中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

佳作

030417
物換星移 折折稱奇

高雄縣立甲仙國民中學

作者姓名：
國三 許乃潔 國三 曾虹菱

指導老師：
曾國洋 許春輝

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：物換星移 折折稱奇

關 鍵 詞：星形內角和、外角定理

編　　號：

摘 要

本研究利用幾何和代數的方法配合 *Corel Draw*繪圖軟體突破一般探索星形內角和公式的範圍，從直線星形延伸探討至折線星形。另外，使用 GSP 繪製星形，用以呈現折線星形的動態漸變過程，且驗證公式的正確性。主要的研究流程及結果如下：

1. 直線星形種類：首先，利用正 N 邊形的外框，固定相隔 L 點連線即可完成星形。經推理和實際連線的結果，最多可連出[(N-3)/2]種。
2. 探討**直線星形**內角和的一般性公式：無論星形內部的層數存在與否，可證得任意 $N(L)$ 星形內角和公式為 $S（N,L）=（N-2L-2）\times 180°$。
3. 探討**折線星形**的一般內角和公式：當星線為一個折點時，任意 $\hat{N}(L)$ 折線星形內角和為 $\hat{S}(N,L)=\hat{Q}(N,L)-（2L+2）\times 180°$，其中 $\hat{Q}(N,L)$ 是折角總和。
4. 在一個折點，且折角均相等的條件下，正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形內角和為 $\hat{S}(N,L,K)=$ ***（NK－2L－2）×180°***。其 K 值的變化範圍（2L+2）/N$\leq K\leq 1+$2（L-[L/2]）/2，星形變化的範圍為**<u>正 N 條放射線</u>**至**<u>正 *N*（*[L/2]*）直線星形</u>**之間，在這個變化的範圍中除了包含了不同層的直線星形（[(N-3)/2]- [L/2]+1 種）外，層與層之間尚存在無窮多個星形。
5. 當折線星形具 **M 個折點**時，一般的星形內角和為 $\hat{S}(N,L,M)=（N(1-M)-2L-2）\times 180°+\hat{Q}(N,L,M)$；而當 M 個折角均相等時，正 $\hat{N}(L,K,M)$ 星形內角和為 $\hat{S}(N,L,K,M)=\{N[MK-(M-1)]-2L-2\}\times 180°$。

壹、研究動機

國三上學期數學第一章第一節的例題一教了關於五角星形內角和的計算，我們應用三角形外角定理得到五角星形內角和為 180°。中午營養午餐學校發了楊桃，我們好奇的想知道楊桃剖面後的內角和為何，意外發現有的切面接近正五角星形，有的卻大於或小於 180°，甚至有的切面是六角星形，這引發我們提出多角星形內角和為何，是否具有規律性（公式），又如何畫出多角星形等等的問題。在網路上進行文獻蒐集的結果，我們發現有不少研究報告已證出多角星形內角和的公式，原本要放棄這個題目，但仔細推敲公式討論的範圍僅限於星形連線屬於直線的情況（直線星形），因此我們想要進一步延伸，當<u>***星形連線不是直線時，這樣的星形有多少種（折線星形）?又星形內角和公式是否依然存在?***</u>因此我們決定用自己的方式循序漸進探索這個問題，並隨時與老師討論。

貳、研究目的

首先探討 N 角星形連線為<u>**直線時**</u>的直線星形分類及內角和公式，再進一步延伸到連線為<u>**折線時**</u>的折線星形分類、內角和公式、及應用。

叁、研究設備及器材

個人電腦 1 台、*Corel Draw* 9 商業繪圖軟體一套、GSP 動態幾何繪圖軟體一套

肆、研究方法

老師建議我們使用 *Corel Draw* 9 商業繪圖軟體及 GSP 動態幾何繪圖軟體，一方面繪製幾何圖形，另一方面透過介面的操作了解星形變化的可能性及規律性，並驗證公式的正確性。

