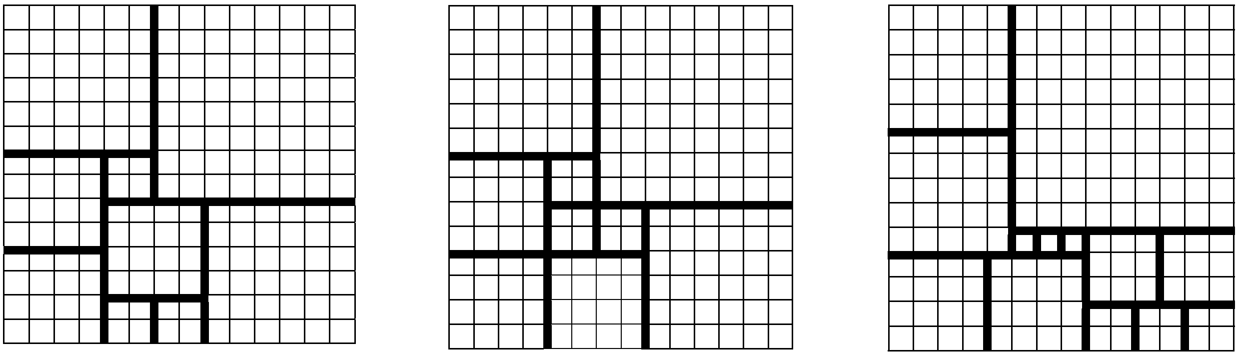
(八) 12×12



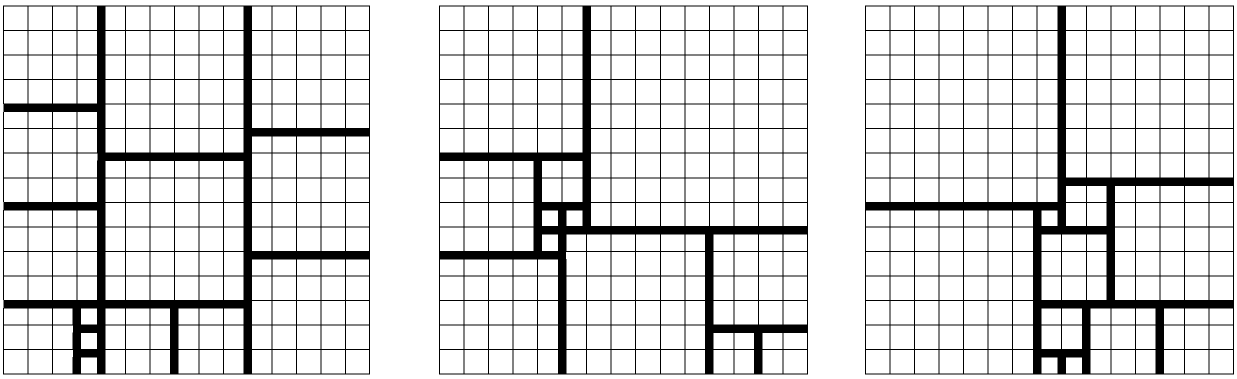
(九)　13×13



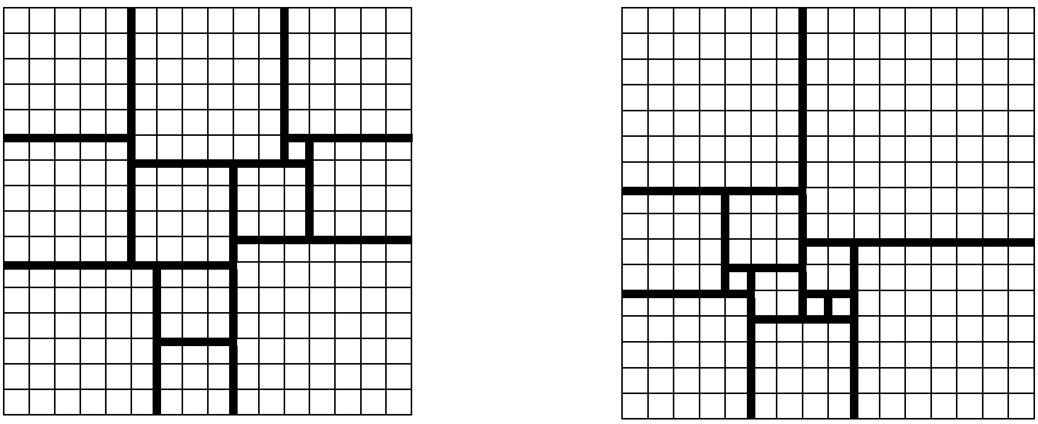
(十)　14×14



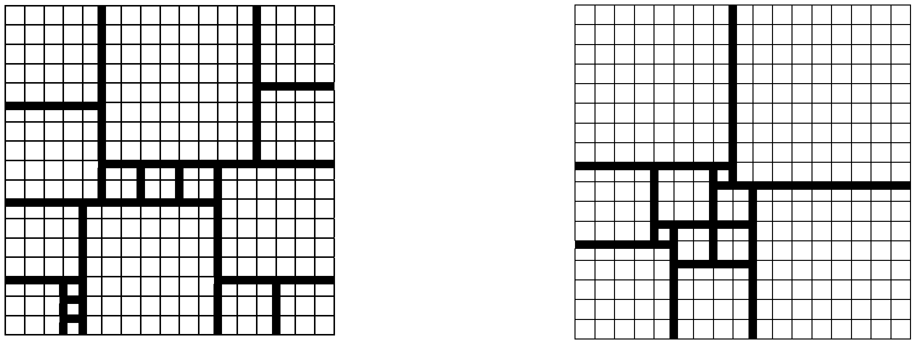
(十一) 15×15



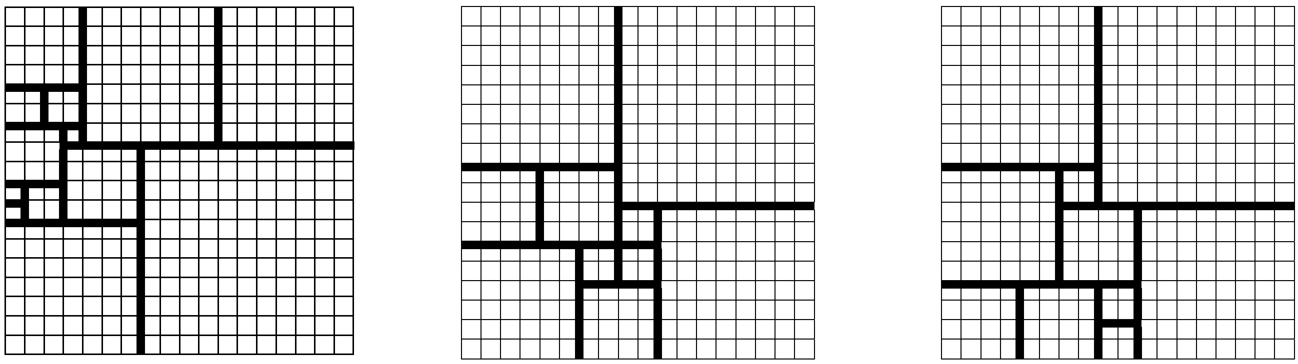
(十二) 16×16



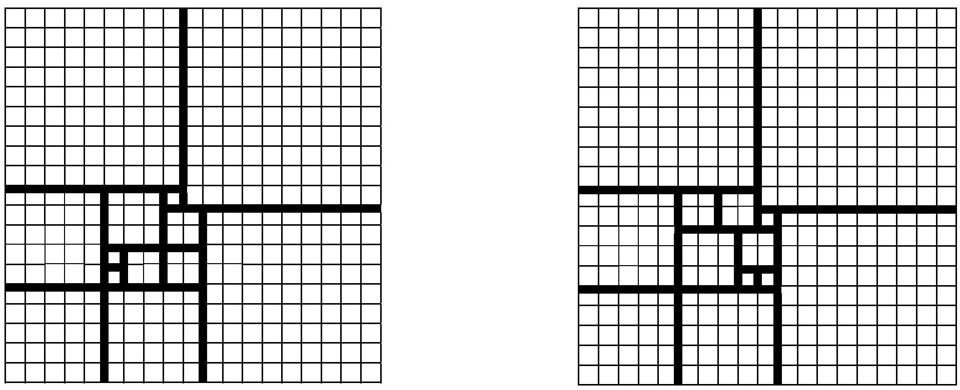
(十三) 17×17



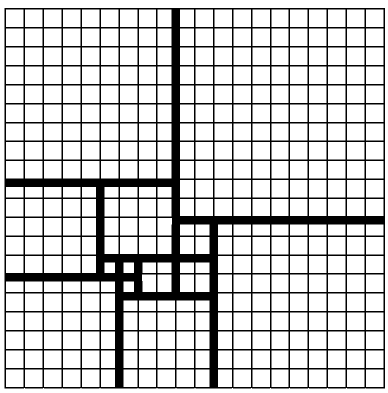
(十四) 18×18



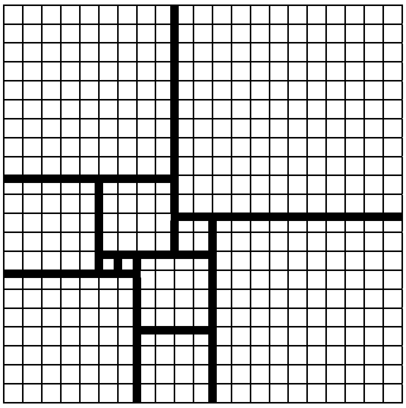
(十五) 19×19



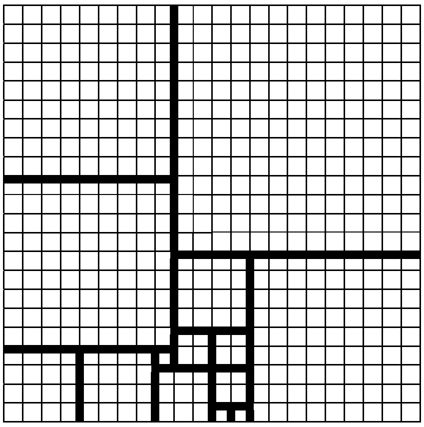
(十六) 20×20

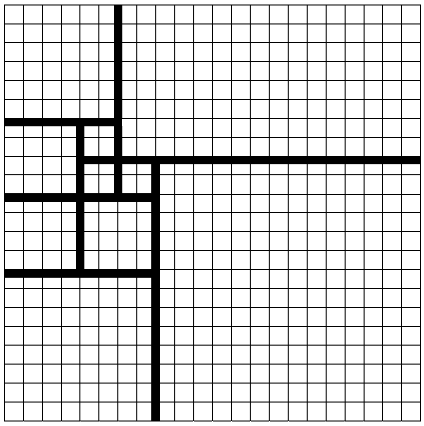


(十七) 21×21

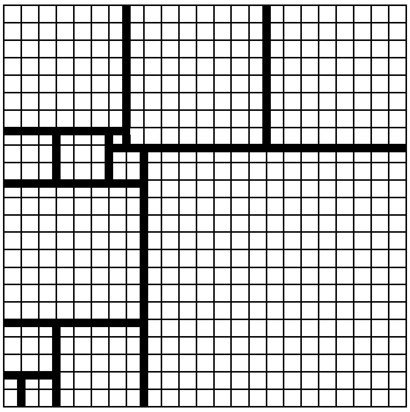


(十八) 22×22

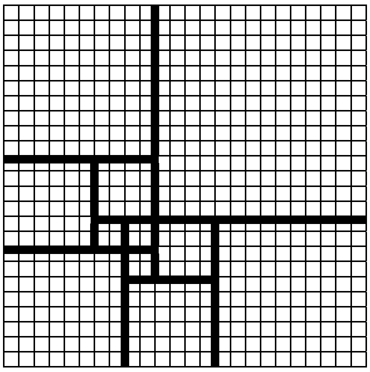


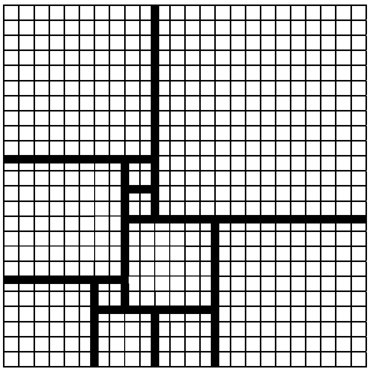


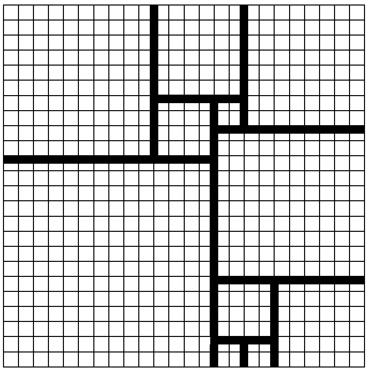
