中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

佳作

030420
黑格連線

臺北市立龍山國民中學

作者姓名：
國三 林泰谷

陳宏清 王嘉瑛

中 華 民 國 第 四 十 五 屆 中 小 學 科 學 展 覽 會

作 品 說 明 書

科別：數學科

組別：數學組

作品名稱：黑格連線

關鍵詞：互質、鏡射、正方化棋盤

編號：

摘要

黑格連線是一個用有方向性連線連接平面或立體棋盤中黑格的動作。以平面棋盤為例，在給定的$m \times n$黑白格相間的棋盤(其左下角為黑格)，由左下角開始以連線將共點黑格連接，若所有黑格都能被連接，則稱(m,n)符合黑格連線條件。本研究主要目的是以推理方法導出當(m,n)符合黑格連線條件時，m,n之間的關係，研究初期猜測當$\gcd(m-1,n-1)=1$時，數對(m,n)符合黑格連線條件。

為達上述目的，研究中需探討棋盤中的黑格總數、連線在棋盤上重複通過的黑格數量及重複通過的次數，以及在如何的情況下可以使連線通過棋盤上所有的黑格，最後驗證研究初期之猜測成立。

本研究預期推展到高維度棋盤符合黑格連線的條件。目前發現此推廣面臨高維度中點、線、面、高維度體個數及相互連接的問題，由實例進行黑格連線後，猜測結果與二維、三維相仿(各維度的格數減一之值必須兩兩互質)。

另外，還有一個研究推廣的思考方向：$m \times n$棋盤中，將連線視為繩，連線第二次經過黑格時，依序向前一條連線上方、下方通過，最後將黑格相連後，繩拉緊所能產生的繩結數。

壹、研究動機

黑格連線源自一次數學營隊中老師提出的題目及其推廣問題：給定一個$m\times n$黑白格相間的棋盤(其左下角爲黑格)，由左下角開始以連線將共點黑格連接，若所有黑格都能被連接，則稱(m,n)符合黑格連線條件。當時猜測當$\gcd(m-1,n-1)=1$時，(m,n)符合黑格連線條件；在此(m,n)爲數對之表示，文中不另作說明。

本研究主要目的是以推理方法導出當(m,n)符合黑格連線條件時，m,n之間的關係。在推理過程中發現須使用鏡射、最大公因數與最小公倍數等相關性質(翰林版國中數學第一冊 1-3 及第二冊 2-2)。

貳、研究目的

一、　平面黑格連線：

(一) $m\times n$棋盤中的黑格總數。

(二) 當(m,n)符合黑格連線條件時，$m\times n$棋盤中的重複格性質。

(三) 當(m,n)符合黑格連線條件時，m,n之間的關係。

二、　立體黑格連線：

(一) $x\times y\times z$棋盤中的黑格總數。

(二) 當(x,y,z)符合黑格連線條件時，$x\times y\times z$棋盤中的重複格性質。

(三) 當(x,y,z)符合黑格連線條件時，x,y,z之間的關係。

參、先備知識

一、　已知m,n兩正整數：

(一) m,n兩數的最大公因數記作$\gcd(m,n)$。

(二) m,n兩數的最小公倍數記作$\operatorname{lcm}(m,n)$。

(三) 若 $m=ka,n=kb$ 且 $\gcd(a,b)=1$，則因 $\gcd(m,n)=k$、$\operatorname{lcm}(m,n)=kab$，故得

$$mn=(ka)(kb)=k(kab)=\gcd(m,n)\operatorname{lcm}(m,n)$$。

二、　已知x,y,z三正整數：

(一) x,y,z三數的最大公因數記作$\gcd(x,y,z)$。

(二) x,y,z三數的最小公倍數記作$\operatorname{lcm}(x,y,z)$。

(三)　若 $x=ka, y=kb, z=kc$ 且 a,b,c 兩兩互質，則因 $\gcd(x,y,z)=k$ 、 $\operatorname{lcm}(x,y,z)=kabc$ ，

故得 $xyz=(ka)(kb)(kc)=k^2(kabc)=(\gcd(x,y,z))^2\operatorname{lcm}(x,y,z)$ 。

三、　最大整數函數：

(一)　$[x]$表示不大於 x 的最大整數。

(二)　若 x 為整數，則 $[x]=x$ 。

(三)　若 y 為整數，則 $[x+y]=[x]+y$ 。

(四)　若函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, x\text{為奇數} \\ \dfrac{x}{2}, x\text{為偶數}\end{cases}$ ，則 $f(x)=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]$ 。

(五)　若函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}, x\text{為奇數} \\ \dfrac{x}{2}, x\text{為偶數}\end{cases}$ ，則 $f(x)=\left[\dfrac{x}{2}\right]$ 。

肆、研究方法及過程

一、　平面黑格連線：

(一)　名詞解釋：

平面黑格連線研究中使用的特殊名詞解釋如下：

1. 黑白格區分：

(1)　如圖 1 之 $m\times n$ 格的棋盤，並將行列編號：由左至右依序為第 1 行至第 m 行，由下至上依序為第 1 列至第 n 列，每個格子可依所在行列表示，(m,n)即第 m 行第 n 列的格子。

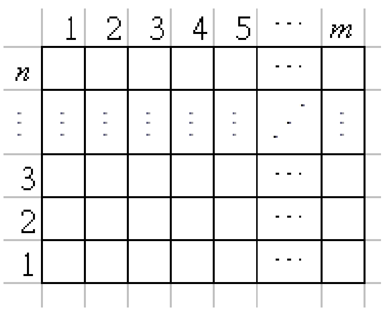


圖 1　$m\times n$ 未區分黑白格的棋盤

(2) 如圖 2 所示，定$m \times n$棋盤(其中m爲行數，n爲列數，且$m \geq n$)上$(1,1)$爲黑格，且與$(1,1)$共點的$(2,2)$亦爲黑格，而與黑格$(2,2)$共邊的方格爲白格，與$(2,2)$共點不共邊的方格爲黑格。同理推廣至整個棋盤，使所有黑格皆共點不共邊，與黑格共邊的方格爲白格，棋盤上所有格子皆區分爲黑格或白格且黑白相間。

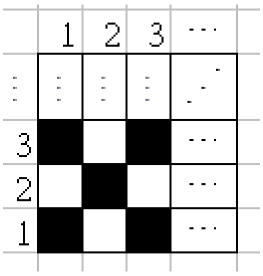


圖 2 $m \times n$棋盤黑白格區分

2. 連線：有方向性連接黑格的線，以箭號指出前進方向。
3. 共點黑格：兩個黑格若有一頂點共用，即互爲共點黑格。
4. 黑格連線：依照本研究訂立的特定規則(肆、一、(二))，任取兩正整數m,n構成$m \times n$的黑白格相間棋盤，並以連線連接黑格的動作。
5. 連線過程：進行黑格連線，直到連線到達棋盤上任一角落黑格，因無其他共點的黑格可相連而停止。
6. 重複格：被連線重複經過的黑格皆稱爲重複格。
7. 同側點：單一黑格中，任一邊的兩頂點稱爲同側點，共四組。
8. 對角點：單一黑格中，不互爲同側點的兩頂點稱爲對角點，共兩組。
9. 正方化：將相同大小的棋盤部分重疊，組成一正方形棋盤的過程。
10. 正方化棋盤：將棋盤正方化得到的正方形棋盤稱爲其正方化棋盤。

(二) 連線規則：

1. 在黑白格相間的棋盤上進行黑格連線：由棋盤左下角的黑格$(1,1)$開始連線到與其共點的黑格$(2,2)$，此時方向往右上，爲連線的原始方向，若連線未遇到棋盤邊的阻礙，則繼續沿此方向連線，如圖 3。

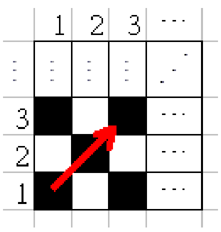


圖 3 $m \times n$棋盤連線原始方向

2. 若連線遇到棋盤邊的阻礙，則轉往另一個共點黑格所在的方向繼續連線。此步驟適用於遇到任何邊的阻礙時，平面上共有八種連線轉向情況如下表 1。

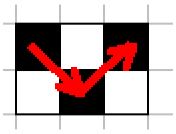
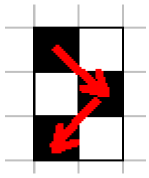
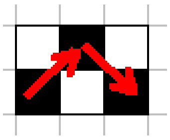
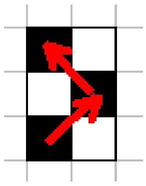
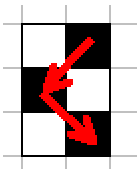
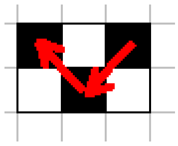
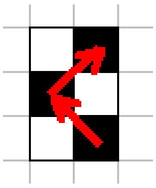
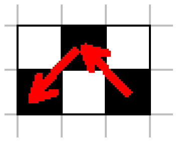
 連線方向由往右下轉而往右上	 連線方向由往右下轉而往左下
 連線方向由往右上轉而往右下	 連線方向由往右上轉而往左上
 連線方向由往左下轉而往右下	 連線方向由往左下轉而往左上
 連線方向由往左上轉而往右上	 連線方向由往左上轉而往左下