伍、研究過程及結果討論

名詞定義：

「直線星形內角和」：所有星角的內角總和，以 *S* 函數表示。

「直線星形外角和」：所有星角的外角總和，以 *R* 函數表示。

「直線星形凹角和」：所有星形凹角總和，以 *P* 函數表示。

一、直線星形分類及性質

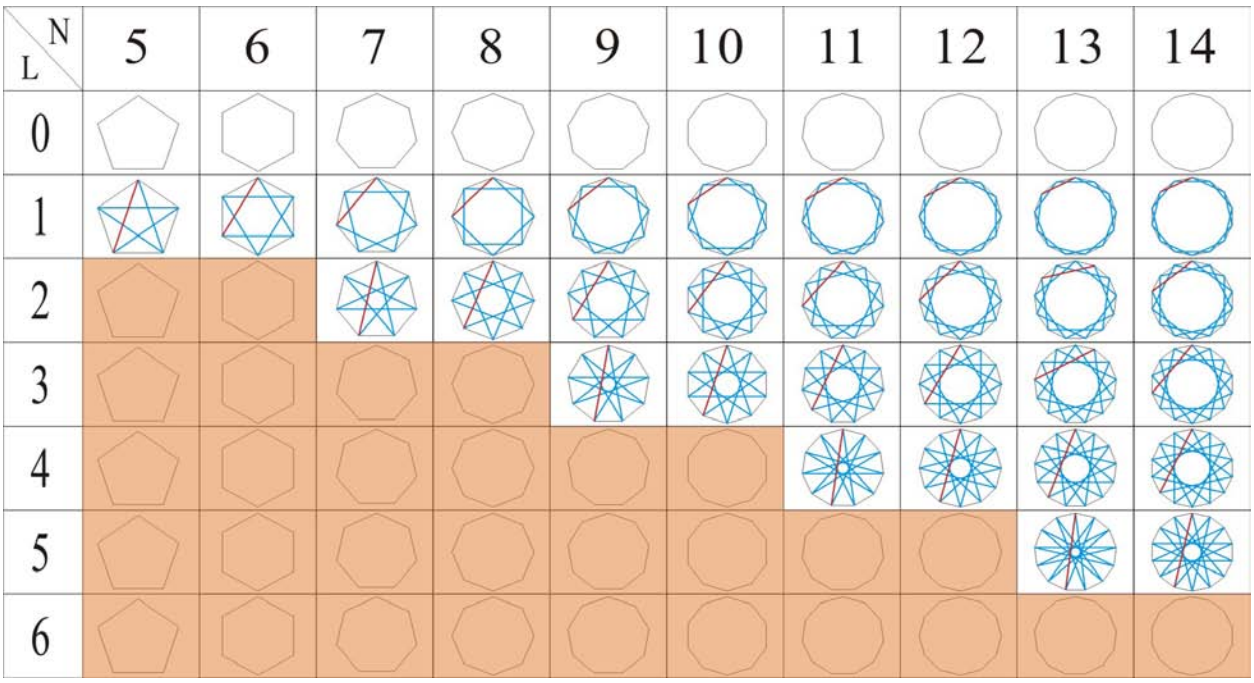
＜研究策略＞

由經驗中已知正五邊形的對角線相連（每隔一點）即可連出正五角星形，我們以此延伸利用 *Corel Draw* 9 繪製許多正 *N* 邊形外框，列印出來後，在實際連線的過程中尋找連成正 *N* 角星形的規則，並觀察可繪出多少種不同的直線星形，以了解直線星形分類的數學法則，及其他性質。

（一）利用正 *N* 邊形外框繪製直線星形，相隔 L 點連線與直線星形種類的關係：

1.由於三角形與四角形內部無法連出星形，因此我們從正五邊形開始嘗試（N≧5），至少每相隔 1 點連線，看看可連出幾種星形（如表 1），並思考成因。

表 1：正 *N* 多邊形與相隔 *L* 點連線所能繪出的正 N 角星形種類



註： *N* 表正 *N* 邊形、*L* 表相隔 *L* 點對角線相連、橘色區域表示無法繼續連出相同角數的不同星形

（二）性質一：每條星線內側包含一個 N 多邊形，<u>**最外側則對應**</u>

<u>***L* 個星角及 *L +1* 個凹角**</u>。

例圖 4：

為 *13（3）*星形，每條星線（如紅線）內側包含一個 13 邊形（綠色區域），而最外側均對應 3 個星角，4 個凹角。

（三）性質二：構成**星角**的兩條星線，可將正 N 角星形分成三部分，其中星線最外側均對應 L 個星角（呈上），及 L＋1 個凹角，則**內側部分應包含 *N–2L* 的**星角及 **N-2╳（L＋1）＝*N-2L-2* 個凹角**。

例圖 5：

*11（3）*星形中，每個星角（如∠1）的兩條星線（紅線）最外側均有 3 個星角及 4 個凹角，則內側則剩下 11–2╳3＝5 個星角，及 11-2╳（3＋1）＝3 個凹角（紅線區）。

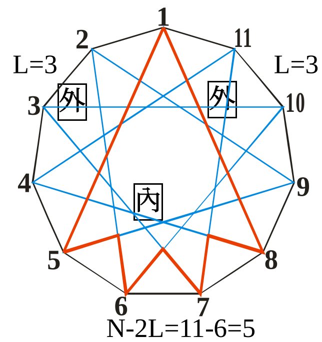


圖 5

（五）性質三：當固定 N 時，星形種數並非無限制的發展，且 N 越大，星形種數也越多，其關係如下：

當 N 為奇數時，$1 \leqq L \leqq \frac{N-3}{2}$，共 $\frac{N-3}{2}$ 種星形；當 N 為偶數時，$1 \leqq L \leqq \frac{N-4}{2}$，共 $\frac{N-4}{2}$ 種星形
$\Rightarrow 1 \leqq L \leqq [\frac{N-3}{2}]$，共有 $[\frac{N-3}{2}]$ 種星形（N≧5，L 為正整數，[　]為高斯符號）

（六）性質四：綜前所述，L 值除代表<u>相隔點數</u>、<u>任意星線最外側對應的星角數</u>外，亦可表示星形發展的$\boxed{\text{層數}}$，呈（五）的關係式，可知層數最大為$[\frac{N-3}{2}]$。

二、直線星形內角和公式

＜研究策略＞

了解了直線星形的分類 N（L），及相關的性質後，我們決定從 L 代表星形層數的觀點，探討任意直線星形<u>內部層數</u>存在時的星形內角和公式，再進一步探討<u>內部層數不存在</u>的任意直線星形內角和公式。

（一）　當<u>直線星形內部層數</u>存在時，**直線星形內角和公式為 *S（N,L）＝（N–2L–2）╳180°***

說明：

1.任意直線星形只要內部層數存在，根據三角形**外角定理**可得則有下列關係：

$\boxed{N（L）\text{星形外角和}＝N（L–1）\text{星形外角和}＋（\text{凸 } N \text{ 邊形外角和}）}$

2. 令 ***N*（*L*）星形外角和**為 *R*（*N,L*）；***N*（*L*）星形內角和**為 *S*（*N,L*）

已知 任意凸 *N* 邊形外角和，即 *R*（*N,0*）恆為 360°＝2×180°

呈 1 的關係式，可改寫為 $R(N,L) = R(N,L-1) + R(N,0)$：

L 值	*R*（*N,L*）	＝	*R*（*N,L–1*）	＋	*R*（*N,0*）
0	~~*R*（*N,0*）~~	＝	0°	＋	1×（2×180°）
1	~~*R*（*N,1*）~~	＝	~~*R*（*N,0*）~~	＋	1×（2×180°）
2	~~*R*（*N,2*）~~	＝	~~*R*（*N,1*）~~	＋	1×（2×180°）
3	~~*R*（*N,3*）~~	＝	~~*R*（*N,2*）~~	＋	1×（2×180°）
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
L-1	~~*R*（*N,L-1*）~~	＝	~~*R*（*N,L-2*）~~	＋	1×（2×180°）
L	*R*（*N,L*）	＝	~~*R*（*N,L-1*）~~	＋	1×（2×180°）
總合	*R*（*N,L*）	＝	0°	＋	（*L*＋1）×（2×180°）

