中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030418

積頂玄機

屏東縣立中正國民中學

作者姓名：

國二 楊舜丞 國二 陳躍中

指導老師：

洪連煌 林靜怡

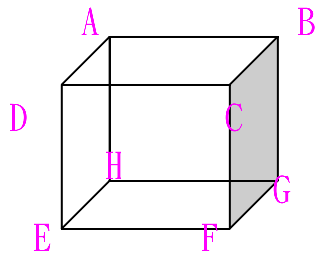
摘要：

　　本研究主要在求證班上同學有關『正方體（形）頂點數字謎』之解是否為真，並進一步延伸探究本研究小組有關『母子正方體頂點數字關係之玄機』的猜測。

　　這段研究期間要感謝老師辛苦的指導，希望我們用心完成的作品，能作為對這有興趣的同學參考依據。

壹、研究動機：

有一次數學課的動動腦時間，老師透過圖一之正方體提出下列兩個問題：



（圖一）

問題：

一、找出四個數字分別置於正方形 ABCD 的四頂點上，使各頂點數字的兩倍都等於其相鄰兩頂點上的數字和。

二、找出八個數字分別置於正方體的八個頂點上，使各頂點數字之三倍都等於其相鄰的三頂點上的數字和。

　　無論問題一或問題二，全班同學絞盡腦汁地提出了找出好多組不同的解，但這些解都有一共同的特色—『同一組解中各頂點數字必須完全相等』。不信邪！我們再努力試了好久，仍找不出另一組異樣的解。

　　因此，大家就紛肯定地回應『各頂點數字必須完全相同』，但老師認為這只能算是一種直覺上的猜測，此一猜測是否為真，仍須進一步地求證。在老師的鼓勵下，於是我們就組了一個研究小組，著手進行這個為期約半年的「求真之旅」。

貳、研究目的：

一、求證『若正方形 ABCD 各頂點數字的兩倍都等於其相鄰兩頂點上的數字和，則各頂點上的數字必須相等』。

二、求證『若正方體各頂點數字的三倍都等於其相鄰三頂點上的數字和，則各頂點上數字必須相等』。

三、延伸探究『母子正方體之頂點數字關係的玄機』。

參、研究方法：

本研究採用直接證法，主要探索程序包括：

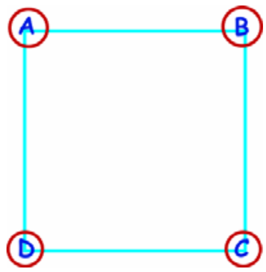
一、求證問題數學化。

二、觀察連結各等式的關係。

三、應用加減消去法或代入法，簡化問題。

肆、研究過程

一、求證「正方形各頂點數字之兩倍都等於其相鄰兩頂點之數字和,則各頂點之數字必相等」。



(圖二)

(一)求證問題數學化

設 A、B、C、D 依序表示(圖二)之正方形 ABCD 上各項點之數字
若 ： $2A=B+D$　$2B=C+A$　$2C=B+D$　$2D=C+A$
則 $A=B=C=D$