(十九) 23×23



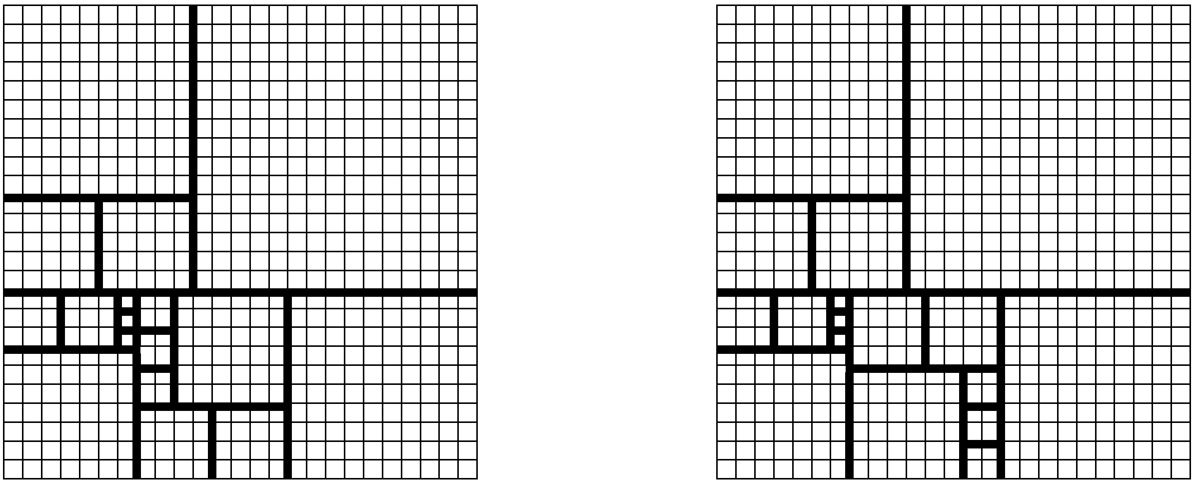
(二十) 24×24







(二十一)　　25×25



我們畫出的結果統計如下：

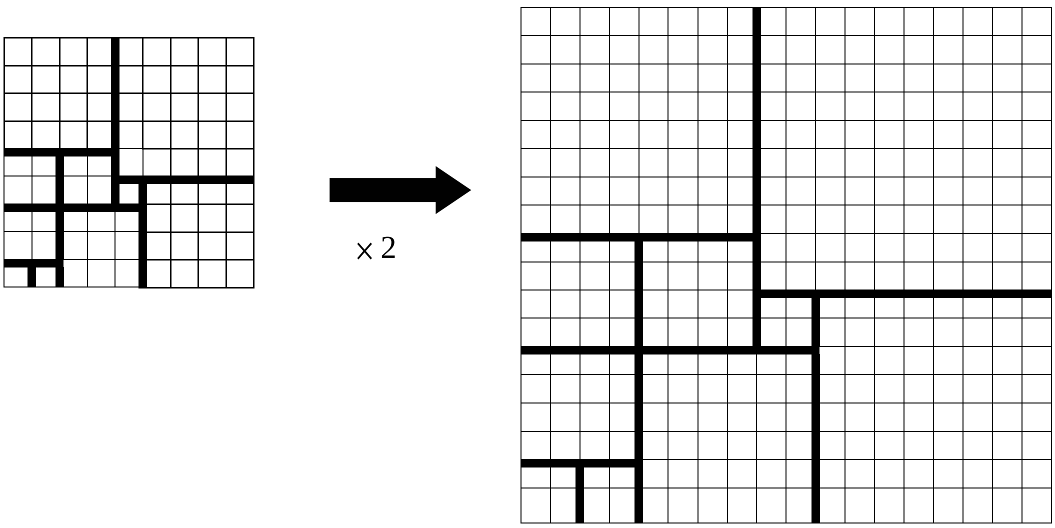
| 邊長 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 解數 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 3 | 4 | 1 |
| 邊長 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | |
| 解數 | 4 | 6 | 4 | 5 | 4 | 4 | 1 | 3 | 6 | 1 | 5 | 4 | |

## 陸、分析與討論

我們原本手畫的部分是邊長 1 至 25 的正方形，後來想要擴展到邊長 1 至 100 的解，因此我們依照正整數 n 的性質分類，來探討完美正方形的可解性：

一、　邊長 n 爲合數

我們發現每個解皆可等比放大成另一個解，例：9×2＝18

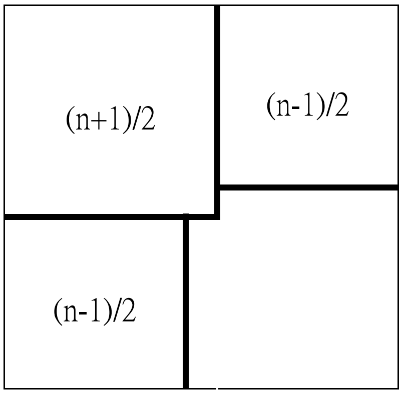



所以我們把重點放在研究邊長 n 爲質數的正方形。

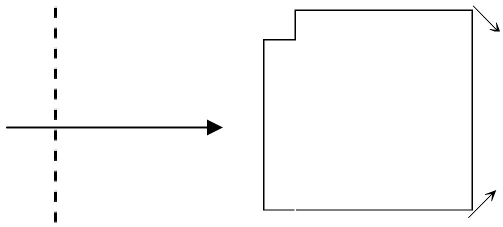
二、 邊長 n 爲質數

質數除了 2 以外皆爲奇數，所以我們把邊長爲奇數(n)的正方形分成 兩個連續整數的和，分別是邊長(n+1)/2 和邊長(n-1)/2 的正方形 (圖 A)，則剩下如區域 B 的圖形