由上表可知 *N*（*L*）直線星形外角和為：

$R(N,L) = (L+1)\times(2\times180°) = (2L+2)\times180°$

所以 *N*（*L*）直線星形內角和為：

$S(N,L) = N\times180° - R(N,L) = N\times180° - (2L+2)\times180° = (N-2L-2)\times180°$

3. 呈 2, *N*（*L*）直線星形**外角和公式**為 $R(N,L) = (2L+2)\times180°$

N（*L*）直線星形**內角和公式**為 $S(N,L) = (N-2L-2)\times180°$

（二）當星形內部層數不存在時（每條星線最外側對應的星角數（*L*）依然相同），**直線星形內角和公式**亦為 $\boldsymbol{S(N,L) = (N-2L-2)\times180°}$

說明：

1.對星形外框而言，星形內角和（*S*（*N,L*））與凹角和（*P*（*N,L*））有下列關係：

> **定理一**：*N 角星形內角和＋360°＝N 角星形凹角和*
> 即 $S(N,L) + 360° = P(N,L)$

例圖 10

⑵（連接法）：將 10 角星形頂角相連，外圍可圍出 10 多邊形，又此多邊形與星形外框之間

恰圍出 10 個三角形（黃色區），因此可得關係式：

10 多邊形內角和＝10 角星形內角和＋綠色角和

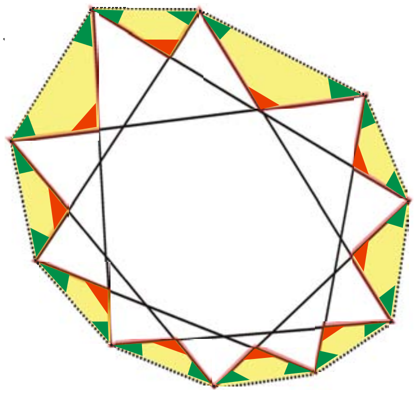
其中 *綠色角和＝10 個三角形內角和－紅色角和*

因此關係式可改寫為：

10 多邊形內角和＝10 角星形內角和＋10 個三角形內角和－紅色角和

即　$(10-2)\times 180°=$ *10 角星形內角和*$+(10\times 180°)-$ *10 形內角和*$+360°=$ *10 角星形凹角和*

$\Rightarrow S(10,2)+360°=P(10,2)$



圖

1. 固定一個星角，構成該星角的兩條星線與其他部分星線，可圍成一個***折扇形外框***，此外框包含（N-2L）個星角，及（N-2L-2）個凹角（性質二），其各星角的內角和與凹角和關係為：**定理二**：（N-2L）個星角的內角和＝（N-2L-2）個凹角和

2. 呈 3 的關係式，考慮每個星角類似的情形，可得關係式如下：

   定理三：$(N-2L)\times S(N,L)=(N-2L-2)\times P(N,L)$

3. 綜合 2、4 的結論：

   定理一：$S(N,L)+360°=P(N,L)$ ---------------------------①

   定理三：$(N-2L)\times S(N,L)=(N-2L-2)\times P(N,L)$ -------②

   將①式代入②式中，得

   $\boxed{S(N,L)=(N-2L-2)\times 180°}$ --------③

   將③式代入①式，得

   $P(N,L)=(N-2L-2)\times 180°+360°=(N-2L)\times 180°$

   由此可知，當星形內部層數不存在時，星形內角和公式、外角和公式、凹角和公式均未改變。

4. 綜合以上討論可知，當星線為直線時，任意 N（L）星形的性質如下：

   （1）　星形**內角和**恆為 $S(N,L)=(N-2L-2)\times 180°$

   （2）　星形**外角和**恆為 $R(N,L)=(2L+2)\times 180°$

   （3）　星形**凹角和**恆為 $P(N,L)=(N-2L)\times 180°$

三、折線星形（星線為**折線時**）分類及內角和公式

<研究策略>

運用前面探討**直線星形的定理為基礎**，我們想進一步直接探討當星線為**折線**時（<u>**一個折點**</u>）的折線星形一般內角和公式，然後再針對特定**折角條件**討論折線星形的種類及公式。

名詞定義：

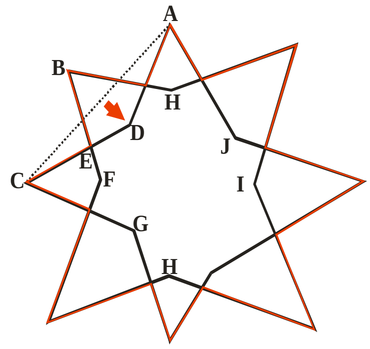
例圖 13：

「**折線星形折角合**」：所有折角角度總合，以 $\hat{Q}$ 函數表示。

「**折線星形內角合**」：星角的內角總和，以 $\hat{S}$ 函數表示。

「**折線星形凹角合**」：星形凹角總合，以 $\hat{P}$ 函數表示。

「**折線星形外角合**」：星角的外角總合，以 $\hat{R}$ 函數表示。



（一）星線為**一個折點**時，一般折線星形內角和公式：

1. 星形外框的性質：由於折點被限制於星形外框之內，因此星形外框角數依然維持 *N 個星角及 N 個凹角*，必符合定理一的關係式：

> **定理一**：*N 角星形內角和＋360°＝N 角星形凹角和*
>
> 即　$\hat{S}(N,L)+360°=\hat{P}(N,L)$

2. 任意星角及兩側星線（折線）所圍成的多邊形外框（如圖 **15** 的紅色外框，兩折點內凹）：依據**性質六**，此多邊形外框相當於 *N-2L* 角星形，因此再應用**定理一**的原理可得下列的關係式：