(二)證明

1. 由已知條件找兩個有關係的式子

a. $2A=B+D$ 和 $2C=B+D$

b. 因為 $2A=B+D=2C$ ，所以得知 $2A=2C$

c. 結果：$2A=2C \rightarrow A=C$

2. 利用步驟 1 所得知的結果來推算 $2B=C+A$

a. $2B=C+A$ ， 因為 $A=C$，所以可寫為 $2B=A+A$ 或 $2B=C+C$

b. 由 a 點得知 $2B=2C=2A \rightarrow B=C=A$

3. 利用步驟 2 所得知的結果來推算 $2D=C+A$

a. $2D=C+A=2B$，得知 $B=D$

因為 $B=D$，且 $B=C=A$，

所以將 B 套成 D，得到 $D=C=A$，又等於 $A=B=C=D$

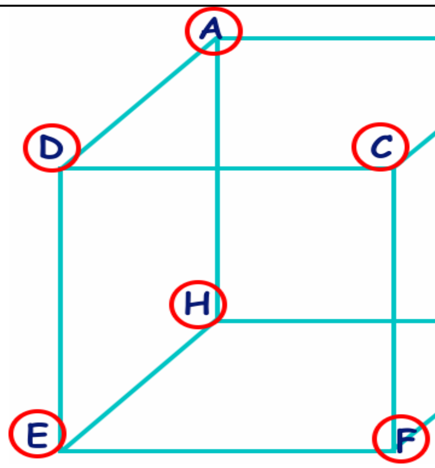
4. 結論： 將上方的結果統整之後，得到最後答案。

Answer：由上面步驟便可證明 $A=B=C=D$

二、　求證「若正方體個頂點數字之三倍都等於其相連三頂點的數字和，則各頂點之數字必相等」。

（一）求證問題數學化

設 A、B、C、D、E、F、G、H 依序表示（圖三）之正方體各頂點之數字，若表一中各恆等式為真，則 A＝B＝C＝D＝E＝F＝G＝H



（圖三）

表一：正方體各頂點數字與相鄰三頂點數字之關係

3A＝B＋D＋H	3B＝A＋C＋G	3C＝B＋D＋F
3D＝A＋C＋E	3E＝D＋F＋H	3F＝C＋E＋G
3G＝B＋F＋H	3H＝A＋E＋G	

（二）證明：

1. 建立表一中八個等式中的關係：

3A ＋ 3G ＋ 3C ＋ 3E ＝ 3B ＋ 3D ＋ 3F ＋ 3H

2. 逐一探究表一中左列中各等式與其他等式的關係：

（1）從 3A＝B＋D＋H 切入：

a

3A＝B＋D＋H……乘 3 後，等於 9A＝3B＋3D＋3H

由上面可知 3B＋3D＋3H＝ 3A＋2C＋2E＋2G

b

9A＝3A＋2C＋2E＋2G

→『先將 A 給抵掉』6A＝2C＋2E＋2G

6A＝2C＋2E＋2G……除 2 後，等於 3A＝C＋E＋G ，

可使我們發現 3F 也等於 C＋E＋G。

c

最後得到 3A＝C＋E＋G＝3F，所以 3A＝3F。

得到最終結果 A＝F。

（2）從 3B＝A＋C＋G 切入：

a

B＝A＋C＋G……乘 3 後，等於 9B＝<u>3A＋3C＋3G</u>

由上面可知 <u>3A＋3C＋3G</u>＝ 3B＋2D＋2H＋2F

b

9B＝3B＋2D＋2H＋2F →『先將 B 給抵掉』

6B＝2D＋2H＋2F 6B＝2D＋2H＋2F……除 2 後，

等於 3B＝D＋H＋F ，

可使我們發現 3E 也等於 D＋H＋F

c

最後得到 3B＝D＋H＋F＝3E，所以 3B＝3E。

得到最終結果 B＝E。

（3）換從 3C＝B＋D＋F 切入：

a

3C＝B＋D＋F……乘 3 後，等於 9C＝<u>3B＋3D＋3F</u>

由上面可知 <u>3B＋3D＋3F</u>＝ 3C＋2A＋2E＋2G

b

9C＝3C＋2A＋2E＋2G →『先將 C 給抵掉』

6C＝2A＋2E＋2G

6C＝2A＋2E＋2G……除 2 後，等於 3C＝A＋E＋G ，

可使我們發現 3H 也等於 A＋E＋G

c

最後得到 3C＝A＋E＋G＝3H，所以 3C＝3H。

得到最終結果 C＝H。

（4）換從 3D＝A＋C＋E 切入：

a

3D＝A＋C＋E……乘 3 後，

等於 9D＝3A＋3C＋3E

由上面可知 3A＋3C＋3E＝ 3D＋2B＋2F＋2H

b

9D＝3D＋2B＋2F＋2H →『先將 D 給抵掉』

6D＝2B＋2F＋2H 6D＝2B＋2F＋2H……除 2 後，

等於 3D＝B＋F＋H ，

可使我們發現 3E 也等於 D＋H＋F

c

最後得到 3D＝B＋F＋H＝3G，所以 3D＝3G。

得到最終結果 D＝G。