圖 A




區域 B




我們把研究重點放在區域 B，分類找出區域 B 的解。（上圖區域 B 爲邊長 m 的正方形少一單位，爲了方便表示，我們用圖形中的數字表示正方形的邊長）

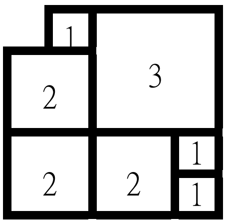
我們先列表看看完美正方形邊長 n 與區域 B 中缺角正方形邊長 m 的關係如下：

| n | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | …… |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 12 | 15 | 16 | 19 | 21 | 22 | …… |

接著開始尋求區域 B 中缺角正方形邊長 m 的可能解。

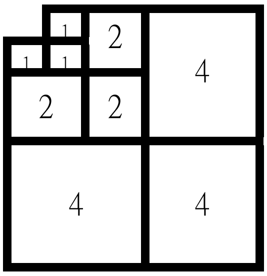
(一) 我們在畫邊長 1~25 的正方形時，發現有些正方形若角落少一格即有解 (如圖 2-1)，這個解正好可以塡補區域 B。用此方法我們找到的解有 m＝4、5、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、21、22、23、24、25

圖 2－1 (m＝5)



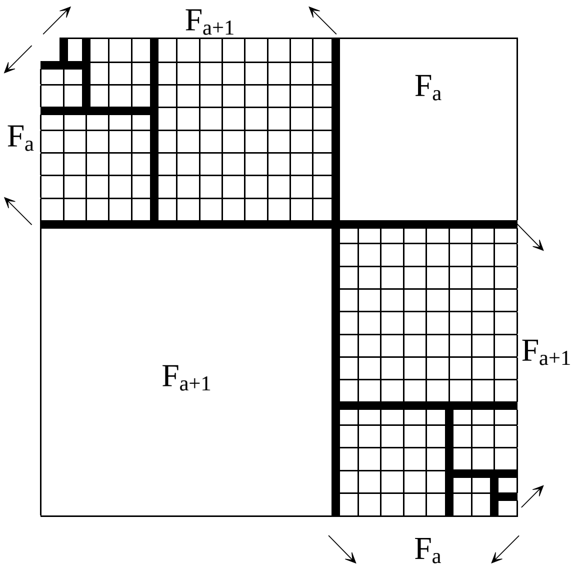

(二) 當 $m=2^{a}$ （a≧2）的時候我們可以把區域 B 分割成如圖 2-2 的圖形，用此方法我們找到的解有 m＝4、8、16、32、64……

圖 2-2



(三)　我們在畫時無意間發現，如果 m 爲費波那契數。(所謂費波那契數是下列數列 1，1，2，3，5，8，13，21……中的數字)，且 m≧5 時，則一定可以用以下的方式切割正方形(如圖 2-3)。 方法是在角落旁放上一個 1×1 的正方形，在旁邊依序補上 2×2、3×3、 5×5……等的正方形，組成一個邊長皆爲費波那契數的長方形，設此長方形兩邊的邊長爲 $F_a$ 和 $F_{a+1}$，將此 $F_a \times F_{a+1}$ 的長方形旋轉，放到區域 B 的右下方，再在此長方形的上方和左方補上邊長爲 $F_a$ 及 $F_{a+1}$ 的正方形，用此方法我們找到的解有 m＝5、8、13、21、34、55、89

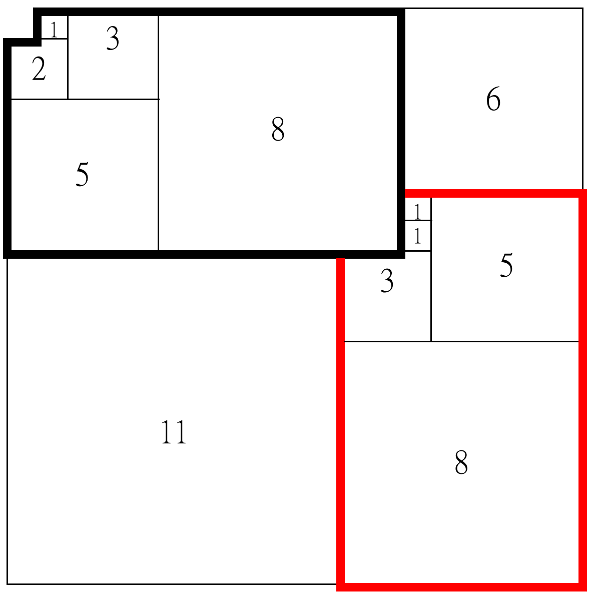
圖 2－3　(m＝21)




(四)　1.　m=Fn-2

將上圖 2－3 中，右下角 $F_a \times F_{a+1}$ 去掉一塊 2x2 的正方形，並補上邊長爲 1、$F_a-2$、$F_{a+1}-2$ 的正方形，就可以做出區域 B（如圖 2-4-1），我們用此方法找到的m有 11、19、32、53、87

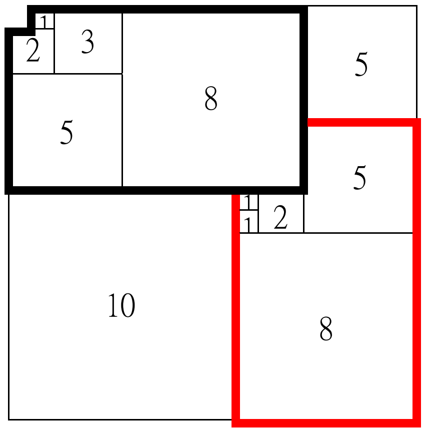
圖 2 - 4 -1



2. $m=F_n-3$

上圖 2－3 中，右下角 $F_a \times F_{a+1}$ 去掉一塊 3x3 的正方形，，並補上邊長爲 1、$F_a$-3、$F_{a+1}$-3 的正方形，就可以做出區域 B（如圖 2-4-2），我們用此方法找到的m有 10、18、31、52、86

圖 2-4-2

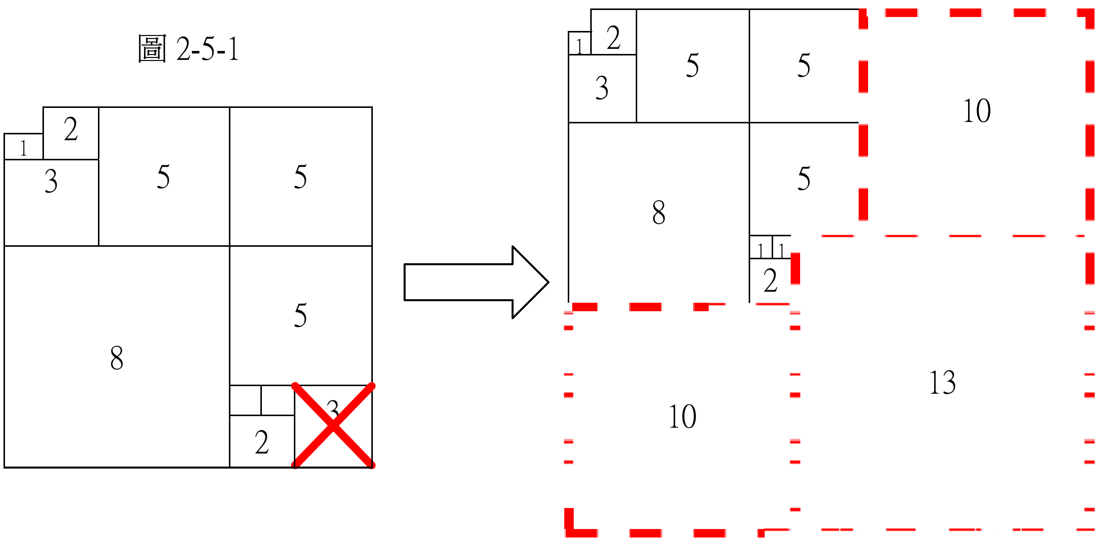



3. 以此類推，若將上一方法中，將右下角放的 $F_a \times F_{a+1}$ 的長方形中去掉一塊正方形 r×r(r 爲 $F_{a-n}$，n≧2)，並補上邊長爲 1、$F_a$－r、$F_{a+1}$－r 的正方形，也可以拼出區域 B ，此種方法拼出的 m 有 16、26、42、68