> 定理四：*N-2L* 個星角內角和＋*360°*＝*N-2L-2* 個凹角和＋*2* 個折角合

3. 依定理四，依序（順時鐘）列出 $\hat{N}(L)$ 角星形每個星角類似的關係式，將 N 條式子加總的結果可得：

> 定理五：（*N-2L*）×$\hat{N}(L)$星形內角和＋（*N×360°*）＝（N-2L-2）×$\hat{N}(L)$星形凹角和＋2×$\hat{N}(L)$星形折角和
>
> $\Rightarrow$ （*N-2L*）$\hat{S}(N,L)$＋（*N×360°*）＝（*N-2L-2*）$\hat{P}(N,L)+2\hat{Q}(N,L)$

4. 利用定理一與定理五解聯立方程式：

$$\begin{cases} \text{定理一：}\hat{S}(N,L)+360°=\hat{P}(N,L) \text{ ----------------- ①} \\ \text{定理五：}(N-2L)\hat{S}(N,L)+(N\times 360°)=(N-2L-2)\hat{P}(N,L)+2\hat{Q}(N,L) \text{ ------- ②} \end{cases}$$

將①式帶入②式得

$\boxed{\hat{S}(N,L)=\hat{Q}(N,L)-(2L+2)\times 180°}$ ----------------③

將③式代入①式得

$\boxed{\hat{P}(N,L)=\hat{Q}(N,L)-(2L)\times 180°}$

根據③式，*N*（*L*）星形外角和 $\hat{R}(N,L)=N\times 180°-\hat{S}(N,L)$

$$= (N+2L+2)\times 180^{\circ} - \hat{Q}(N,L)$$

5.呈上結果，一般 $\hat{N}(L)$ 折線星形（一個折點），恆有下列的關係式：

$\hat{N}(L)$ *折線星形內角和*$=\hat{S}(N,L) = \hat{Q}(N,L) - (2L+2)\times 180°$
$\hat{N}(L)$ *折線星形凹角和*$=\hat{P}(N,L) = \hat{Q}(N,L) - (2L)\times 180°$
$\hat{N}(L)$ *折線星形外角和*$=\hat{R}(N,L) = (N+2L+2)\times 180° - \hat{Q}(N,L)$

（二）討論：**當每個折角相等**時，折線星形種類（$\hat{N}(L,K)$）及公式

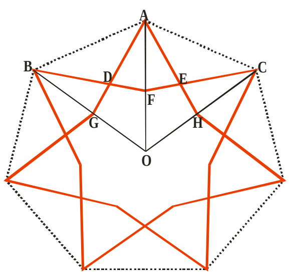
1. 令**折角**角度為 $X = K\times 180^{\circ}$（K 屬於實數），則 N 個折角的星形折角和為 $N X = N K\times 180^{\circ}$（$K$=1 時，星線為直線；$K$>1 時，星線外凸；$K$<1 時，星線內凹）

即 $\hat{N}(L)$ 折線*星形折角和*$=\hat{Q}(N,L,K) = N K\times 180^{\circ}$

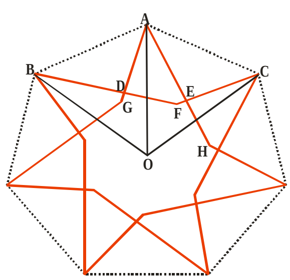
2.由 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形內角和公式可知當**<u>固定 *N* 及 *L* 時</u>**星形內角和並非為一固定值，即隨著 K 值變化，因此星形是隨 K 值變動的**動態星形**，由於 K 屬於實數，也代表著這樣的星形具有無窮多個。

3.正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形的變化探索：

（1） 在折角相等的條件下，我們在 *Corel Draw 9* 裡嘗試繪出各種不同的星形，發現折角均相同的星形主要可分為兩大類, 其中一類是**正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形**（如圖 17），另一類姑且稱之為**旋 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形**（如圖 18），兩種均可外接一個正 N 邊形，差別在於折點的位置不同。**正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形折點的位置在星線的中點, 可使星形外框長均相等**（如圖 17：$\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{CE}$），反之旋 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形則否（如圖 18：$\overline{AD} \neq \overline{AE}$）。由於旋轉性的探討較為複雜，因此我們決定只針對正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形變化作深入探討。