（5）結果：

由 1~4 之探討我們發現了 A＝F B＝E C＝H D＝G，如果能進一步證明 A＝B＝C＝D，則可推得 E＝F＝G＝H 及 A＝B＝C＝D＝E＝F＝G＝H

3. 探究 A＝B＝C＝D

（1）以 A、B、C、D 取代 E、F、G、H，可利用導出的 A＝F B＝E C＝H D＝G 關係，以 A、B、C、D 取代。

如此

3A＝B＋D＋H　　3B＝A＋C＋G

3C＝B＋D＋F　　3D＝A＋C＋E

變成

3A＝B＋D＋C　　3B＝A＋C＋D

3C＝B＋D＋A　　3D＝A＋C＋B

開始找相同之處，一步一步解……

（2）探究 A、B、C、D 兩組和的關係

a

先從 3A 和 3B 開始：

3A＝B＋D＋C

＋)3B＝A＋C＋D

3A＋3B ＝B＋2D＋2C＋A

『將兩邊的 A 和 B 能抵掉的抵掉』

3A＋3B ＝B＋2D＋2C＋A → 2A＋2B＝2D＋2C

→ A＋B＝D＋C

最後得到 A＋B＝D＋C

b

換從 3B 和 3C 開始：

3B＝A＋C＋D

＋)3C＝B＋D＋A

3B＋3C＝2A＋2D＋C＋B

『將兩邊的 B 和 C 能抵掉的抵掉』

3B＋3C＝2A＋2D＋C＋B → 2B＋2C＝2A＋2D

→ B＋C＝A＋D

最後得到 B＋C＝A＋D

c

換從 3A 和 3C 開始：

3A＝B＋D＋C

＋)3C＝B＋D＋A

3A＋3C＝2B＋2D＋C＋A

『將兩邊的 A 和 C 能抵掉的抵掉』

3A＋3C ＝2B＋2D＋C＋A → 2A＋2C＝2D＋2B

→ A＋C＝D＋B

最後得到 A＋C＝D＋B

d

換從 3B 和 3D 開始：

$$\begin{array}{l} \quad 3B=A+C+D \\ \underline{+)\,3D=A+C+B} \\ \quad 3B+3D=2A+2C+B+D \end{array}$$

『將兩邊的 B 和 D 能抵掉的抵掉』

$3B+3D=2A+2C+B+D \rightarrow 2B+2D=2A+2C$

$\rightarrow B+D=A+C$

最後得到 $B+D=A+C$

e

換從 3A 和 3D 開始：

$$\begin{array}{l} \quad 3A=B+D+C \\ \underline{+)\,3D=A+C+B} \\ \quad 3A+3D=2B+2C+A+D \end{array}$$

『將兩邊的 A 和 D 能抵掉的抵掉』

$3A+3D=2B+2C+A+D \rightarrow 2A+2D=2B+2C$

$\rightarrow A+D=B+C$

最後得到 $A+D=B+C$

f

換從 3C 和 3D 開始：

$$\begin{array}{l} \quad 3C=B+D+A \\ \underline{+)\,3D=A+C+B} \\ \quad 3C+3D=2A+2B+C+D \end{array}$$

『將兩邊的 C 和 D 能抵掉的抵掉』

$3C+3D=2A+2B+C+D \rightarrow 2C+2D=2A+2B$

$\rightarrow C+D=A+B$

最後得到 $C+D=A+B$

結果：

由 A 到 F 可知 ABCD 中兩組合的關係可統整如下：

$A+B = C+D$

$A+C = B+D$

$A+D = B+C$

（3）利用（2）之發現來探討 A=B=C=D

a

$$\begin{array}{l} \quad A+C=B+D \\ \underline{+)\,A+B=C+D} \\ \quad 2A+B+C=2D+B+C \end{array}$$

→『化簡後』2A＝2D→『化簡後』A＝D

b

$$
\begin{array}{l}
\quad B+D=A+C \\
\underline{+)\,B+C=A+D} \\
\quad 2B+D+C=2A+C+D
\end{array}
$$