(五) 1. 下圖找到的 $m=2F_n-3$

我們可以將方法(三)得到的m，右下角的 3x3 正方形去掉，補上三個正方形，得到新的m（如圖 2-5-1），我們用此方法找到的m有 23、39

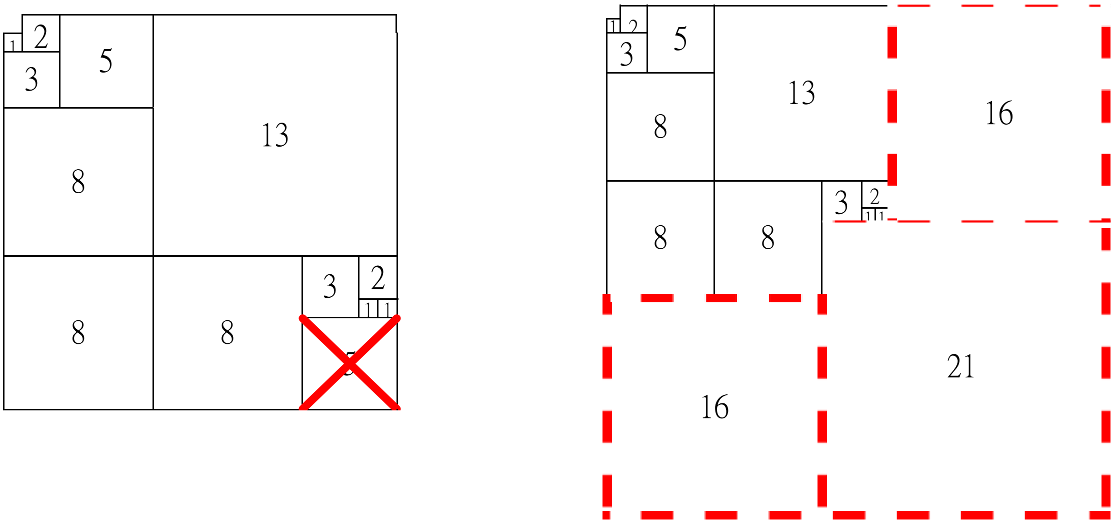
圖 2-5-1



2. 下圖找到的 $m=2F_n-5$

我們可以將方法(三)得到的m，右下角的 5x5 正方形去掉，補上三個正方形，得到新的m（如圖 2-5-2），我們用此方法找到的m有 37、63

圖 2-5-2




3. 以此類推，我們推展找到的 $m=2F_n-F_r$（$r\leqq n-2$）

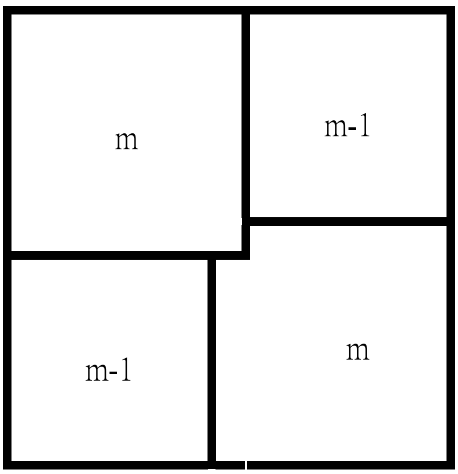
(六) 綜合上述五種方法中我們所找到的 m 有：4、5、7~25、26、31、32、34、37、39、42、52、53、55、63、64、68、86、87、89 。

三、 我們已經找出一些區域 B 的可能解，接著嘗試去擴展找出完美正方形。

(一) 1. 如圖 3-1-1 排列，可推知完美正方形邊長 $n=2m-1$，所得到的 $n=17$、19、23、29、31、37、41、43、47、67

圖 3-1-1

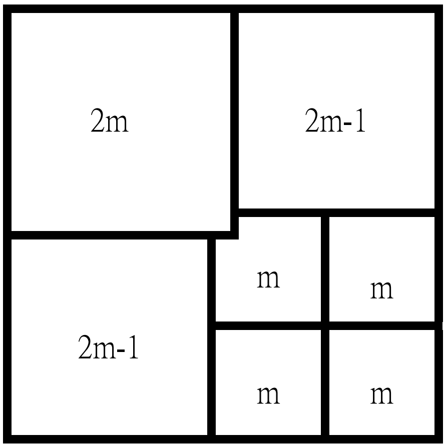
n= 2m-1



2. 如圖 3-1-2 排列，可推知完美正方形邊長 n=4m-1，所得到的 n＝19、31、43、47、59、67、71、79、83

圖 3-1-2

n= 4m-1




3. 以此類推我們可以得出，正方形邊長 $n=2^k m-1$ 皆可以用此方法分割。

(二) 1. 將圖 3-1-1 中的正方形 m-1 挖掉，補上三個正方形 如圖 3-2-1，可擴展找出完美正方形邊長 n=3m-1，所得到的 n＝11、23、29、41、47、53、59、71

圖 3-1-1

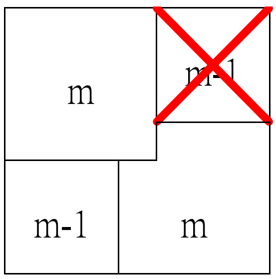
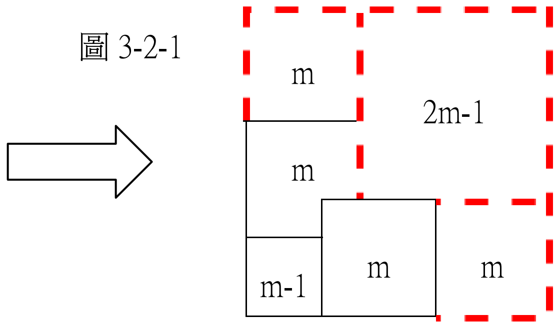



圖 3-2-1




2. 將上圖 3-2-1 中的正方形 m-1 挖掉，補上三個正方形 如圖 3-2-2，可推知完美正方形邊長 n=5m-1，所得到的 n＝19、59、79、89

圖 3-2-1

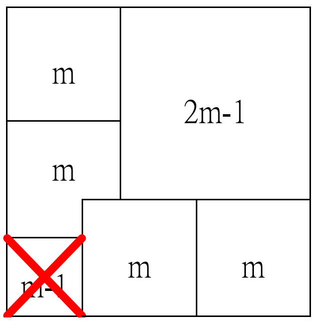
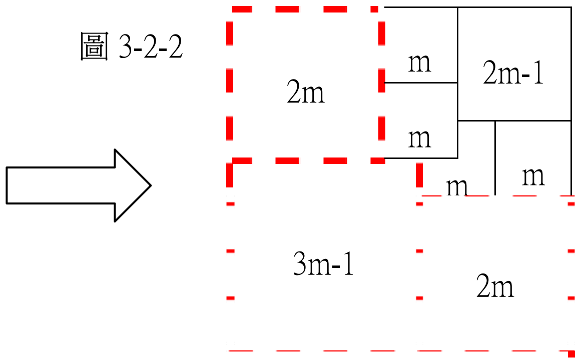



圖 3-2-2



3. 將上圖 3-2-2 中的正方形 2m-1 挖掉，補上三個正方形如圖 3-2-3，可推知完美正方形邊長 n=8m-1，以此類推我們可以得出，n=Fn × m－1 （Fn 為費波那契數）

圖 3-2-2

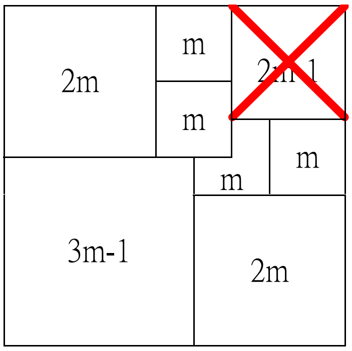
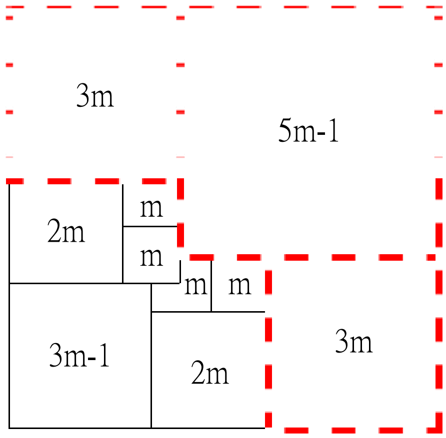



圖 3-2-3




(三) 1. 若將圖 3-2-1 中的正方形 m 挖掉，補上三個正方形 如圖 3-3-1，又擴展出另一類的完美正方形邊長 n=5m-2，所得到的 n＝23、43、53、73、83

圖 3-2-1

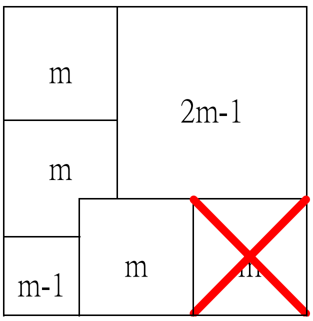
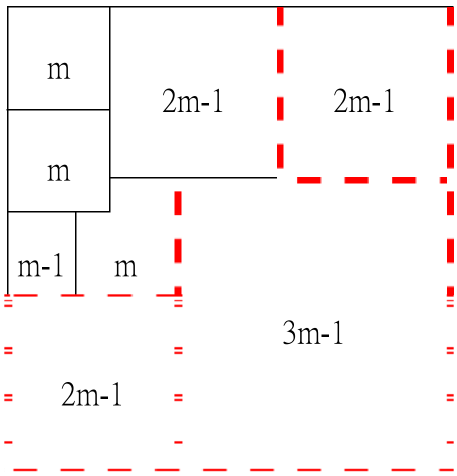