圖

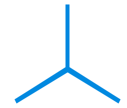
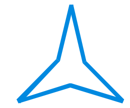
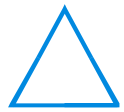
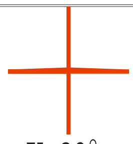
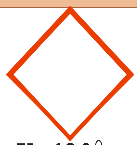
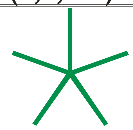
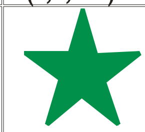
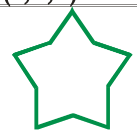
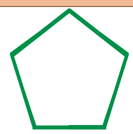
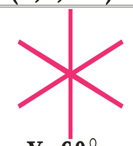
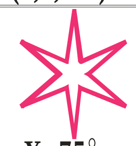
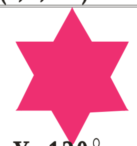
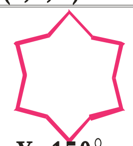
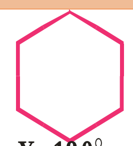
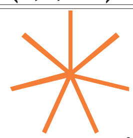
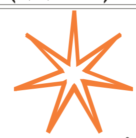
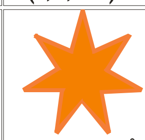
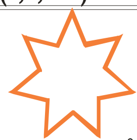
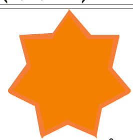
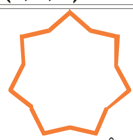
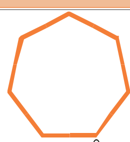


圖

（2）在正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形中，當固定 L=0 時，N（$N\geq 3$）與不同 K 值（$\frac{2}{N}\leq K\leq 1$）的關係如表 3 所示，正 $\hat{N}(0,K)$ 折線星形內角和為：

$$\boxed{\hat{S}(N,L,K) = \hat{S}(N,0,K) = (N K - 2)\times 180^{\circ} = NX - 360^{\circ}}$$

表 3　$L=0$, 正 $\hat{N}(0,K)$ 折線星形內角和 $\hat{S}(N,0,K)=(NK-2)\times180°$（或 $NX-360°$）, $\frac{2}{N}\leq K\leq1$

K \ N	$\frac{2}{N}$	$\frac{5}{2N}$	$\frac{3}{N}$	$\frac{4}{N}$	$\frac{5}{N}$	$\frac{6}{N}$	$\frac{7}{N}$
3	 X=120° S(3,0,2/3)=0°	 X=150 S(3,0,5/6)=90°	 X=180 S(3,0,1)=180°				
4	 X=90° S(4,0,1/2)=0°	 X=112.5° S(4,0,5/8)=90°	 X=135° S(4,0,3/4)=180°	 X=180° S(4,0,1)=360°			
5	 X=150° S(5,0,2/5)=0°	 X=90° S(5,0,1/2)=90°	 X=108° S(5,0,3/5)=180°	 X=144° S(5,0,4/5)=360°	 X=180° S(5,0,1)=540°		
6	 X=60° S(6,0,1/3)=0°	 X=75° S(6,0,5/12)=90°	 X=90° S(6,0,1/2)=180°	 X=120° S(6,0,2/3)=360	 X=150° S(6,0,5/6)=540°	 X=180° S(6,0,1)=720°	
7	 X=51.42° S(7,0,2/7)=0°	 X=64.29° S(7,0,5/14)=90°	 X=77.14° S(7,0,3/7)=180°	 X=102.86° S(7,0,4/7)=360°	 X=128.57° S(7,0,5/7)=540°	 X=154.29° S(7,0,6/7)=720°	 X=180° S(7,0,1)=900°

（3）在正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形中，固定 L=1 時，N（$N\geq5$）與不同 K 值（$\frac{4}{N}\leq K\leq1+\frac{2}{N}$）的關係如表 4，正 $\hat{N}(1,K)$ 折線星形內角和為：

$\boxed{\hat{S}(N,L,K)=\hat{S}(N,1,K)=(NK-4)\times180°=NX-720°}$

（5）在正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形中，當 L≧2 時，星形變化的範圍是否仍在**放射線與正 N 邊形之間**? 如當 $L=2$ 時，N 的最小值為 7（參考表 1，因為從七角星開始有第二層星形），而星形變化的範圍卻在放射線與**第一層星形**之間，少了第 1 層至第 0 層（正 N 邊形）之間的星形（原因：折點在星線 1/2 處且折點不得超過星形外框，因為**<u>超過星形外框非公式證明</u>**討論範圍），我們把 L 值與 N 的最小值、星形變化範圍（內角和的最大值與最小值）與 K 的範圍的關係整理如下表 5：

表 5　$\hat{S}(N,L,K)$為折線星形內角和，$S(N,L)$表為直線星形內角和

L 值	N 的最小值	$\hat{S}(N,L,K)$ 最小值	$\hat{S}(N,L,K)$ 最大值	K 的範圍	上下限的差
0	3	0°（N 條放射線）	$S(N,0)$（正 N（0）星形）	$\frac{2}{N} \le K \le 1$	$1-\frac{2}{N}$
1	5	0°（N 條放射線）	$S(N,0)$（正 N（0）星形）	$\frac{4}{N} \le K \le 1+\frac{2}{N}$	$1-\frac{2}{N}$
2	7	0°（N 條放射線）	$S(N,1)$（正 N（1）星形）	$\frac{6}{N} \le K \le 1+\frac{2}{N}$	$1-\frac{4}{N}$
3	9	0°（N 條放射線）	$S(N,1)$（正 N（1）星形）	$\frac{8}{N} \le K \le 1+\frac{4}{N}$	$1-\frac{4}{N}$
4	11	0°（N 條放射線）	$S(N,2)$（正 N（2）星形）	$\frac{10}{N} \le K \le 1+\frac{4}{N}$	$1-\frac{6}{N}$
5	13	0°（N 條放射線）	$S(N,2)$（正 N（2）星形）	$\frac{12}{N} \le K \le 1+\frac{6}{N}$	$1-\frac{6}{N}$
6	15	0°（N 條放射線）	$S(N,3)$（正 N（3）星形）	$\frac{14}{N} \le K \le 1+\frac{6}{N}$	$1-\frac{8}{N}$
7	17	0°（N 條放射線）	$S(N,3)$（正 N（3）星形）	$\frac{16}{N} \le K \le 1+\frac{8}{N}$	$1-\frac{8}{N}$
8	19	0°（N 條放射線）	$S(N,4)$（正 N（4）星形）	$\frac{18}{N} \le K \le 1+\frac{8}{N}$	$1-\frac{10}{N}$
9	21	0°（N 條放射線）	$S(N,4)$（正 N（4）星形）	$\frac{20}{N} \le K \le 1+\frac{10}{N}$	$1-\frac{10}{N}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
L	$2L+3$	0°（N 條放射線）	$S(N,[\frac{L}{2}])$（正 N（$[\frac{L}{2}]$）星形）	$\frac{2L+2}{N} \le K \le 1+\frac{2(L-[L/2])}{N}$	$1-\frac{2(1+[L/2])}{N}$