表 1 平面連線受阻轉向表

3. 若在 $m \times n$ 棋盤中進行黑格連線，完成連線過程可將所有黑格相連，則稱數對 (m,n) 符合黑格連線條件(圖 4 以數對 $(5,4)$ 爲例)；若無法將所有黑格相連，則稱數對 (m,n) 不符合黑格連線條件(圖 5 以數對 $(7,4)$ 爲例)。

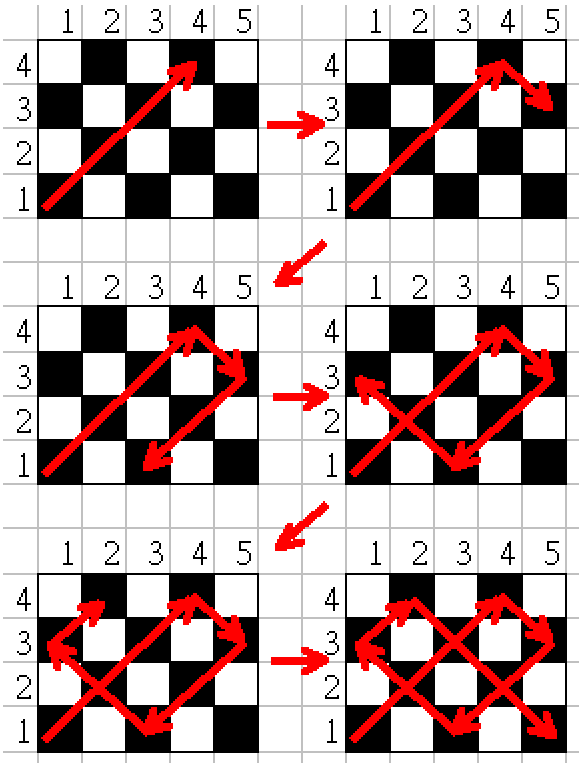


圖 4 5x4 棋盤黑格連線過程步驟圖

(完成連線過程且將所有黑格相連，故數對$(5,4)$符合黑格連線條件)

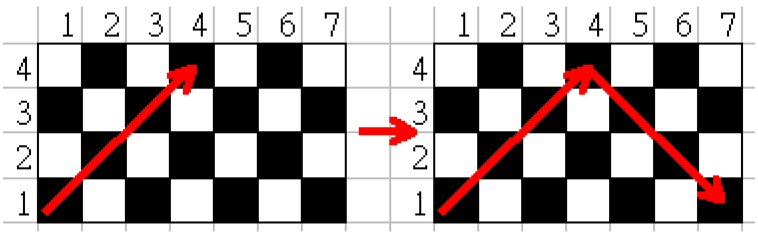


圖 5 7x4 棋盤黑格連線過程步驟圖

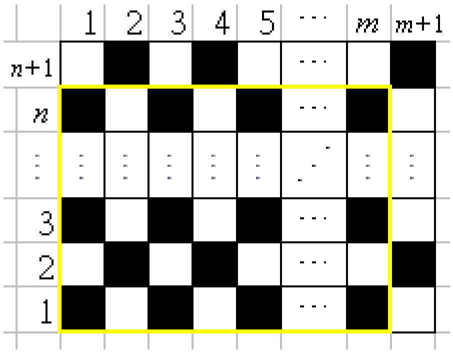
(完成連線過程卻無法將所有黑格相連，故數對$(7,4)$不符合黑格連線條件)

(三) $m \times n$棋盤的黑格總數：

$m \times n$棋盤中的黑格總數依照m, n的奇偶性不同分別討論：

1. 若m, n其中至少一數爲偶數時，$m \times n$棋盤中有偶數個方格，則黑格總數爲全部格數的一半，共$\frac{mn}{2}$格。
2. 若m, n皆爲奇數，可在構成的$m \times n$棋盤加入第$m+1$行及第$n+1$列使之成爲$(m+1)\times(n+1)$的偶數格棋盤(如圖 6)，此時共有$\frac{(m+1)(n+1)}{2}$格黑格，由於比$m \times n$棋盤多了在第$m+1$行及第$n+1$列的黑格共$\frac{m+1}{2}+\frac{n+1}{2}-1=\frac{m+n}{2}$格，故此時$m \times n$棋盤

中的黑格總數可表示爲$\frac{(m+1)(n+1)}{2}-\frac{m+n}{2}=\frac{mn+1}{2}$格。



3. 綜合以上，可知$m\times n$棋盤中的黑格總數爲$\left[\frac{mn+1}{2}\right]$格。

圖 6　$m\times n$奇數格棋盤黑格總數計算方法

(四) $m\times n$棋盤的重複格性質：

若(m,n)符合黑格連線條件，則連線過程必經過$m\times n$棋盤中的所有黑格，其中重複格皆不位在棋盤四邊(第 1 行、第m行、第 1 列、第n列)上，而是位在第 2 行至第$m-1$行以及第 2 列至第$n-1$列之間(如圖 7)。

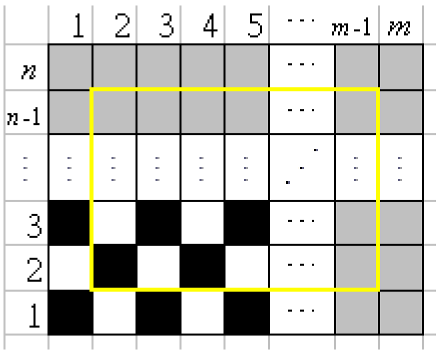


圖 7　$m\times n$棋盤中重複格位置
(即圖中黃色框線之範圍)

由於此範圍爲一$(m-2)\times(n-2)$棋盤，故其中黑格數依照m,n的奇偶性不同可表示爲：

1. 若m,n其中至少一數爲偶數，$m\times n$棋盤中有偶數個方格，則重複格最多有$\frac{(m-2)(n-2)}{2}=\frac{mn-2m-2n+4}{2}=\frac{mn}{2}-m-n+2$格。
2. 若m,n皆爲奇數，$m\times n$棋盤中有奇數個方格，則重複格數最多有$\frac{(m-2)(n-2)+1}{2}=\frac{mn-2m-2n+5}{2}=\frac{mn+1}{2}-m-n+2$格。
3. 綜合以上，$m\times n$棋盤中的重複格最多有$\left[\frac{mn+1}{2}\right]-m-n+2$格。

若(m,n)符合黑格連線條件，則重複格皆位在內圈$(m-2)\times(n-2)$棋盤中，而在此

$(m-2)\times(n-2)$棋盤四邊上的任一黑格，皆有至少一組同側點與外圈 $m\times n$ 棋盤四邊上的黑格共點(因 (m,n) 符合黑格連線條件，故連線必經過)，如圖 8 中紅色無方向連線顯示共點關係。

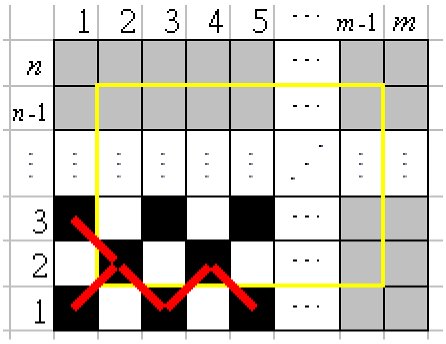


圖 8 外圈 $m\times n$ 棋盤邊上黑格與內圈 $(m-2)\times(n-2)$ 棋盤邊上黑格共點

又因爲經過同側點的兩連線連接黑格的方向必相互垂直(非同方向亦非反方向)，且連線經過黑格一次時，必經過該格的一組對角點，如此顯示在內圈 $(m-2)\times(n-2)$ 棋盤四邊上的黑格皆恰被連線經過兩次。

同理以 $(m-2)\times(n-2)$ 棋盤四邊作爲外圈，縮小內圈範圍至 $(m-4)\times(n-4)$ 棋盤、$(m-6)\times(n-6)$ 棋盤等，可逐次用相同方法證明之，最後得到，在內圈 $(m-2)\times(n-2)$ 棋盤中所有的黑格皆恰被連線經過兩次，即若某一黑格爲重複格，則該格必恰被連線經過兩次。