圖 3-3-1




2. 將上圖 3-3-1 中的正方形 2m-1 挖掉，補上三個正方形 如圖 3-3-2，可將完美正方形邊長由 n=5m-2，推廣成完美正方形邊長 n=8m-3，所得到的 n＝29、37、53、61

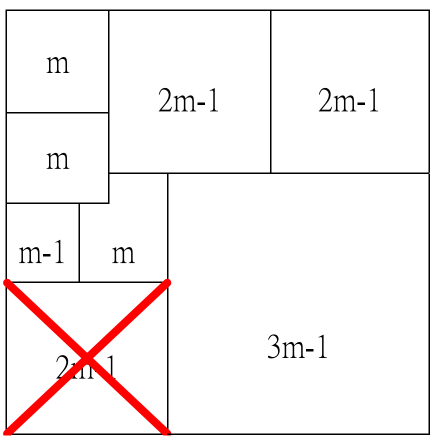
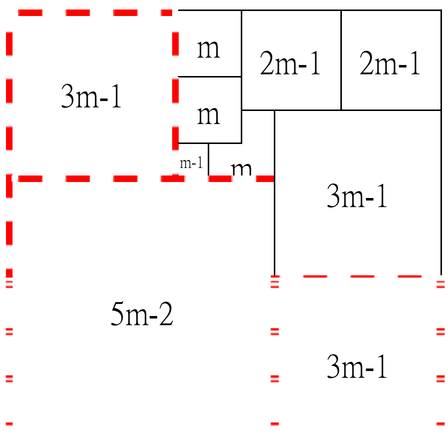
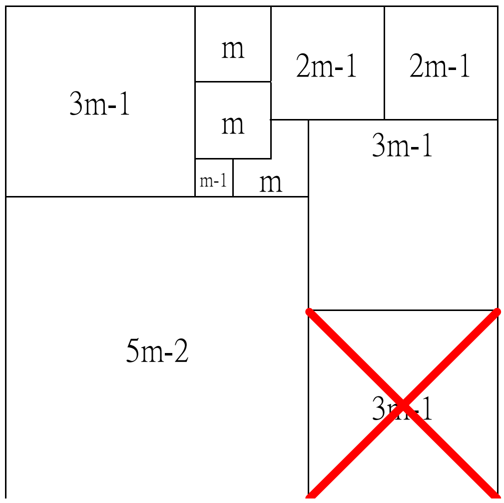