→『化簡後』2B＝2A→『化簡後』B＝A

c

$$
\begin{array}{l}
\quad C+D=A+B \\
\underline{+)\,B+C=A+D} \\
\quad 2C+B+C=2A+B+D
\end{array}
$$

→『化簡後』2C＝2A→『化簡後』C＝A

結果：由ａ到ｃ之結果可知A＝B＝C＝D

4. 統整２及３之探究結果：

由於在２及３中已依序探究出「A＝F　B＝E　C＝H　D=G及「A＝B＝C＝D」，將兩者連結便可輕易推出

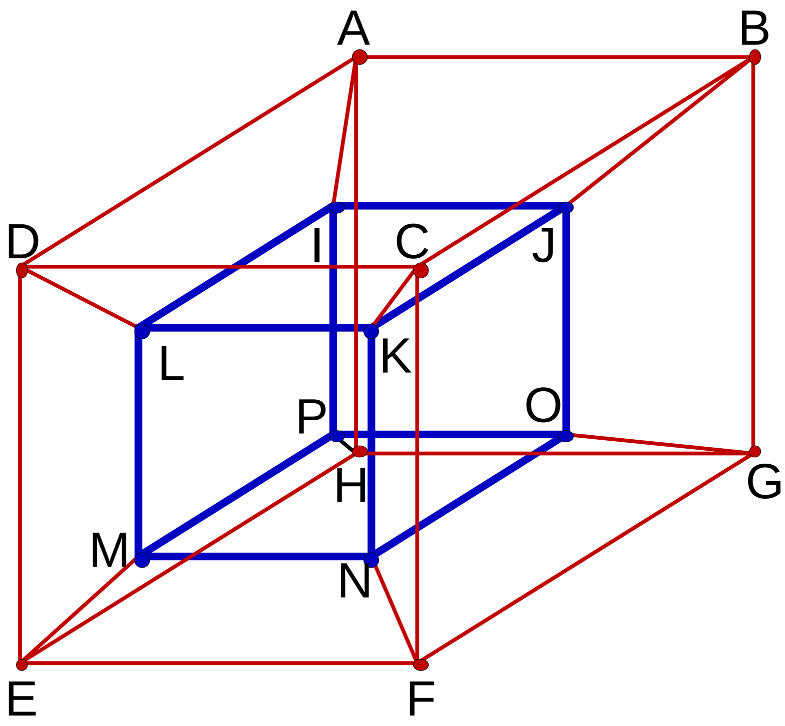
A＝B＝C＝D＝E＝F＝G＝H

5. 結論：

綜合１到４所述，可知「(圖三）中正方體八個頂點之數字，若欲滿足（表一）所列關係（即與各頂點相鄰三頂點之數字和均為該頂點上的數字的三倍)」，則八個頂點上的數字必須均等（即A＝B＝C＝D＝E＝F＝G＝H）

伍、延伸與推廣：

由上面的研究，我們證明了『若正方體各頂點數字之三倍等於其相鄰三頂點的數字和，則各頂點之數字必須相等。』之猜測為真。因此，我們也依循同樣的研究方法，進一步求證一本研究小組有關圖四、圖五之母子正方體頂點數字關係的猜測。



（圖四）

一、求證『若雙層母子正方體各頂點數字的四倍都等於其相鄰四頂點的數字和，則雙層母子正方體各頂點上的數字都必須相等』。

（一） 求證問題數學化

4A=B+D+H+I	4B=A+C+G+J	4G=B+F+H+O	4F=G+E+C+N
4E=F+D+H+M	4D=A+E+C+L	4H=A+G+E+P	4C=D+B+F+K
4I=L+J+P+A	4J=I+K+O+B	4K=L+J+N+C	4L=I+M+K+D
4M=P+N+L+E	4N=K+M+O+F	4P=I+M+O+H	4O=J+P+N+G