又由於一方格被連線經過時，連線進出方格各使用該格的一個頂點，而位於內圈 $(m-2)\times(n-2)$ 棋盤一邊上的黑格皆有四個頂點，所以這些黑格若爲重複格，則必恰被連線經過兩次。

(五) 正方化：

由於連線過程涉及不同方向的連線交錯，不便分析，故採棋盤正方化的「鏡射變換」來進行研究。棋盤正方化的詳細過程如下(附圖以 4x3 棋盤爲例)：

1. 取一 $m\times n$ 的黑白格已區分棋盤爲原棋盤。圖 9 爲 4x3 原棋盤。

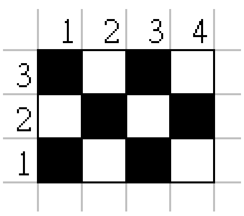


圖 9 4x3 原棋盤

2. 在原棋盤的第 n 列疊上另一 $m\times n$ 棋盤(黑白格未區分)的第 1 列，使得列數增爲

$2(n-1)+1$列；而在原棋盤的第 m 行疊上另一 $m\times n$ 棋盤(黑白格未區分)的第 1 行，使得列數增爲 $2(m-1)+1$行。圖 10 顯示 4x3 棋盤增加行列的方式，以行列各疊上一個棋盤爲例。

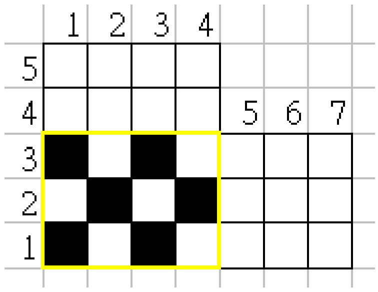


圖 10 4x3 棋盤行列增加方式

3. 因爲有黑格連線固定向右上方的限制，且已知在原棋盤完成連線過程的最後黑格必爲棋盤三角($(1,n)$、$(m,1)$、(m,n))其中之一，所以轉換至正方化棋盤時連線過程完成的最後黑格必在棋盤右上角，即棋盤必須爲正方形。
4. 依過程(二)將原棋盤正方化，使每在列方向上加上一 $m\times n$ 棋盤會增加 $n-1$列，每在行方向上加上一 $m\times n$ 棋盤會增加 $m-1$ 行，因此所得正方化棋盤邊長應爲 $\operatorname{lcm}(m-1,n-1)+1$格。圖 11 爲 4x3 黑白格未區分正方化棋盤。

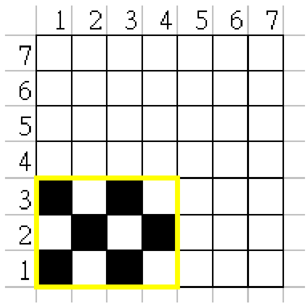


圖 11 4x3 黑白格未區分正方化棋盤

5. 將黑白格未區分的正方化棋盤作黑白格區分，使棋盤上所有格子皆區分爲黑格或白格，至此完成將 $m\times n$ 棋盤正方化，得到原棋盤的正方化棋盤。圖 12 爲 4x3 原棋盤的正方化棋盤，黑白格已區分。

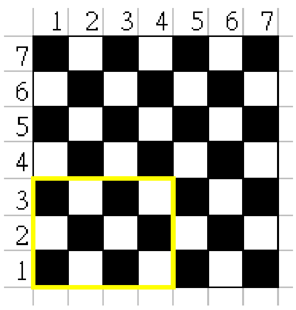


圖 12 4x3 正方化棋盤(黑白格已區分)

(六) 若 (m,n) 符合黑格連線條件，則 $m\times n$ 棋盤的黑格總數爲 $\left[\frac{mn+1}{2}\right]$ 格，重複格共 $\left[\frac{mn+1}{2}\right]-m-n+2$ 格，其正方化棋盤邊長爲 $\mathrm{lcm}(m-1,n-1)+1$ 格。

因爲在正方化棋盤中的黑格連線方向恆往右上方，故在各行各列皆經過一格，而完成連線過程時經過格數恰爲正方化棋盤的邊長格數。

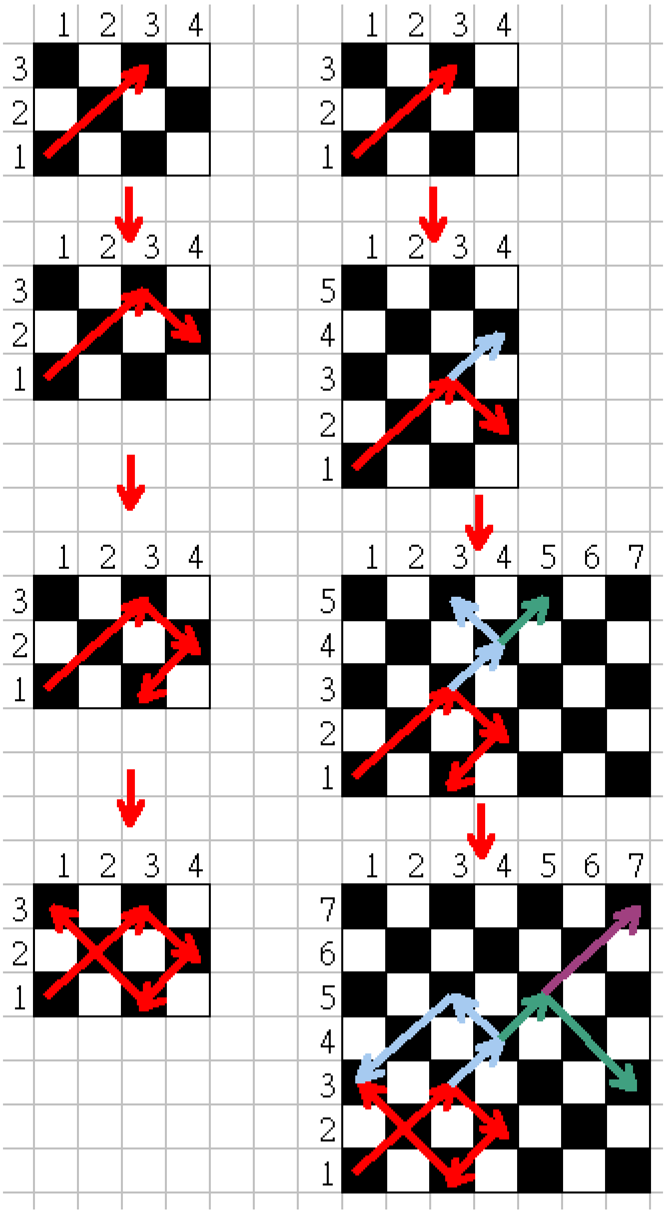


圖 13
4x3 原棋盤及正方化棋盤
黑格連線過程對照圖
左：原棋盤
右：正方化棋盤

如果 (m,n) 符合黑格連線條件，則在原棋盤和其正方化棋盤上完成連線過程的「經過格數」應相同，即 $m\times n$ 棋盤的「黑格總數」加上「重複格數」應等於「其正方化棋盤的邊長格數」，參考圖 13 的 4x3 原棋盤及正方化棋盤連線過程對照，列式爲

$\left[\frac{mn+1}{2}\right]+\left(\left[\frac{mn+1}{2}\right]-m-n+2\right)=\mathrm{lcm}(m-1,n-1)+1$，整理後可得到：

$$2\left[\frac{mn+1}{2}\right]-m-n+1=\operatorname{lcm}(m-1,n-1) \quad \text{—(1)}$$

此時若 m,n 皆爲奇數，則代入(1)式之等號左式會得到奇數，但右式爲偶數，等式不成立，而得到矛盾，由此知 m,n 皆爲奇數時，(m,n) 不符合黑格連線條件。

(七) 在排除 m,n 皆爲奇數的情況，因爲其他三種情況的 m,n 皆至少其中一數爲偶數，所以可用 $\frac{mn}{2}$ 代替 $\left[\frac{mn+1}{2}\right]$，將(1)式代換爲：

$$mn-m-n+1=\operatorname{lcm}(m-1,n-1) \quad \text{—(2)}$$

而 $m-1,n-1$ 兩數與其最大公因數 $\gcd(m-1,n-1)$ 和最小公倍數 $\operatorname{lcm}(m-1,n-1)$ 的關係爲 $\operatorname{lcm}(m-1,n-1)\gcd(m-1,n-1)=(m-1)(n-1)$，因此將(2)式等號左右同乘上 $\gcd(m-1,n-1)$，整理得：

$$(mn-m-n+1)\gcd(m-1,n-1)=(m-1)(n-1) \quad \text{—(3)}$$

再將(3)式等號左右同減 $\gcd(m-1,n-1)$，並作因式分解，得等式：

$$[\gcd(m-1,n-1)-1](m-1)(n-1)=0 \quad \text{—(4)}$$

解(4)式得 $\gcd(m-1,n-1)=1$ 或 $m=1$ 或 $n=1$，其中 $m=1$ 時僅 $n=1$ 可使 (m,n) 符合黑格連線條件；$n=1$ 時僅 $m=1$ 或 $m=2$ 可使 (m,n) 符合黑格連線條件；$m,n\geq 2$ 時，若 (m,n) 符合黑格連線條件，則 $\gcd(m-1,n-1)=1$ 必成立。如此驗證了原先的猜測，即 $\gcd(m-1,n-1)=1$ 是 (m,n) 符合黑格連線條件的必要條件。