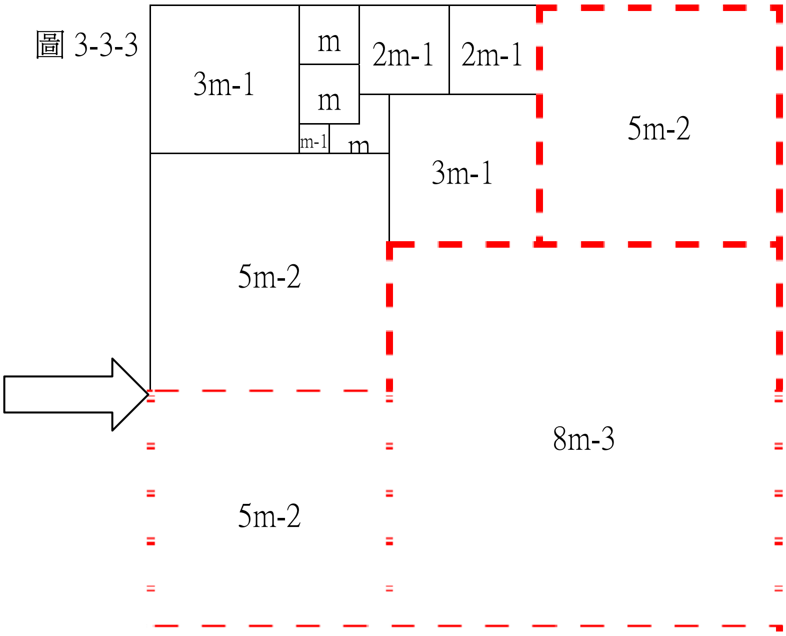

圖 3-3-2



3. 如圖 3-3-3，可推知完美正方形邊長 $n=13m-5$，以此類推我們可以得出，$n=F_n m-F_{n-2}$ （$F_n$ 爲費波那契數）

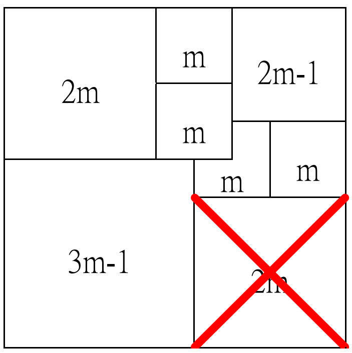
圖 3-3-3

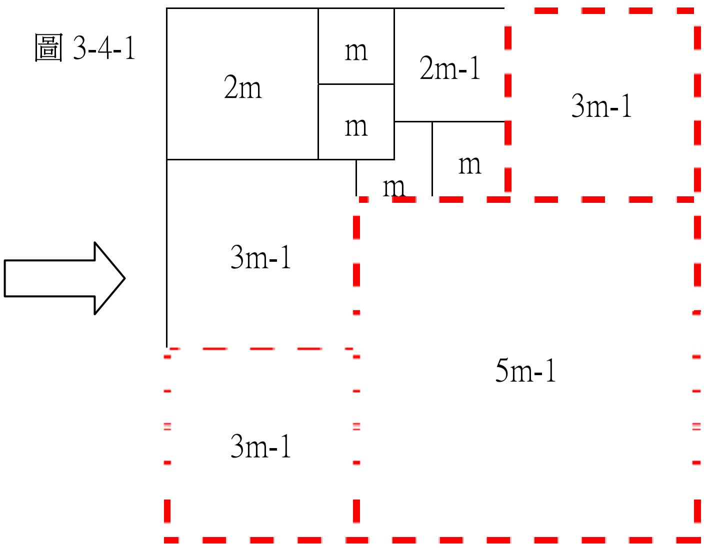



(四) 1. 如圖 3-4-1 排列，可推知完美正方形邊長 $n=8m-2$

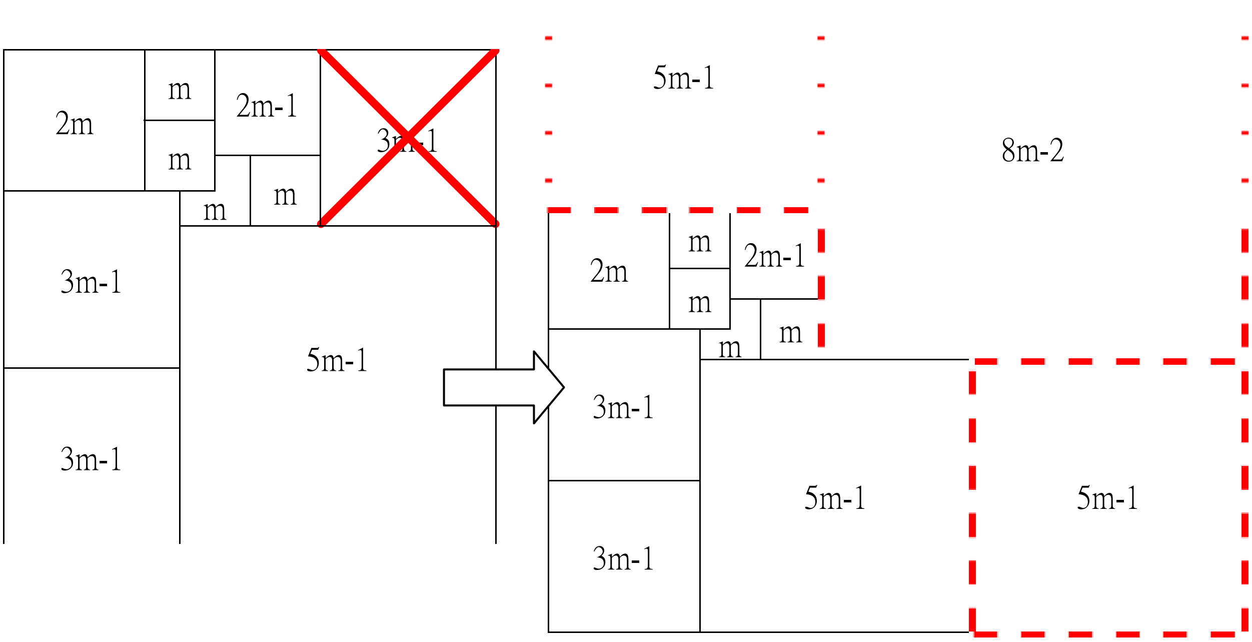
圖 3-4-1



2. 如圖 3-4-2 排列，可推知完美正方形邊長 n=13m-3

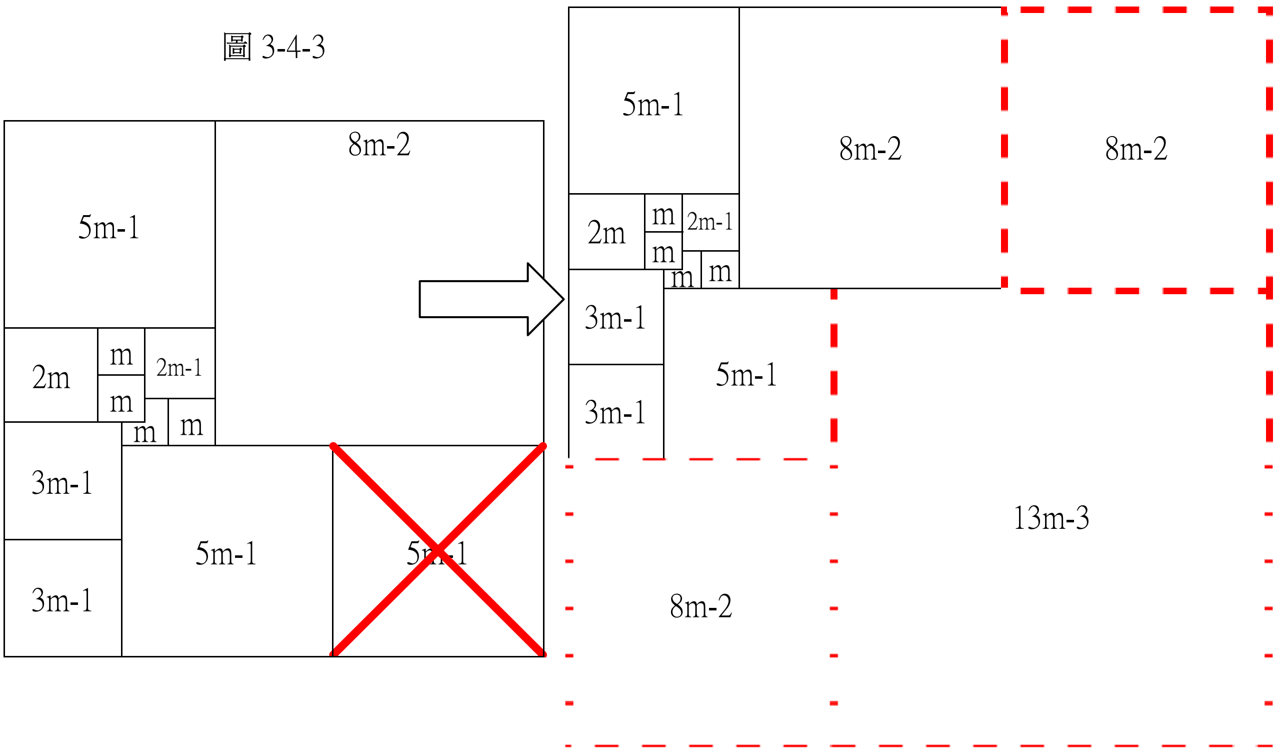
圖 3-4-2




3. 如圖 3-4-3，可推知完美正方形邊長 n=21m-5，以此類推我們可以得出，