表二:母子正方體各頂點數字與相鄰四頂點數字之關係

設 A、B、C、D、E、F、G、H、I、J、K、L、M、N、O、P 表示母子正方體各頂點的數字，若表二中各恆等式為真，則

A＝B＝C＝D＝E＝F＝G＝H＝I＝J＝K＝L＝M＝N＝O=P

（二） 證明

1. 建立表二中十六個等式之間的關係

$4D-4F=A+L-G-N$
$4C-4E=B+K-H-M$
$4A-4C=H+I-F-K$
＋）$4B-4D=G+J+-E-L$
$3A+3B-3F-3E=I+J-N-M$—①

$4M-4K=P+E-J-C$
$4N-4L=O+F-I-D$
$4L-4J=M+D-O-B$
＋）$4K-4I=N+C-P-A$
$3M+3N-3J-3I=E+F-B-A$—④

$4G+4C=H+O-D-K$
$4B-4F=A+J-E-N$
$4A-4G=D+I-F-O$
＋）$4H-4B=E+P-C-J$
$3A+3H-3C-3F=I+P-K-N$—②

$4K-4O=L+C-P-G$
$4N-4J=M+F-I-B$
$4J-4P=K+B-M-H$
＋）$4O-4I=N+G-L-A$
$3K+3N-3P-3I=C+F-H-A$—⑤

$4D-4H=C+L-G-P$
$4A-4E=B+I-F-M$
$4E-4G=D+M-B-O$
＋）$4H-4F=A+P-C-N$
$3A+3D-3G-3F=L+I-O-N$—③

$4I-4M=J+A-N-E$
$4L-4P=K+D-O-H$
$4P-4N=I+H-K-F$
＋）$4M-4O=L+E-J-G$
$3I+3L-3N-3O=A+D-F-G$—⑥

2. 以①～⑥式建立新的等式關係

以一式之左右兩端互換分別與另一式相加並化簡，再將兩組和以同一程序相加。

a. ①～④並化簡

$3A+3B-3F-3E=I+J-N-M$
＋）$3M-3N-3J-3I=E+F-B-A$
$M+N+A+B=I+J+F+E$

$I+J-N-M=3A+3B-3F-3E$
＋）$3M+3N-3J-3I=E+F-B-A$
$M+N-J-I=A+B-E-F$

$M+N+A+B=I+J+F+E$
＋）$M+N-J-I=A+B-E-F$
$M+N=I+J$

$M+N+A+B=I+J+F+E$
＋）$A+B-E-F=M+N-J-I$
$A+B=E+F$

b. ② ～⑤並化簡

$3A+3H-3C-3F=I+P-K-N$
＋）$3K+3N-3P-3I=C+F-A-H$
$A+H+K+N=C+F+I+P$

$3A+3H-3C-3F=I+P-K-N$
＋）$C+F-H-A=3K+3N-3P-3I$
$A+H-C-F=K+N-P-I$

$A+H+K+N=C+F+I+P$
＋）$A+H-C-F=K+N-P-I$
$A+H=C+F$

$A+H+K+N=C+F+I+P$
＋）$K+N-P-I=A+H-C-F$
$K+N=I+P$

C. ③+⑥並化簡

$3A+3D-3G-3F=L+I-O-N$
＋）$3I+3L-3N-3O=A+D-F-G$
$A+D+I+L=F+G+N+O$

$3A+3D-3G-3F=L+I-O-N$
＋）$A+D-F-G=3I+3L-3N-3O$
$A+D-F-G=L+I-O-N$

$A+D+I+L=F+G+N+O$

$A+D+I+L=F+G+N+O$

$$\begin{array}{r} +)\ A+D-F-G=I+L-N-O \\ \hline A+D=F+G \end{array} \qquad \begin{array}{r} +)\ I+L-N-O=A+D-F-G \\ \hline I+L=N+O \end{array}$$

由 a、b、c 可推知下列六個等式關係：

A+B＝E+F	M+N＝I+J	A+H＝C+F
K+N＝I+P	A+D＝F+G	I+L＝N+O

3. 將 2 中所建立的等式與表二中相關的等式連結

a.