觀察在 $m\times n$ 原棋盤和其正方化棋盤上完成連線過程，可知若「正方化棋盤的邊長格數」恰等於 $m\times n$ 原棋盤的「黑格總數」加上「重複格數」，即 $m\times n$ 原棋盤中的連線過程恰好經過所有黑格，此時 (m,n) 符合黑格連線條件。也就是說，當「$\gcd(m-1,n-1)=1$ 或 $m=1$ 或 $n=1$」時，(m,n) 必符合黑格連線條件。

綜合上述內容可以證明原先的猜測成立，即「(m,n) 符合黑格連線條件」與「$\gcd(m-1,n-1)=1$ 或 $m=1$ 或 $n=1$」互爲充要條件。

二、 立體黑格連線：

(一) 名詞解釋：

立體黑格連線研究中異動或新增的特殊名詞解釋如下：

1. 分層圖：以 z 個 $x\times y$ 棋盤表示 $x\times y\times z$ 棋盤的圖。

2. 黑白格區分：

(1) 如圖 14 為 $x\times y\times z$ 格棋盤之分層圖，並將行列層編號：由左至右依序為第 1 行至第 x 行，由前至後依序為第 1 列至第 y 列，由下至上依序為第 1 層至第 z 層，而每個格子可依所在行列層表示，(x,y,z) 即為第 x 行第 y 列第 z 層的格子。

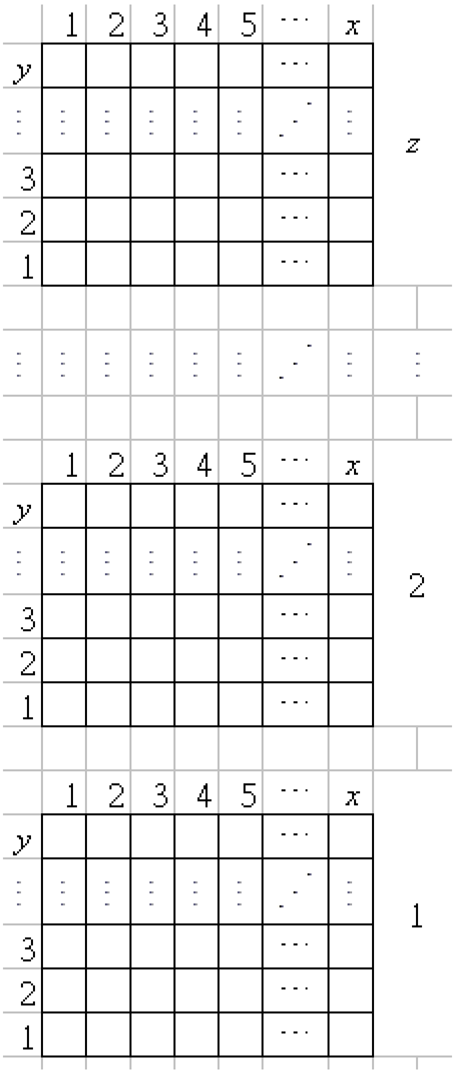


圖 14 $x\times y\times z$ 未區分黑白格棋盤(分層圖)

(2) 定 $x\times y\times z$ 棋盤(其中 x 為行數，y 為列數，z 為層數，且 $x\geq y\geq z$)上 $(1,1,1)$ 為黑格，且與 $(1,1,1)$ 共點的 $(2,2,2)$ 亦為黑格，而與黑格 $(2,2,2)$ 共邊的方格為白格，與 $(2,2,2)$ 共點不共邊的方格為黑格。同理推廣至產生的黑格皆共點不共邊，其他與黑格共邊的方格則定為白格。並如圖 15 作黑白格區分，使棋盤上所有格子皆區分為黑格或白格且黑白相間。

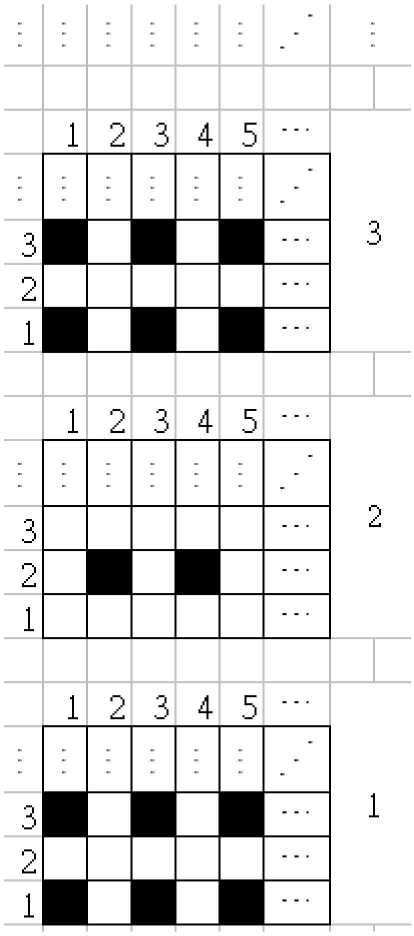


圖 15　$x \times y \times z$ 棋盤黑白格區分(分層圖)

3. 黑格連線：依本研究訂立的特定規則(肆、二、(二))，任取三正整數 x, y, z 構成 $x \times y \times z$ 黑白格相間棋盤，並以連線連接黑格的動作。
4. 連線方向 $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$：正號表示連線移動一格時該分量的數字增加，負號則反之。
5. 立方化：將相同大小的棋盤部分重疊，組成一立方體棋盤的過程。
6. 原棋盤：被進行立方化的 $x \times y \times z$ 棋盤(黑白格已區分)。
7. 立方化棋盤：將棋盤立方化得到的立方體棋盤稱爲其立方化棋盤。

(二) 立體黑格連線規則：

1. 在黑白格相間的棋盤上進行黑格連線：由$(1,1,1)$開始連線到與其共點的黑格$(2,2,2)$如圖 16，此時方向爲$(+1,+1,+1)$，爲連線的原始方向，若連線未遇到棋盤面或稜的阻礙，則繼續沿此方向連線。

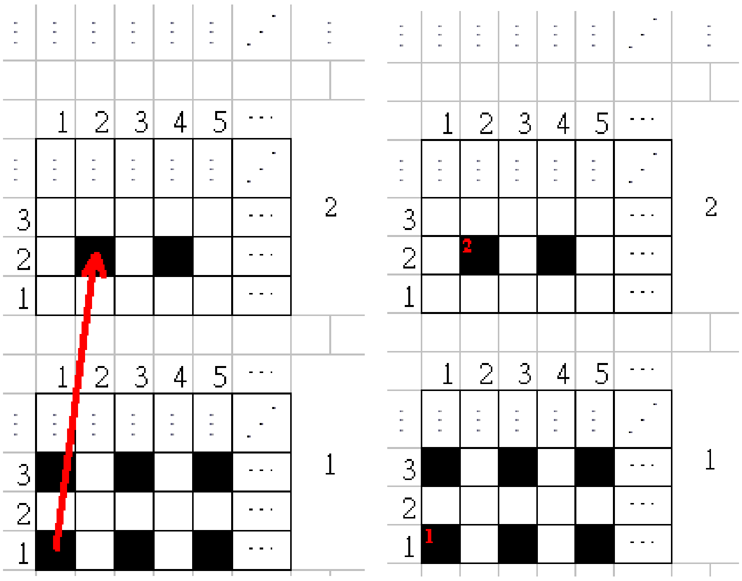


圖 16
$x \times y \times z$ 棋盤
連線原始方向(分層圖)
左：圖示法
右：順序數字表示

2. 若連線遇到棋盤面或稜的阻礙，則轉往另一個共點黑格所在的方向繼續連線(表 2 爲所有情況)。此步驟適用於遇到任何邊的阻礙時。

以 6x4x3 棋盤的連線過程(圖 17 及圖 18)爲例，若連線遇到棋盤面的阻礙，則表示連線方向 $(\pm1,\pm1,\pm1)$ 中有一分量前進受阻，因此其他兩分量可沿原方向連線，但受阻分量則轉往另一共點黑格所在方向繼續連線，如第 3 格至第 4 格時方向由 $(+1,+1,+1)$ 改爲 $(+1,+1,-1)$；若連線遇到棋盤稜的阻礙，則表示連線方向 $(\pm1,\pm1,\pm1)$ 中有兩分量前進受阻，因此餘下一分量可沿原方向連線，但受阻分量則轉往另一共點黑格所在方向繼續連線，如第 7 格至第 8 格時方向由 $(-1,-1,+1)$ 改爲 $(-1,+1,-1)$。