註：[　]為高斯符號

（三）當星線有兩個或兩個以上的折點時，星形內角和公式為何？

假設有 M 個折點

1.若折點移動不超過星形外框，則必符合定理一的外框性質：

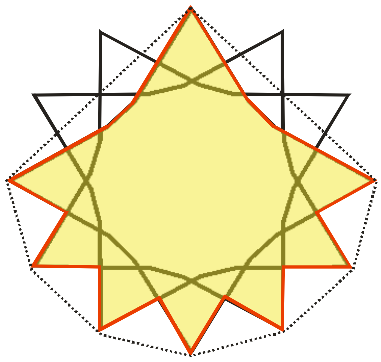


圖 20

> **定理一**：*N 角星形內角和＋360°＝N 角星形凹角和*
>
> 即　$\hat{S}(N,L,M)+360°=\hat{P}(N,L,M)$

2. 固定一個星角，構成該星角的兩條星線與其他部分星線，可圍成一個***折扇形外框***，此外框包含（N-2L）個星角，及（N-2L-2）個凹角及 2M 個折角，利用連接法，如圖 20，可證得關係式：

定理六：*（N-2L）個星角的內角和 ＋ M×360°＝（N-2L-2）個凹角和＋2M 個折角和*

3. 依定理六，依序（順時鐘）列出 $\hat{N}(L,M)$ 角星形每個星角類似的關係式，將 N 條式子加總的結果可得：

> **定理七**：（N-2L）× $\hat{N}(L,M)$ 星形內角和＋（N×M×360°）＝（N-2L-2）× $\hat{N}(L,M)$ 星形凹角和＋2× $\hat{N}(L,M)$ 星形折角和
> ⇒ （N-2L）$\hat{S}(N,L,M)$ ＋（N×M×360°）＝（N-2L-2）$\hat{P}(N,L,M)$ ＋2 $\hat{Q}(N,L,M)$

4. 定理一與定理七解聯立方程式得 M 個折點時星形內角和的一般性公式：

$\hat{N}(L,M)$ *折線星形內角和*＝$\hat{S}(N,L,M)$ ＝（$N-NM-2L-2$）×180°＋$\hat{Q}(N,L,M)$

$\hat{N}(L,M)$ *折線星形凹角和*＝$\hat{P}(N,L,M)$ ＝（$N-NM-2L$）×180°＋$\hat{Q}(N,L,M)$

5. 延伸探討 M 個折角均相等的正 $\hat{N}(L,K,M)$ 星形內角和公式：

假設每個折角為 X，又 X=K×180°，則關係式改寫為：

$\hat{N}(L,K,M)$ *折線星形內角和*＝$\hat{S}(N,L,K,M)$ ＝（N（MK－（M－1））－2L－2）×180°

6. 將上述關係式列成下表，當折點數目不同時，亦代表有不同的星形內角和公式。

折點數 m	正 $\hat{N}(L,K,M)$ 星形的內角和公式
0	$\hat{S}(N,L,K,0)$＝（N－2L－2）×180°　　**即為直線星形**
1	$\hat{S}(N,L,K,1)$＝（NK－2L－2）×180°
2	$\hat{S}(N,L,K,2)$＝（N（2K－1）－2L－2）×180°
3	$\hat{S}(N,L,K,3)$＝（N（3K－2）－2L－2）×180°
4	$\hat{S}(N,L,K,4)$＝（N（4K－3）－2L－2）×180°
5	$\hat{S}(N,L,K,5)$＝（N（5K－4）－2L－2）×180°
…	…
m	$\hat{S}(N,L,K,m)$＝（N（mK－（m－1））－2L－2）×180°

7.運用 GSP 繪製多折點的星形，呈現星形漸變的過程，比較理論值與測量值的結果，證得公式的正確性。

陸、結 論

一、星形的種類與星形的內角和公式

（一）由 L 值的探討我們發現正 N（L）直線星形有不同的層數（層與層之間無其他星形），星角數越多層數也越多 $1\leq L\leq\frac{[N-3]}{2}$，其中 L 為正整數。任意 N（L）直線星形（星線為直線，L 為星線最外側對應的星角數）的內角和為 <u>$S(N,L)=(N-2L-2)\times180^\circ$</u>，固定 N 和 L，則內角和亦被固定。若固定 N，每增加（減少）一層，星形更為銳利（鈍），星形內角和減少（增加）360°；若固定 L，每多（少）一角，星形內角和增加（減少）180°。

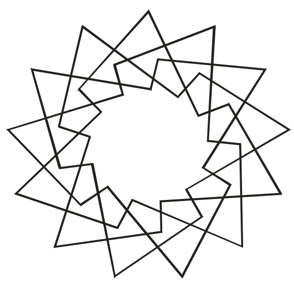
（二）任意 $\hat{N}(L)$ 折線星形內角和一般性公式為 $\boxed{\hat{S}(N,L)=\hat{Q}(N,L)-(2L+2)\times180^\circ}$，其中 $\hat{Q}(N,L)$ 表星形折角和。而在折角均相等（X=K×180°）的條件下，正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形的變化從**正 N 條放射線**至 N（$[\frac{L}{2}]$）**直線星形**之間，除了包含直線星形（共 $[\frac{N-3}{2}]-[\frac{L}{2}]+1$ 種），層與層之間亦存在著無窮多個星形（直線星形只是特例），讓正 N 角星形的探討更加完整。