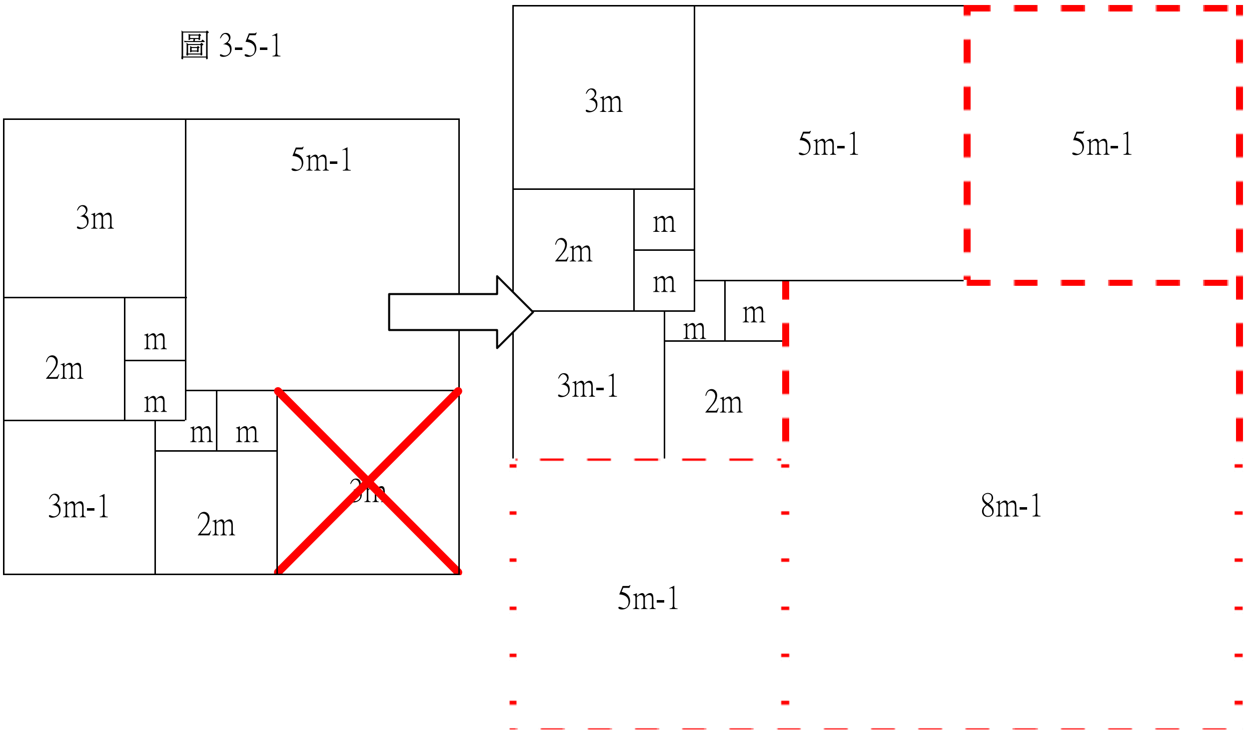
$n=F_n m - F_{n-3}$ （$F_n$ 為費波那契數）

圖 3-4-3



(五) 1. 如圖 3-5-1 排列，可推知完美正方形邊長 n=13m-2，所得到的 n＝63、89

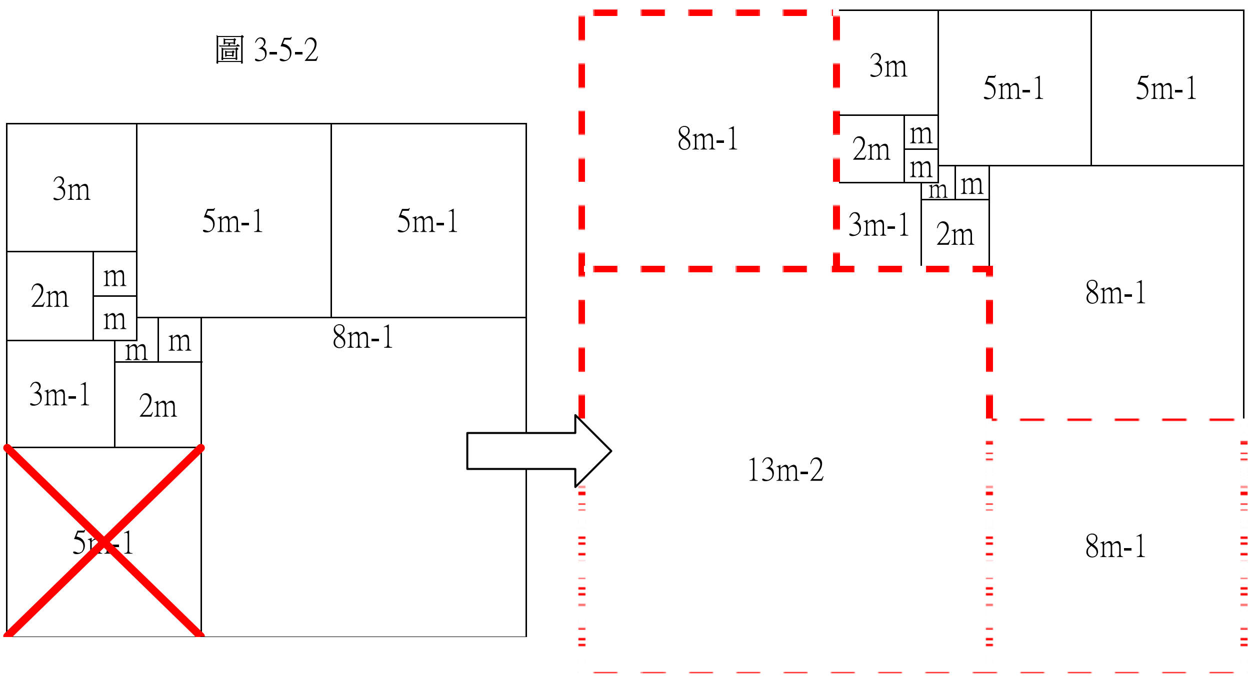
圖 3-5-1




2. 如圖 3-5-2，可推知完美正方形邊長 n=21m-3，以此類推我們可以得出，

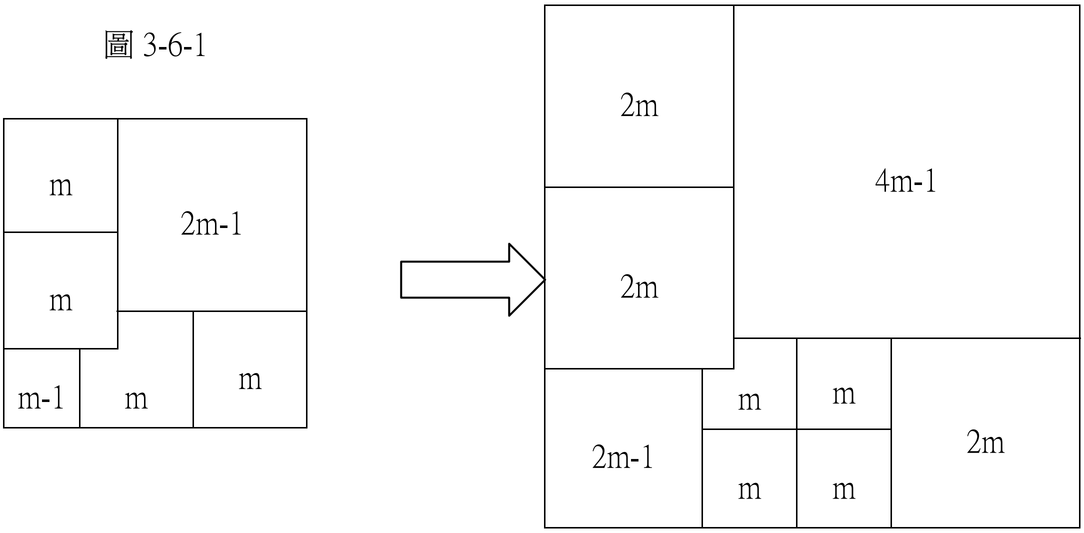
$n=F_n m-F_{n-3}$ （$F_n$ 爲費波那契數）

圖 3-5-2



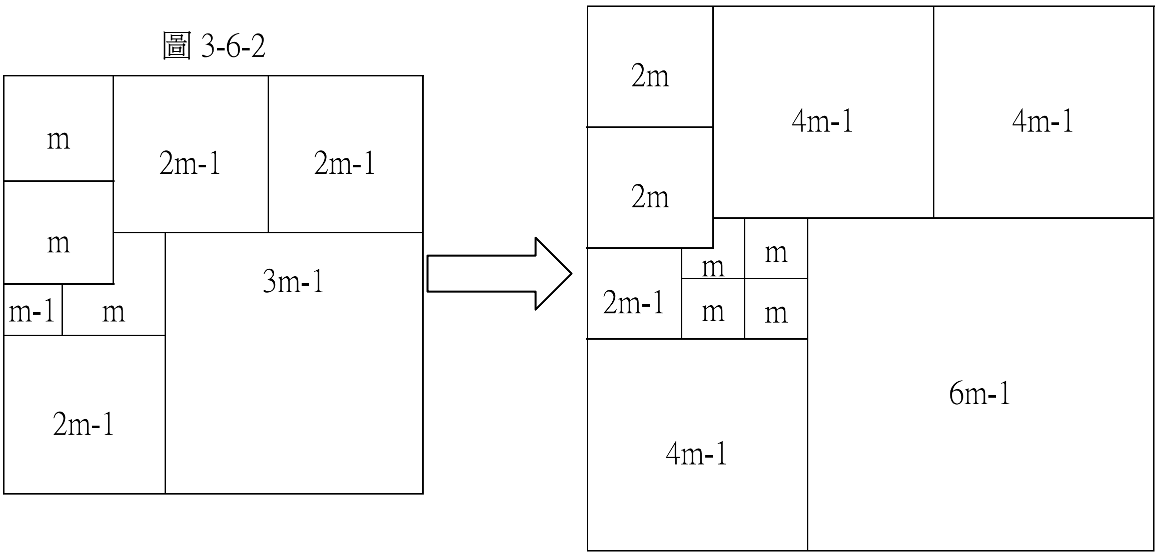
(六)　1.　如圖 3-6-1 排列，在區域 B 周圍加上 3 個邊長為 m 的正方形，再將其餘正方形邊長中 m 的係數變成 2 倍，可推知完美正方形邊長 n=6m-1，所得到的 n＝23、29、41、47、53、59、71、83、89