$$\begin{array}{r} A+B=E+F \\ -)\ A+D=F+G \\ \hline B-D=E-G \end{array} \qquad \begin{array}{r} M+N=I+J \\ -)\ N+O=I+L \\ \hline M-O=J-L \end{array}$$

以 B-D＝E-G 代入 4B-4D＝G+J-E-L 中，可得 5B-5D＝J-L-⑦

以 M-O＝J-L 代入 4L-4J＝M+D-O-B 中，可得 5L-5J＝D-B-⑧

⑦-⑧可得 B-D＝L-J＝5B-5D　　B＝D　J＝L

再將 B＝D　J＝L 代回 4L-4J＝M+D-O-B 及 4B-4D＝G+J-E-L 中

可得 M＝O 及 G＝E

所以

B＝D　J＝L　M＝O 及 G＝E

b.

以 A+H＝C+F 之變形 A-C＝F-H 代入 4A-4C＝H+I-F-K 中

可得 5A-5C＝I-K-⑨

以 K+N＝I+P 之變形 I-K＝N-P 代入 4I-4K＝P+A-N-C 中

可得 5I-5K＝A-C-⑩

⑨-⑩可得 A-C＝I-K＝5A-5C　　A＝C　I＝K

再將 A＝C　I＝K 代回 4A-4C＝H+I-F-K 及 4I-4K＝P+A-N-C 中

可得 H＝F　P＝N

所以

A＝C　I＝K　H＝F　P＝N

c.

以 A+D＝F+G 之變形 D-F＝G-A 代入 4D-4F＝A+L-G-N 中

可得 5D-5F＝L-N-⑪

以 I+L＝N+O 之變形 L-N＝O-I 代入 4L-4N＝D+I-O-F 中

可得 5L-5N＝D-F-⑫

⑪-⑫可得 D-F＝L-N＝5D-5F　　D＝F　L＝N

再將 D＝F　L＝N 代回 4D-4F＝A+L-G-N 及 4L-4N＝D+I-O-F 中

可得 A＝G　I＝O

所以

D＝F　L＝N　A＝G　I＝O

綜合 a.b.c 之發現可知:

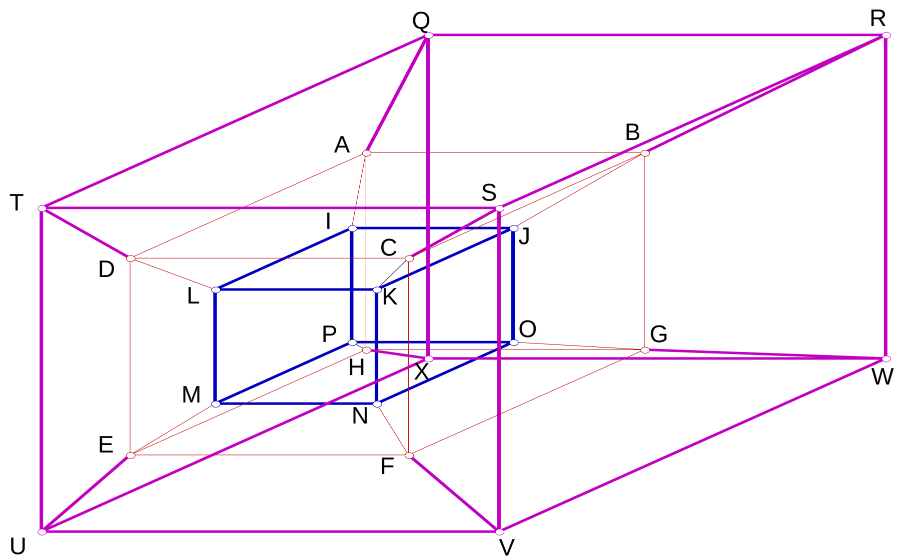
A＝C＝E＝G　B＝D＝F＝H　I＝K＝M＝O　J＝L＝N＝P

4. 以 A＝C＝E＝G　B＝D＝F＝H　I＝K＝M＝O　J＝L＝N＝P 代回表二之有關等式中，以連結 A、B、I、J 之間的關係

4A＝B+D+H+I＝3B+I－⑬
4B＝A+C+G+J＝3A+J－⑭
4I＝L+J+P+A＝3J+A－⑮
⑬－⑭可得 A+B＝I+J－⑯
⑬－⑮可得 A-B＝J-I－⑰
⑯＋⑰可得 A＝J　B＝I
再將 B＝I 代入 4A＝3B+I 中，可得 A＝B
所以 A＝B＝I＝J