（三）當有 m 個折點時，$\hat{N}(L,M)$ *折線星形內角和一般性公式為* $\boxed{\hat{S}(N,L,M)=(N-NM-2L-2)\times180^\circ+\hat{Q}(N,L,M)}$；而 M 個折角均相等的正 $\hat{N}(L,K,M)$ 星形內角和公式為 $\hat{S}(N,L,K,M)=(N(MK-(M-1))-2L-2)\times180^\circ$。其中 M=0 或 1，是本研究詳細討論的範圍。兩個折點以上的正 N 角星形 GSP 的繪圖難度很高，是最有挑戰性的地方。

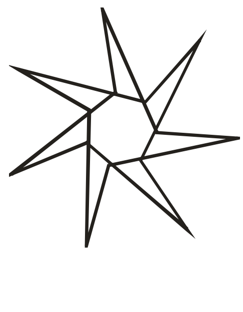
（四）運用 GSP 的超強的數學運算，動態星形的星形內角和均與公式吻合，見附錄一。

二、未來發展：

（一）詳細探討<u>兩個折點</u>以上時正 N 角星形變化的情形，而其他非正 N 角星形依折角條件不同應有不同形式的公式，未來可針對特殊的折角條件進行探討。如右圖，兩個折點的折角和為 360°，N=13，L=3，帶入一般性公式可得星形內角和為 $\hat{S}(N,L,M)=(N-NM-2L-2)\times180^\circ+N\times360^\circ=(N\text{-}2L\text{-}2)\times180^\circ=900^\circ$



（二）以本研究的<u>**星形內角和公式為基礎**</u>，探討星形其他的幾何性質，如面積，周長，旋轉性（如右圖）、立體星形等等。



柒、參考資料

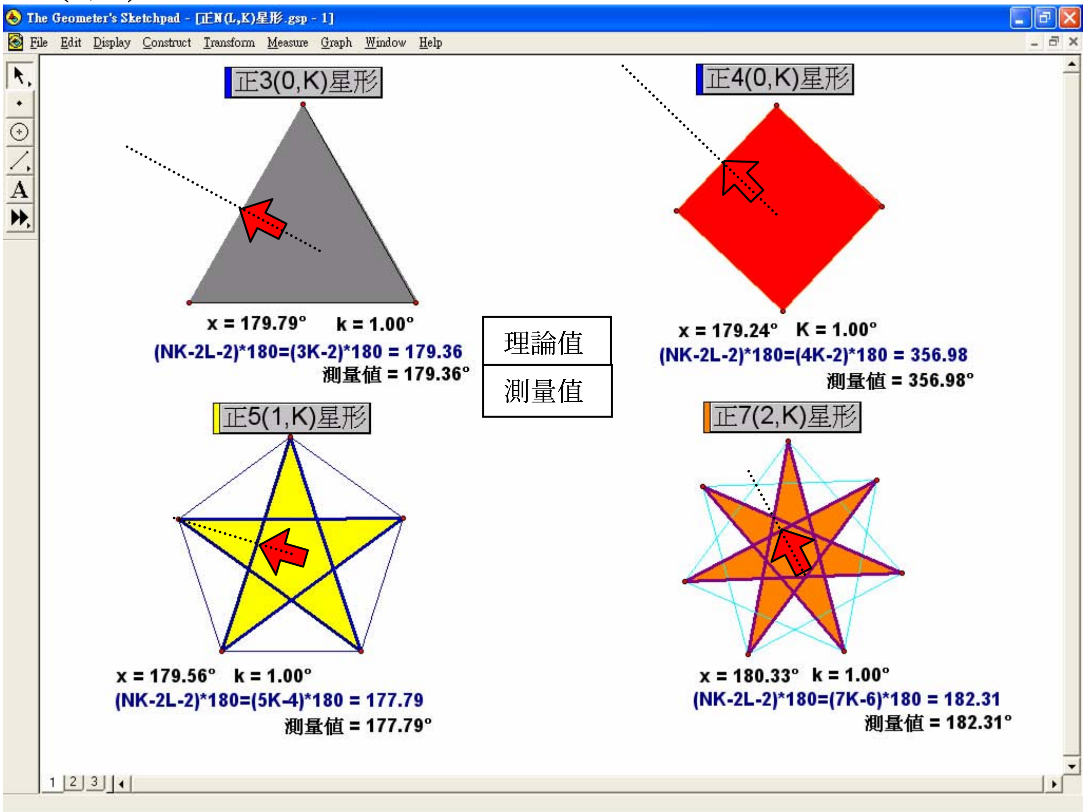
一、徐立民、陳圳興（民 93）。1-1 內角與外角。康軒文教事業數學-國中 3 上，6-18 頁