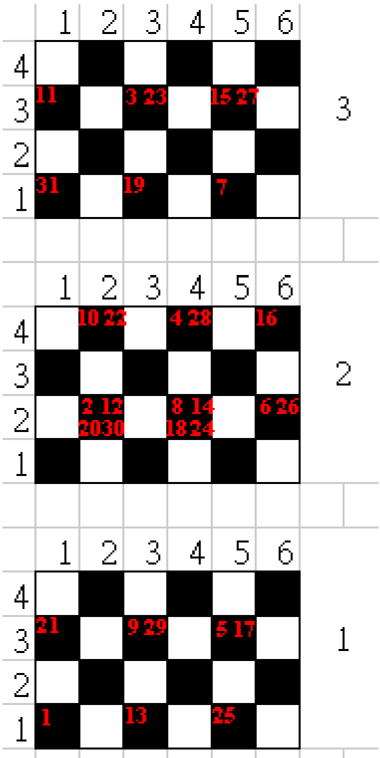


圖 17 6x4x3 棋盤的連線過程順序數字表示法(分層圖)

$$
\begin{aligned}
&(1,1,1)\xrightarrow{(+1,+1,+1)}(2,2,2)\xrightarrow{(+1,+1,+1)}(3,3,3)\xrightarrow{(+1,+1,-1)}(4,4,2)\xrightarrow{(+1,-1,-1)}\\
&(5,3,1)\xrightarrow{(+1,-1,+1)}(6,2,2)\xrightarrow{(-1,-1,+1)}(5,1,3)\xrightarrow{(-1,+1,-1)}(4,2,2)\xrightarrow{(-1,+1,-1)}\\
&(3,3,1)\xrightarrow{(-1,+1,+1)}(2,4,2)\xrightarrow{(-1,-1,+1)}(1,3,3)\xrightarrow{(+1,-1,-1)}(2,2,2)\xrightarrow{(+1,-1,-1)}\\
&(3,1,1)\xrightarrow{(+1,+1,+1)}(4,2,2)\xrightarrow{(+1,+1,+1)}(5,3,3)\xrightarrow{(+1,+1,-1)}(6,4,2)\xrightarrow{(-1,-1,-1)}\\
&(5,3,1)\xrightarrow{(-1,-1,+1)}(4,2,2)\xrightarrow{(-1,-1,+1)}(3,1,3)\xrightarrow{(-1,+1,-1)}(2,2,2)\xrightarrow{(-1,+1,-1)}\\
&(1,3,1)\xrightarrow{(+1,+1,+1)}(2,4,2)\xrightarrow{(+1,-1,+1)}(3,3,3)\xrightarrow{(+1,-1,-1)}(4,2,2)\xrightarrow{(+1,-1,-1)}\\
&(5,1,1)\xrightarrow{(+1,+1,+1)}(6,2,2)\xrightarrow{(-1,+1,+1)}(5,3,3)\xrightarrow{(-1,+1,-1)}(4,4,2)\xrightarrow{(-1,-1,-1)}\\
&(3,3,1)\xrightarrow{(-1,-1,+1)}(2,2,2)\xrightarrow{(-1,-1,+1)}(1,1,3)
\end{aligned}
$$

圖 18 6x4x3 棋盤的連線過程中經過格與方向改變

$V_1(+1,+1,+1)\begin{cases}F_2(+1,-1,+1)\\F_4(-1,+1,+1)\\F_5(+1,+1,-1)\\E_7(-1,+1,-1)\\E_{10}(+1,-1,-1)\\E_{11}(-1,-1,+1)\end{cases}$	$V_2(+1,+1,-1)\begin{cases}F_2(+1,-1,-1)\\F_4(-1,+1,-1)\\F_6(+1,+1,+1)\\E_8(-1,+1,+1)\\E_{11}(-1,-1,-1)\\E_{12}(+1,-1,+1)\end{cases}$
$V_3(-1,+1,-1)\begin{cases}F_2(-1,-1,-1)\\F_3(+1,+1,-1)\\F_6(-1,+1,+1)\\E_5(+1,+1,+1)\\E_9(+1,-1,-1)\\E_{12}(-1,-1,+1)\end{cases}$	$V_4(-1,+1,+1)\begin{cases}F_2(-1,-1,+1)\\F_3(+1,+1,+1)\\F_5(-1,+1,-1)\\E_6(+1,+1,-1)\\E_9(+1,-1,+1)\\E_{10}(-1,-1,-1)\end{cases}$
$V_5(+1,-1,+1)\begin{cases}F_1(+1,+1,+1)\\F_4(-1,-1,+1)\\F_5(+1,-1,-1)\\E_2(+1,+1,-1)\\E_3(-1,+1,+1)\\E_7(-1,-1,-1)\end{cases}$	$V_6(+1,-1,-1)\begin{cases}F_1(+1,+1,-1)\\F_4(-1,-1,-1)\\F_6(+1,-1,+1)\\E_2(+1,+1,+1)\\E_3(-1,+1,-1)\\E_7(-1,-1,+1)\end{cases}$
$V_7(-1,-1,-1)\begin{cases}F_1(-1,+1,-1)\\F_3(+1,-1,-1)\\F_6(-1,-1,+1)\\E_1(+1,+1,-1)\\E_4(-1,+1,+1)\\E_5(+1,-1,+1)\end{cases}$	$V_8(-1,-1,+1)\begin{cases}F_1(-1,+1,+1)\\F_3(+1,-1,+1)\\F_5(-1,-1,-1)\\E_1(+1,+1,+1)\\E_2(-1,+1,-1)\\E_6(+1,-1,-1)\end{cases}$

表 2 立體連線受阻轉向表

3. 若在 $x\times y\times z$ 棋盤中進行黑格連線，完成連線過程可將所有黑格相連，即連線可經過所有黑格時，則稱數對 (x,y,z) 符合黑格連線條件，反之則否。

(三) $x\times y\times z$ 棋盤的黑格總數：

$x\times y\times z$ 棋盤中的黑格總數依照 x,y,z 的奇偶性不同分別討論，利用分層圖將 $x\times y$ 棋盤由下往上兩層一組疊置，一組中的黑格數相當於一個平面 $x\times y$ 棋盤中的黑格總數。若 z 爲偶數，則將 $x\times y$ 棋盤中的黑格總數乘以 $\frac{z}{2}$ 得 $x\times y\times z$ 棋盤的黑格總數；若

z 爲奇數，則以 $\frac{z-1}{2}$ 代替 $\frac{z}{2}$，再加上第 z 層的黑格數。以下爲八種情形時 $x\times y\times z$ 棋盤中的黑格總數：

1. A：若 x,y,z 皆爲偶數，則共 $\frac{xyz}{4}$ 格。
2. B：若 x,y 爲偶數，z 爲奇數，則共 $\left(\frac{xy}{2}\right)\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{xy}{4}=\frac{xyz}{4}$ 格。
3. C：若 x,z 爲偶數，y 爲奇數，則共 $\frac{xyz}{4}$ 格。
4. D：若 y,z 爲偶數，x 爲奇數，則共 $\frac{xyz}{4}$ 格。
5. E：若 x 爲偶數，y,z 爲奇數，則共 $\left(\frac{xy}{2}\right)\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{x(y+1)}{4}=\frac{x(yz+1)}{4}=\frac{xyz+x}{4}$ 格。
6. F：若 y 爲偶數，x,z 爲奇數，則共 $\left(\frac{xy}{2}\right)\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{(x+1)y}{4}=\frac{y(xz+1)}{4}=\frac{xyz+y}{4}$ 格。
7. G：若 z 爲偶數，x,y 爲奇數，則共 $\left(\frac{xy+1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{z(xy+1)}{4}=\frac{xyz+z}{4}$ 格。
8. H：若 x,y,z 皆爲奇數，則共 $\left(\frac{xy+1}{2}\right)\left(\frac{z-1}{2}\right)+\frac{(x+1)(y+1)}{4}=\frac{y(xz+1)}{4}=\frac{xyz+x+y+z}{4}$ 格。
9. 綜合以上，知 $x\times y\times z$ 棋盤中的黑格總數共 $\left[\frac{xy+1}{2}\right]\left[\frac{z}{2}\right]+\left[\frac{x+1}{2}\right]\left[\frac{y+1}{2}\right]\frac{1-(-1)^z}{2}$ 格。