5. 綜合程序 3 及 4 之發現，可得：
A＝B＝C＝D＝E＝F＝G＝H＝I＝J＝K＝L＝M＝N＝O＝P

二、求證『在三層的母子正方體中，若中間層各頂點數字之五倍都等於其相鄰五頂點的數字和，且其最內層及最外層各頂點數字的四倍均等於其相鄰四頂點的數字和，則三個正方體各頂點數字都必須相等』。



（圖五）

（證明省略）

三、

在四層的母子正方體中，若『中間兩層頂點數字的五倍均為其相鄰五頂點的數字和，且相鄰兩層各頂點數字的四倍，也是其相鄰四頂點的數字和，則這四層母子正方體的各頂點上的數字都必須相等』。

證 明：

1. 將這四層母子正方體由內（小）而外（外）依序編為第 1.2.3.4 層。
2. 將第 1.2.3 層看成一組三層的母子正方體，第 2.3.4 層也看成另一組三層的母子正方體。
3. 由已知條件，可以推知在 2. 中所組成的兩組相鄰三層的母子正方體，且與延伸二中之三層母子正方體相同，也都具有『中間層之頂點數字的五倍為其相鄰五頂點的數字和，且內外兩層之頂點數字的四倍為其相鄰四頂點之數字和』之環境條件。
4. 利用延伸二之證明結果，可知第 1.2.3 層正方體頂點數字上的數字必須相同，而第 2.3.4 層正方體也是如此。
5. 由於第 2.3 層是兩組三層母子正方體所共有的，所以我們可以輕易地推知這四層正方體之各頂點上的數字都必須相等。

　　至於五層以上的母子正方體之頂點數字有何玄機，事實上，由延伸三之證明，便可輕易地推知『在五層以上的母子正方體中，若其中間各層頂點數字的五倍均為其相鄰五頂點的數字和，且相鄰兩層各頂點數字的四倍，也是其相鄰四頂點的數字和，則這四層母子正方體之各頂點上的數字都必須相等』。

陸、研究結果：

綜合以上的研究，我們證實了下列四項猜測為真。

1. 若正方形 ABCD（圖二）各頂點數字的兩倍都等於其相鄰兩頂點上的數字和，則各頂點上的數字都必須相等。
2. 若正方體（圖三）各頂點數字的三倍都等於其相鄰三頂點上的數字和，則各頂點上的的數字都必須相等。
3. 若雙層母子正方體（圖四）中各頂點數字的四倍都等於其相鄰四頂點上的數字和，則母子正方體各頂點上的數字都必須相等。
4. 在三層的母子正方體中，若中間層正方體各頂點數字的五倍都等於其相鄰五頂點上的數字和，且其最內層及最外層正方體頂點數字的四倍也等於其相鄰四頂點上的數字和，則母子正方體各頂點上的數字都必須相等。

　　由研究結果 3、4，我們又可進一步推知『在四層以上的母子正方體中，若中間各層之頂點數字的五倍都等於其相鄰五頂點上的數字和，且相鄰兩層各頂點數字的四倍也都等於其相鄰四頂點的數字和，則所有的正方體各頂點上的數字都必須相等』。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國中組 數學科

030418

積頂玄機

屏東縣立中正國民中學

評語：

研究具巧思，只是簡單的問題卻給出了複雜的討論。例如，考慮 Q3π 時(p3 之証明)，其實可以很簡單地証明對頂的兩點標號值相同即可。

由 9A=3B+3C+3D=3A+2C+2G+2E 可推出 3A=C+G+E=3F，不過作者顯然並未看出此一關係，只是純粹計算，有點可惜。