圖 3-6-1




2.　如圖 3-6-2 排列，可推知完美正方形邊長 n=10m-2

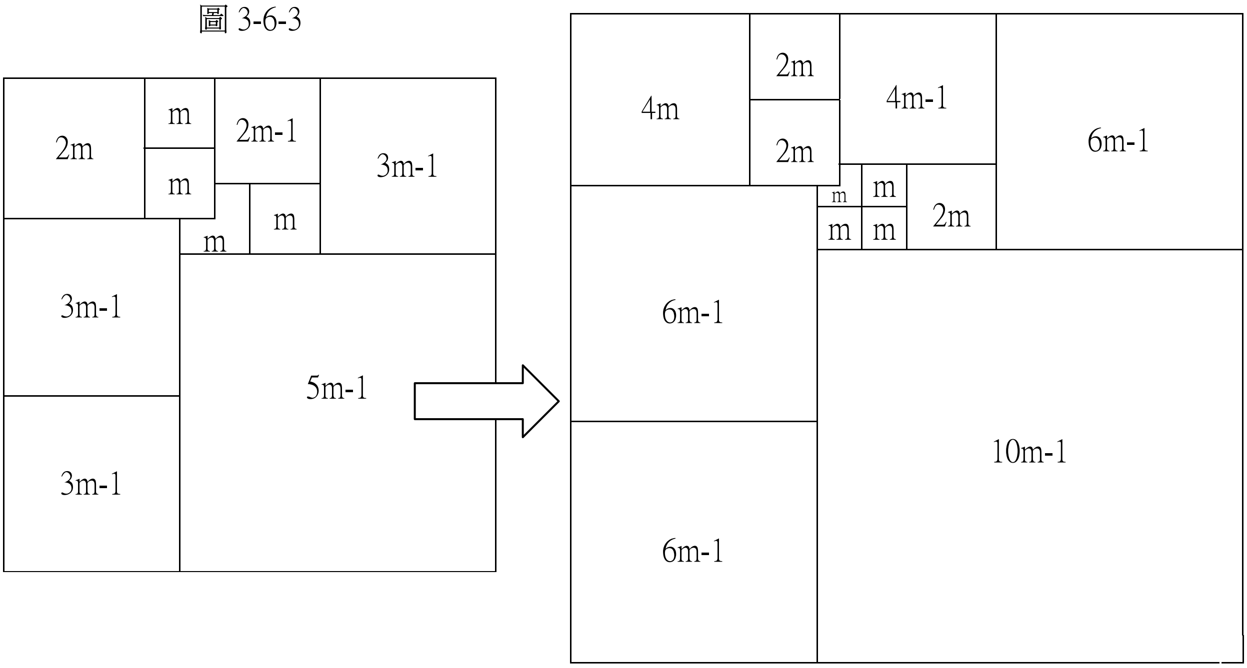
圖 3-6-2



3. 如圖 3-6-3，可推知完美正方形邊長 n=16m-1，以此類推我們可以得出，

$n=2^{k}F_{n}m-F_{n-r}$ （$F_n$ 為費波那契數，$r\geq 2$）

圖 3-6-3




四、 我們將討論二中所找到的一些區域 B 的解，用討論三中的方法去擴展找出完美正方形。利用 EXCEL 軟體試算如下表：

| m | 2m-1 | 3m-1 | 4m-1 | 5m-1 | 8m-1 | 13m-1 | 5m-2 | 13m-3 | 21m-8 | ……… |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | 11 | 15 | 19 | 31 | 51 | 18 | 49 | 76 | |
| 5 | 9 | 14 | 19 | 24 | 39 | 64 | 23 | 62 | 97 | |
| 7 | 13 | 20 | 27 | 34 | 55 | 90 | 33 | 88 | 139 | |
| 8 | 15 | 23 | 31 | 39 | 63 | 103 | 38 | 101 | 160 | |
| 9 | 17 | 26 | 35 | 44 | 71 | 116 | 43 | 114 | 181 | |
| 10 | 19 | 29 | 39 | 49 | 79 | 129 | 48 | 127 | 202 | |
| 11 | 21 | 32 | 43 | 54 | 87 | 142 | 53 | 140 | 223 | |
| 12 | 23 | 35 | 47 | 59 | 95 | 155 | 58 | 153 | 244 | |
| 13 | 25 | 38 | 51 | 64 | 103 | 168 | 63 | 166 | 265 | |
| 14 | 27 | 41 | 55 | 69 | 111 | 181 | 68 | 179 | 286 | |
| 15 | 29 | 44 | 59 | 74 | 119 | 194 | 73 | 192 | 307 | |
| 16 | 31 | 47 | 63 | 79 | 127 | 207 | 78 | 205 | 328 | |
| 17 | 33 | 50 | 67 | 84 | 135 | 220 | 83 | 218 | 349 | |
| 18 | 35 | 53 | 71 | 89 | 143 | 233 | 88 | 231 | 370 | |
| 19 | 37 | 56 | 75 | 94 | 151 | 246 | 93 | 244 | 391 | |
| 20 | 39 | 59 | 79 | 99 | 159 | 259 | 98 | 257 | 412 | |
| 21 | 41 | 62 | 83 | 104 | 167 | 272 | 103 | 270 | 433 | |
| 22 | 43 | 65 | 87 | 109 | 175 | 285 | 108 | 283 | 454 | |
| 23 | 45 | 68 | 91 | 114 | 183 | 298 | 113 | 296 | 475 | |
| 24 | 47 | 71 | 95 | 119 | 191 | 311 | 118 | 309 | 496 | |
| 25 | 49 | 74 | 99 | 124 | 199 | 324 | 123 | 322 | 517 | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 51 | 77 | 103 | 129 | 207 | 337 | 128 | 335 | 538 |
| 31 | 61 | 92 | 123 | 154 | 247 | 402 | 153 | 400 | 643 |
| 32 | 63 | 95 | 127 | 159 | 255 | 415 | 158 | 413 | 664 |
| 34 | 67 | 101 | 135 | 169 | 271 | 441 | 168 | 439 | 706 |
| 37 | 73 | 110 | 147 | 184 | 295 | 480 | 183 | 478 | 769 |
| 39 | 77 | 116 | 155 | 194 | 311 | 506 | 193 | 504 | 811 |
| 42 | 83 | 125 | 167 | 209 | 335 | 545 | 208 | 543 | 874 |
| 52 | 103 | 155 | 207 | 259 | 415 | 675 | 258 | 673 | 1084 |
| 53 | 105 | 158 | 211 | 264 | 423 | 688 | 263 | 686 | 1105 |
| 55 | 109 | 164 | 219 | 274 | 439 | 714 | 273 | 712 | 1147 |
| 63 | 125 | 188 | 251 | 314 | 503 | 818 | 313 | 816 | 1315 |
| 64 | 127 | 191 | 255 | 319 | 511 | 831 | 318 | 829 | 1336 |
| 68 | 135 | 203 | 271 | 339 | 543 | 883 | 338 | 881 | 1420 |
| 86 | 171 | 257 | 343 | 429 | 687 | 1117 | 428 | 1115 | 1798 |
| 87 | 173 | 260 | 347 | 434 | 695 | 1130 | 433 | 1128 | 1819 |
| 89 | 177 | 266 | 355 | 444 | 711 | 1156 | 443 | 1154 | 1861 |

## 柒、結論

一、 開始研究時，我們先算出正方形 n 中可切割最大正方形邊長 x 的範圍，再配合這個數據，用方格紙實際畫出邊長 1 至 25 的完美正方形，結果發現除了邊長 1、2、3、4、5、6、8、10 無解，其他皆有解。

二、 接著爲了擴展到邊長 n=25~100 的解，我們依照正整數 n 的性質分類。我們發現只要 n 爲合數，而 n 的因數有解即可用放大的方式，找出 25~100 的合數解：

| 邊長有解的原圖 | 放大後找出有解的邊長 n |
|---|---|
| 7x7 | 28、35、42、49、56、63、70、77、84、91、98 |
| 9x9 | 27、36、45、54、63、72、81、90、99 |
| 11x11 | 33、44、55、66、88、99 |
| 12x12 | 24、36、48、60、72、96 |
| 13x 13 | 26、39、52、65、78 |
| 15x15 | 30、60、75 |
| 16x 16 | 32、64、80、 |
| 17x17 | 34、51、68、85 |
| 19x 19 | 38、57、76、95 |
| 20x20 | 40、100 |

| | |
|---|---|
| 23× 23 | 46、69、92 |
| 25×25 | 50 |
| 29× 29 | 58、87 |
| 31×31 | 62、93 |
| 41× 41 | 82 |
| 43×43 | 86 |
| 47× 47 | 94 |

三、 若邊長 n 爲質數，我們把正方形分割成 兩個連續整數邊長的正方形，則剩下少一單位的缺角正方形區域 B，若m爲區域 B 的邊長。我們用了五種方法去探討m的解，以下是五種方法中分別找出的解：

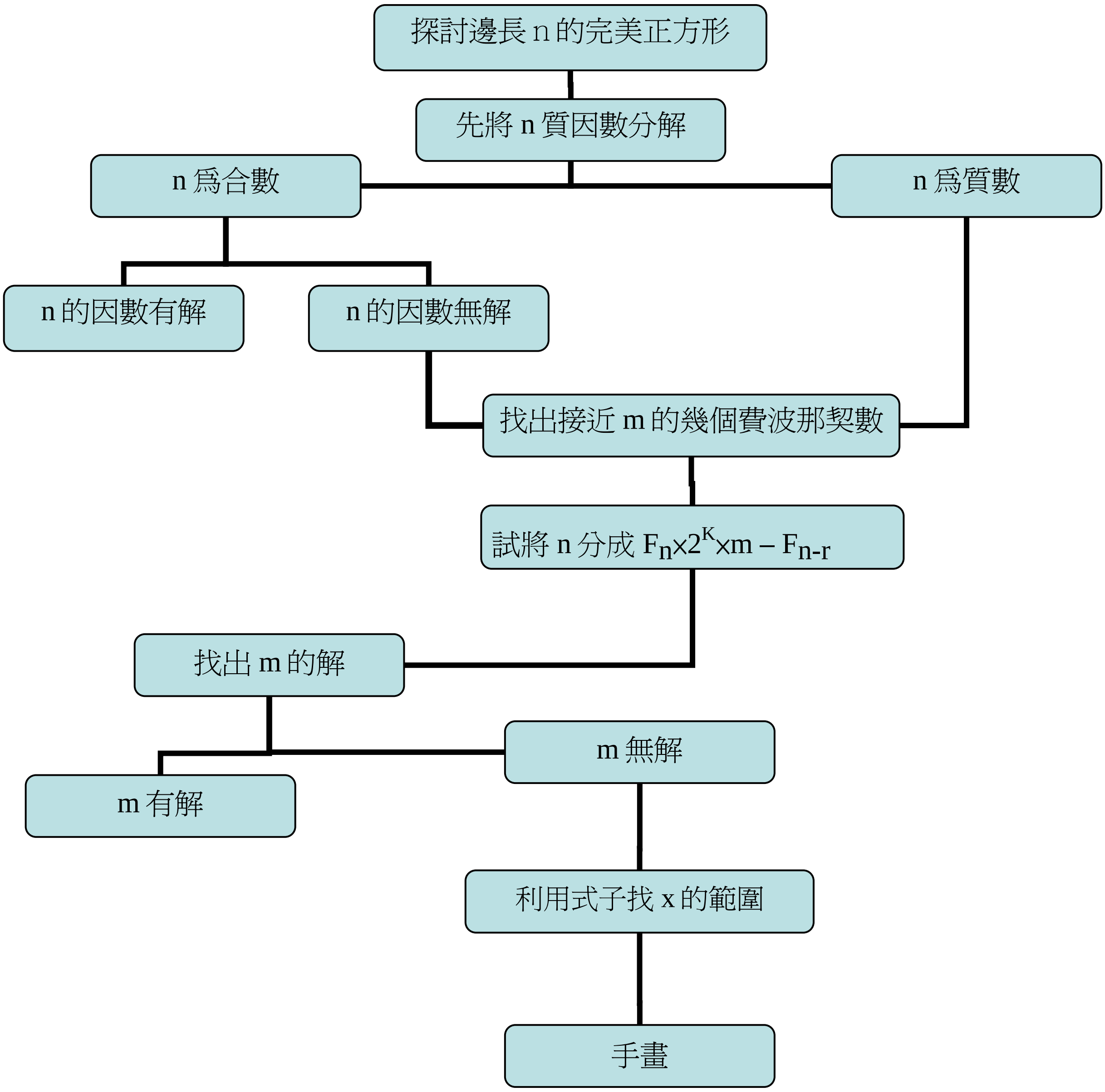
| | |
|---|---|
| 1 至 25 畫圖找m | 4、5、7～25 |
| $m=2^a$ | 4、8、16、32、64 |
| $m=F_n$ | 5、8、13、21、34、55、89 |
| $m=F_{n-2}$ | 11、19、32、53、87 |
| $m=F_{n-3}$ | 10、18、31、52、86 |
| $m=2F_n-3$ | 23、39 |
| $m=2F_n-5$ | 37、63 |

四、 我們將區域 B 的解，討論分析回原來的完美正方形。我們探討出很多推廣的方法，下列是邊長 25 至 100 的完美正方形中，我們所用的方法：

| 方法 | n 的質數解 |
|---|---|
| n= 2m-1 | 7、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、67、73、83 |
| n=3m-1 | 11、53、59、71 |
| n=4m-1 | 79、87 |
| n=5m-1 | 89 |
| n=21m-8 | 97 |

我們解出了邊長 1~100 中全部有解的完美正方形。

五、 對於一般邊長的完美正方形，我們也可以用此方式操作，將問題分類探討，我們以流程圖來表示解決問題的過程：




六、 我們將上面的研究結果，用電腦幫忙試算邊長 1 至 1000 的所有完美正方形，大概只有 18 個無法解決，這是我們可以繼續努力的方向。

## 捌、參考資料

吳振奎、吳旻（民 91）。塔爾塔利亞（109-110 頁）。九章出版社。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

## 國中組 數學科

## 第一名

030421
完美正方形

臺北市立敦化國民中學

評語：
主題具創意並能將研究問題分解為一些小問題再作探討，整件作品呈現有系統有結構的表達，是一件完整且詳細的難得作品。