(四) $x\times y\times z$ 棋盤的重複格性質：

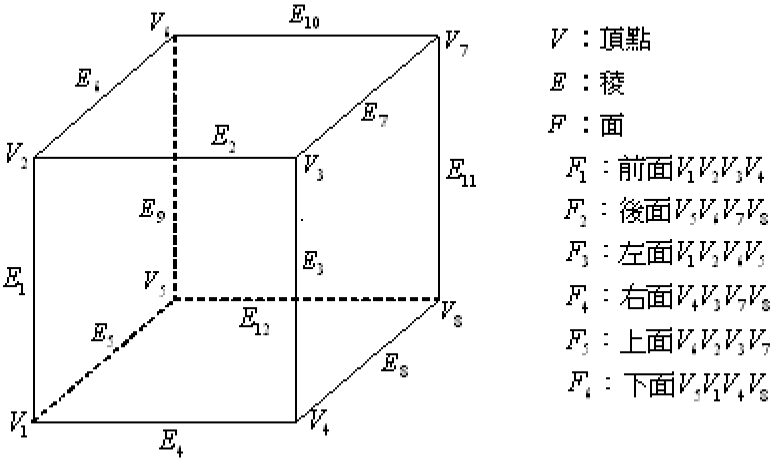


圖 19　$x\times y\times z$ 棋盤中頂點、面、稜位置

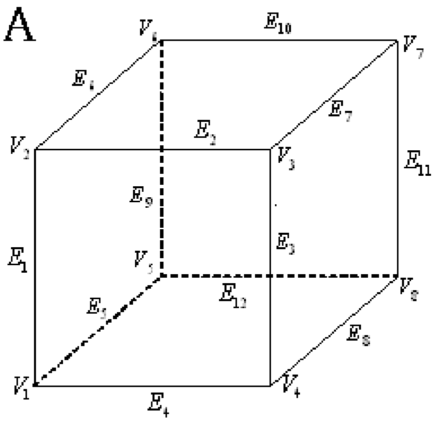
依圖 19 定義 V 爲頂點，E 爲棋盤邊扣除兩端頂點的稜，F 爲棋盤面扣除四邊的面，

並編號之，而這些格以外的格稱爲內層格。

若(x,y,z)符合黑格連線條件，則連線過程必經過$x\times y\times z$棋盤中的所有黑格，參考肆、四中分析平面黑格連線重複格被經過次數的「共點」方法，對E,F和內層的黑格，根據有共點黑格的頂點數可推算重複經過次數：

1. V上的黑格只有一個共點黑格，故不被重複經過。
2. E上的黑格有兩個共點黑格，故不被重複經過。
3. F上的黑格有四個共點黑格，故被重複經過兩次。
4. 內層黑格都各有兩個八點黑格，故被重複經過四次。

若(x,y,z)符合黑格連線條件，則連線進出棋盤各需一黑格，即總共兩個角上黑格，因此x,y,z中至少兩數爲偶數，故能令(x,y,z)符合黑格連線條件的x,y,z，只剩下A,B,C,D，其重複格性質如圖 20 至圖 23。



x,y,z皆為偶數

黑格總數：$\frac{xyz}{4}$

內層黑格數：$\frac{(x-2)(y-2)(z-2)}{4}$

$V_1=1 \quad V_2=0 \quad V_3=0 \quad V_4=0$

$V_5=0 \quad V_6=0 \quad V_7=1 \quad V_8=0$

$V_A=2$

$E_1=\frac{z-2}{2} \quad E_2=0 \quad E_3=0 \quad E_4=\frac{x-2}{2}$

$E_5=\frac{y-2}{2} \quad E_6=0 \quad E_7=\frac{y-2}{2} \quad E_8=0$

$E_9=0 \quad E_{10}=\frac{x-2}{2} \quad E_{11}=\frac{z-2}{2} \quad E_{12}=0$

$$E_A=2\left(\frac{x-2}{2}+\frac{y-2}{2}+\frac{z-2}{2}\right)=x+y+z-6$$

$$F_1=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{z-2}{2}\right)=\frac{xz-2x-2z+4}{4}$$

$$F_2=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{z-2}{2}\right)=\frac{xz-2x-2z+4}{4}$$

$$F_3=\left(\frac{y-2}{2}\right)\left(\frac{z-2}{2}\right)=\frac{yz-2y-2z+4}{4}$$

$$F_4=\left(\frac{y-2}{2}\right)\left(\frac{z-2}{2}\right)=\frac{yz-2y-2z+4}{4}$$

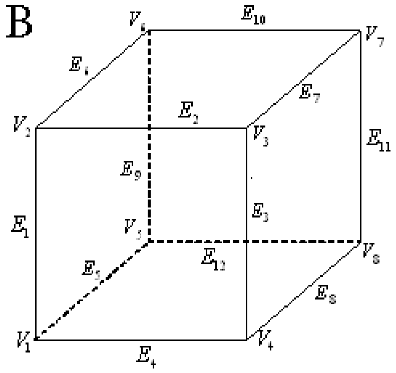
$$F_5=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{y-2}{2}\right)=\frac{xy-2x-2y+4}{4}$$

$$F_6=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{y-2}{2}\right)=\frac{xy-2x-2y+4}{4}$$

$$F_A=F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6=\frac{xy+yz+xz-4x-4y-4z+12}{2}$$

圖 20 $x\times y\times z$棋盤中A頂點、面、稜位置

B



x,y 為偶數，z 為奇數

黑格總數：$\frac{xyz}{4}$

內層黑格數：$\frac{(x-2)(y-2)(z-2)}{4}$

$V_1=1\quad V_2=1\quad V_3=0\quad V_4=0$

$V_5=0\quad V_6=0\quad V_7=0\quad V_8=0$

$V_B=2$

$E_1=\frac{(z-2)-1}{2}=\frac{z-3}{2}\quad E_2=\frac{x-2}{2}\quad E_3=0\quad E_4=\frac{x-2}{2}$

$E_5=\frac{y-2}{2}\quad E_6=\frac{y-2}{2}\quad E_7=0\quad E_8=0$

$E_9=0\quad E_{10}=0\quad E_{11}=\frac{(z-2)+1}{2}=\frac{z-1}{2}\quad E_{12}=0$

$$E_B=2\left(\frac{x-2}{2}+\frac{y-2}{2}\right)+\frac{z-3}{2}+\frac{z-1}{2}=x+y+z-6$$

$$F_1=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{z-3}{2}\right)=\frac{xz-3x-2z+6}{4}$$

$$F_2=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{z-1}{2}\right)=\frac{xz-x-2z+2}{4}$$

$$F_3=\left(\frac{y-2}{2}\right)\left(\frac{z-3}{2}\right)=\frac{yz-3y-2z+6}{4}$$

$$F_4=\left(\frac{y-2}{2}\right)\left(\frac{z-1}{2}\right)=\frac{yz-y-2z+2}{4}$$

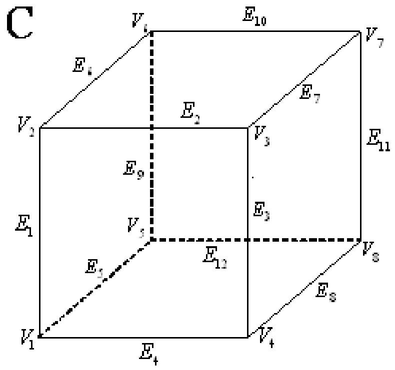
$$F_5=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{y-2}{2}\right)=\frac{xy-2x-2y+4}{4}$$

$$F_6=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{y-2}{2}\right)=\frac{xy-2x-2y+4}{4}$$

$$F_B=F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6=\frac{xy+yz+xz-4x-4y-4z+12}{2}$$

圖 21　$x\times y\times z$ 棋盤中 B 頂點、面、稜位置

C



x,z 為偶數，y 為奇數

黑格總數：$\frac{xyz}{4}$

內層黑格數：$\frac{(x-2)(y-2)(z-2)}{4}$

$V_1=1\quad V_2=0\quad V_3=0\quad V_4=0$

$V_5=1\quad V_6=0\quad V_7=0\quad V_8=0$

$V_C=2$

$E_1=\frac{z-2}{2}\quad E_2=\frac{x-2}{2}\quad E_3=0\quad E_4=0$

$E_5=\frac{(y-2)-1}{2}=\frac{y-3}{2}\quad E_6=0\quad E_7=\frac{(y-2)+1}{2}=\frac{y-1}{2}\quad E_8=0$

$E_9=\frac{z-2}{2}\quad E_{10}=0\quad E_{11}=0\quad E_{12}=\frac{x-2}{2}$

$$E_C=2\left(\frac{x-2}{2}+\frac{z-2}{2}\right)+\frac{y-3}{2}+\frac{y-1}{2}=x+y+z-6$$

$$F_1=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{z-3}{2}\right)=\frac{xz-3x-2z+6}{4}$$

$$F_2=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{z-1}{2}\right)=\frac{xz-x-2z+2}{4}$$

$$F_3=\left(\frac{y-3}{2}\right)\left(\frac{z-2}{2}\right)=\frac{yz-2y-3z+6}{4}$$

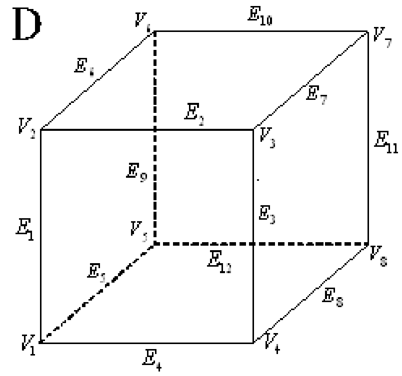
$$F_4=\left(\frac{y-1}{2}\right)\left(\frac{z-2}{2}\right)=\frac{yz-2y-z+2}{4}$$

$$F_5=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{y-1}{2}\right)=\frac{xy-x-2y+2}{4}$$

$$F_6=\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{y-3}{2}\right)=\frac{xy-3x-2y+6}{4}$$

$$F_C=F_1+F_2+F_3+F_4+F_5+F_6=\frac{xy+yz+xz-4x-4y-4z+12}{2}$$

圖 22　$x\times y\times z$ 棋盤中 C 頂點、面、稜位置



y, z 為偶數， x 為奇數

黑格總數：$\frac{xyz}{4}$

內層黑格數：$\frac{(x-2)(y-2)(z-2)}{4}$

$V_1 = 1 \quad V_2 = 0 \quad V_3 = 0 \quad V_4 = 1$

$V_5 = 0 \quad V_6 = 0 \quad V_7 = 0 \quad V_8 = 0$

$V_D = 2$

$E_1 = \frac{z-2}{2} \quad E_2 = 0 \quad E_3 = \frac{z-2}{2} \quad E_4 = \frac{(x-2)-1}{2} = \frac{x-3}{2}$

$E_5 = \frac{y-2}{2} \quad E_6 = 0 \quad E_7 = 0 \quad E_8 = \frac{y-2}{2}$

$E_9 = 0 \quad E_4 = \frac{(x-2)+1}{2} = \frac{x-1}{2} \quad E_{11} = 0 \quad E_{12} = 0$

$$E_D = 2\left(\frac{y-2}{2} + \frac{z-2}{2}\right) + \frac{x-3}{2} + \frac{x-1}{2} = x + y + z - 6$$

$$F_1 = \left(\frac{x-3}{2}\right)\left(\frac{z-2}{2}\right) = \frac{xz - 2x - 3z + 6}{4}$$

$$F_2 = \left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{z-2}{2}\right) = \frac{xz - 2x - z + 2}{4}$$

$$F_3 = \left(\frac{y-2}{2}\right)\left(\frac{z-2}{2}\right) = \frac{yz - 2y - 2z + 4}{4}$$

$$F_4 = \left(\frac{y-2}{2}\right)\left(\frac{z-2}{2}\right) = \frac{yz - 2y - 2z + 4}{4}$$

$$F_5 = \left(\frac{x-3}{2}\right)\left(\frac{y-2}{2}\right) = \frac{xy - 2x - 3y + 6}{4}$$

$$F_6 = \left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{y-2}{2}\right) = \frac{xy - 2x - y + 2}{4}$$

$$F_D = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = \frac{xy + yz + xz - 4x - 4y - 4z + 12}{2}$$

圖 23　$x \times y \times z$ 棋盤中 D 頂點、面、稜位置

綜合以上，重複格中重複兩次有 $F = \frac{xy + yz + xz - 4x - 4y - 4z + 12}{2}$ 格，重複四次的內層黑格數為 $\frac{(x-2)(y-2)(z-2)}{4}$ 格。

(五) 立方化：

棋盤立方化亦爲「鏡射變換」的研究方式。詳細過程如下(附圖以 6×4×3 棋盤爲例)：

1. 取一 $x \times y \times z$ 的黑白格已區分棋盤爲原棋盤。圖 24 爲 6×4×3 原棋盤。

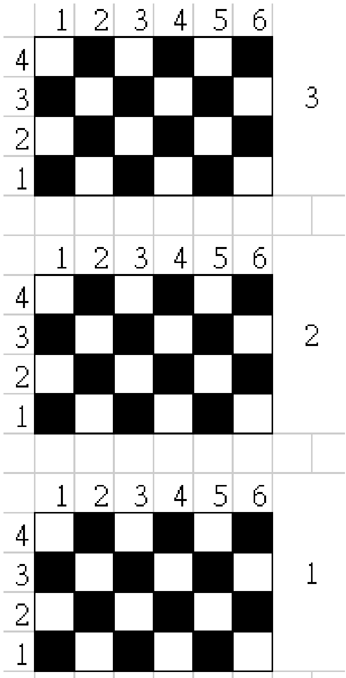


圖 24 6×4×3 原棋盤(分層圖)

2. 在原棋盤的第 y 列疊上另一 $x\times y\times z$ 棋盤(黑白格未區分)的第 1 列，使得列數增爲 $2(y-1)+1$ 列；在原棋盤的第 x 行疊上另一 $x\times y\times z$ 棋盤(黑白格未區分)的第 1 行，使得列數增爲 $2(x-1)+1$ 行；在原棋盤的第 z 層疊上另一 $x\times y\times z$ 棋盤(黑白格未區分)的第 1 層，使得列數增爲 $2(z-1)+1$ 層。圖 25 顯示 6x4x3 棋盤增加行列層的方式，以行列層各疊上一個棋盤爲例。

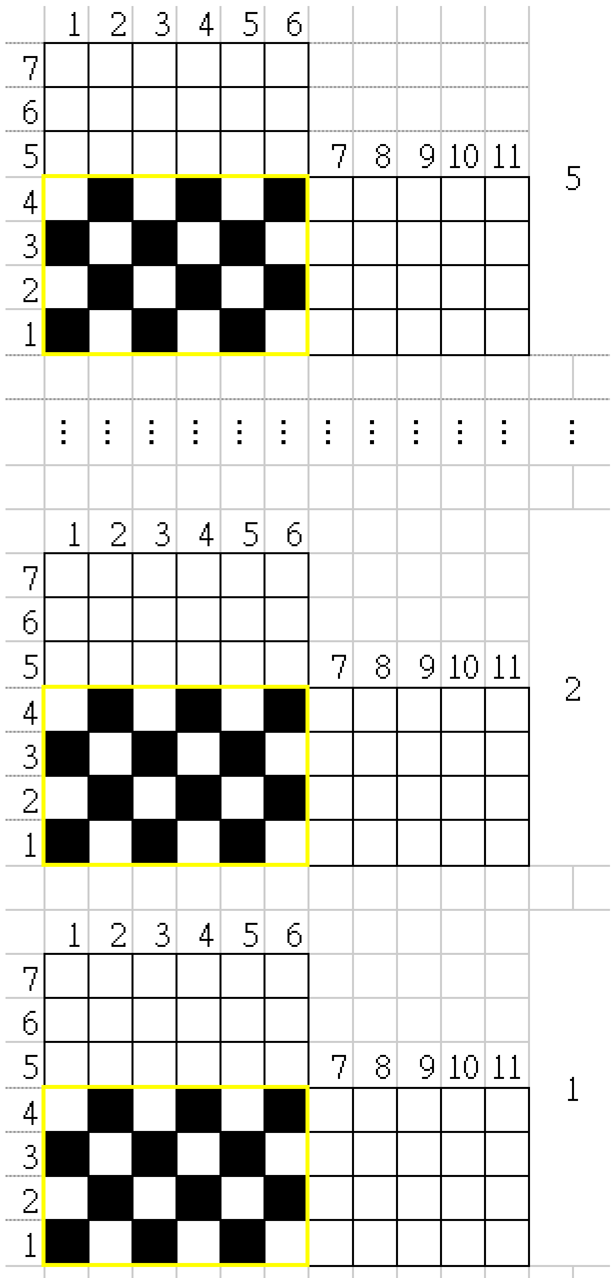


圖 25 6x4x3 棋盤行列層增加方式(分層圖)

3. 有黑格連線方向固定 $(+1,+1,+1)$ 的限制，且已知在原棋盤完成連線過程的最後黑格必爲棋盤七頂點 $(V_2,V_3,V_4,V_5,V_6,V_7,V_8)$ 其中之一，因此轉換至立方化棋盤時連線過程完成的最後黑格必在 V_7，即棋盤必須爲立方體。

4. 依過程(二)將原棋盤作立方化，使每在列方向上加上一 $x\times y\times z$ 棋盤會增加 $y-1$ 列，而每在行方向上加上一 $x\times y\times z$ 棋盤會增加 $x-1$ 行，而每在層方向上加上一 $x\times y\times z$ 棋盤會增加 $z-1$ 層，因此得到的立方化棋盤邊長應爲 $\mathrm{lcm}(x-1,y-1,z-1)+1$ 格。
5. 將黑白格未區分立方化棋盤作黑白格區分，使棋盤上所有格子皆區分爲黑格或白格，至此完成將 $x\times y\times z$ 棋盤立方化，得到原棋盤的立方化棋盤。

(六) 若 (x,y,z) 符合黑格連線條件，已知符合的 $x\times y\times z$ 棋盤中黑格總數爲 $\frac{xyz}{4}$ 格，重複格中重複兩次者 $\frac{xy+yz+xz-4x-4y-4z+12}{2}$ 格，重複四次者 $\frac{(x-2)(y-2)(z-2)}{4}$ 格，而其立方化棋盤邊長爲 $\mathrm{lcm}(x-1,y-1,z-1)+1$ 格。

因爲在立方化棋盤中的黑格連線方向恆爲 $(+1,+1,+1)$，故在各行列層皆經過一格，而完成連線過程時經過格數恰爲立方化棋盤的邊長格數。

如果 (x,y,z) 符合黑格連線條件，則在原棋盤和其立方化棋盤上完成連線過程「經過黑格數」應相同，即 (x,y,z) 棋盤的「黑格總數」加上「重複格數」乘「經過次數」應等於其「立方化棋盤的邊長格數」，列式爲

$$2+(x+y+z-6)+2\left(\frac{xy+yz+xz-4x-4y-4z+12}{2}\right)+4\left(\frac{(x-2)(y-2)(z-2)}{4}\right),$$
$$=\mathrm{lcm}(x-1,y-1,z-1)+1$$

整理後可得到：

$$xyz-xy-yz-xz+x+y+z-1=\mathrm{lcm}(x-1,y-1,z-1) \qquad —(1)$$

(1)式可整理得 $(x-1)(y-1)(z-1)=\mathrm{lcm}(x-1,y-1,z-1)$ —(2)

若要解(2)式，先假設 $x-1,y-1,z-1$ 三數兩兩互質，則三數與其最大公因數 $\gcd(x-1,y-1,z-1)$ 和最小公倍數 $\mathrm{lcm}(x-1,y-1,z-1)$ 的關係爲 $(x-1)(y-1)(z-1)=(\gcd(x-1,y-1,z-1))^2\,\mathrm{lcm}(x-1,y-1,z-1)$，因此將(2)式等號左右同除以 $\mathrm{lcm}(x-1,y-1,z-1)$，整理得 $(\gcd(x-1,y-1,z-1))^2=1$ —(3)

解(3)式得正數解 $\gcd(x-1,y-1,z-1)=1$，與三數兩兩互質的假設相符，故知三數 $x-1,y-1,z-1$ 兩兩互質時 (x,y,z) 符合黑格連線條件，亦爲 (x,y,z) 符合黑格連線條件的必要條件。

若「立方化棋盤的邊長格數」等於原 $x \times y \times z$ 棋盤的「黑格總數」加上「重複格數」乘「重複次數」，則對應至原 $x \times y \times z$ 棋盤中的連線過程可經過所有黑格，即 (x, y, z) 符合黑格連線條件。而由於「連線過程經過格數相等」意同於「$\gcd(x-1, y-1, z-1) = 1$」而 $\gcd(x-1, y-1, z-1) = 1$ 要轉換回(1)式必須滿足 $x-1, y-1, z-1$ 兩兩互質，又驗證亦爲 (x, y, z) 符合黑格連線條件的充分條件。

至此，得到當 $x, y, z \geq 2$ 時「(x, y, z) 符合黑格連線條件」與依照「連線過程經過格數相等」推算出一連串等式得到的「$x-1, y-1, z-1$ 兩兩互質」互爲充要條件，而當 $x = y = z = 1$ 或 $x = 2, y = z = 1$ 或 $x = y = 2, z = 1$ 時，(x, y, z) 亦符合黑格連線條件，可合併至上述條件式中。

伍、研究結果

一、 平面黑格連線($m \times n$ 棋盤，其中 $m \geq n$)：

(一) $m \times n$ 棋盤的黑格總數爲 $\left[\frac{mn+1}{2}\right]$ 格。

(二) 若 (m, n) 符合黑格連線條件，則在 $m \times n$ 棋盤中的重複格被連線經過兩次且共有 $\left[\frac{mn+1}{2}\right] - m - n + 2$ 格。

(三) 「(m, n) 符合黑格連線條件」和「$m = n = 1$ 或 $m = 2, n = 1$ 或 $\gcd(m-1, n-1) = 1$ (即 $m-1, n-1$ 互質，$m, n \geq 2$ 時)」互爲充要條件。

二、 立體黑格連線($x \times y \times z$ 棋盤，其中 $x, y, z \geq 2$)：

(一) $x \times y \times z$ 棋盤的黑格總數爲 $\left[\frac{xy+1}{2}\right]\left[\frac{z}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right]\left[\frac{y+1}{2}\right]\frac{1-(-1)^z}{2}$ 格。

(二) 當 (x, y, z) 符合黑格連線條件時，$x \times y \times z$ 棋盤中的重複格性質可依重複經過次數分類：

1. 重複兩次有 $\frac{xy + yz + xz - 4x - 4y - 4z + 12}{2}$ 格($x, y, z \geq 2$ 時)。
2. 重複四次的內層黑格數爲 $\frac{(x-2)(y-2)(z-2)}{4}$ 格($x, y, z \geq 2$ 時)。

(三) 「(x, y, z) 符合黑格連線條件」和「$x = y = z = 1$ 或 $x = 2, y = z = 1$ 或 $x = y = 2, z = 1$ 或 $x-1, y-1, z-1$ 兩兩互質(即 $x, y, z \geq 2$ 時)」互爲充要條件。

陸、推廣討論

本研究最初目標僅設定完成平面黑格連線，後成功推廣至立體情況，以下是後續推廣目標及預計進行之相關研究：

一、 求出高維度棋盤符合黑格連線的條件。目前發現此推廣面臨高維度中點、線、面、高維度體個數及相互連接的問題，由實例進行黑格連線後，猜測結果與二維、三維相仿(各維度的格數減一之值必須兩兩互質)。

二、 $m \times n$ 棋盤中，將連線視爲繩，連線第二次經過黑格時，依序向前一條連線上方、下方通過，最後將黑格相連後，繩拉緊所能產生的繩結數，範例如圖 26，拉緊共一個結：

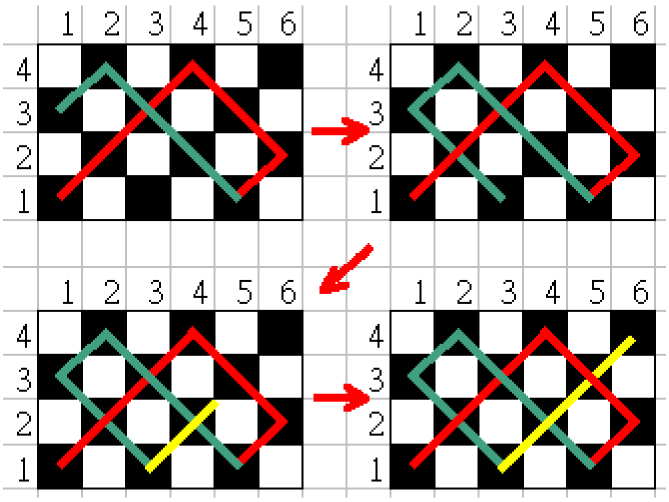


圖 26 6x4 棋盤黑格連線繩結圖過程：
綠線通過紅線上方
綠線通過紅線下方
黃線通過綠線上方
黃線通過紅線下方

此推廣尚未有關鍵性突破，預估可能最多發展至三維空間，期待未來的研究中能有所突破。

柒、參考資料

李信昌(無日期)。落網--球台數學。民國 94 年 3 月 25 日，取自：http://www.mathland.idv.tw/contest/mathprize/873/873.htm

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國中組 數學科

佳作

030420

黑格連線

臺北市立龍山國民中學

評語：

利用鏡射的概念處理棋盤上的走法問題，構思不錯，對二維、三維棋盤也給了完整的解答，是一件不錯的作品。