二、陳彥齊（民 90）。N角星形度數的探討。第四十一屆花蓮縣科學展覽。花蓮縣立花崗國民中學。取自 http://www.hgjh.hlc.edu.tw

附錄一

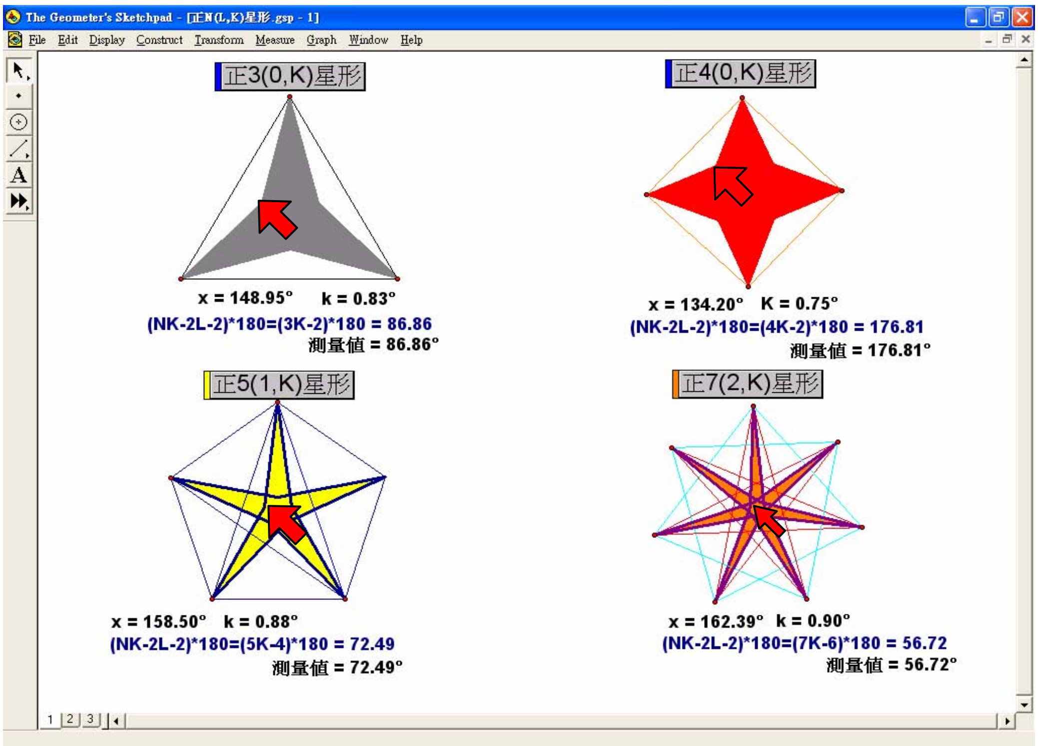
GSP 實作：範例 1

正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形系列，L=0、1、2。N 從最簡單的三角星出發。證得公式解的正確性。



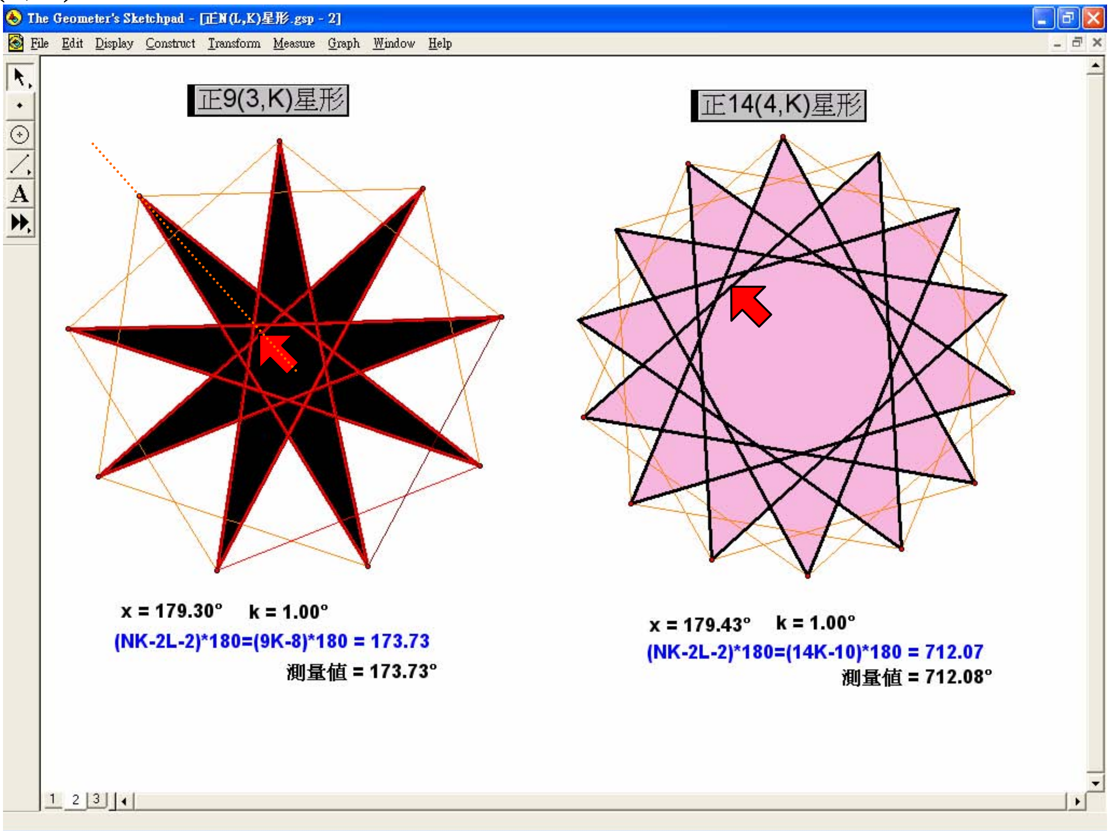
註 1：所有紅色箭頭均表示折點位置，折點位於星線中點，且折點移動的路徑（以虛線示意）與各星線（未凹折時）垂直。

註 2：每個星形下方均有星形內角和的<u>測量值</u>與<u>理論值</u>作對照。測量值是利用 GSP 測量每一個內角的總合，而理論值是將測得的 K 值帶入公式中求得。



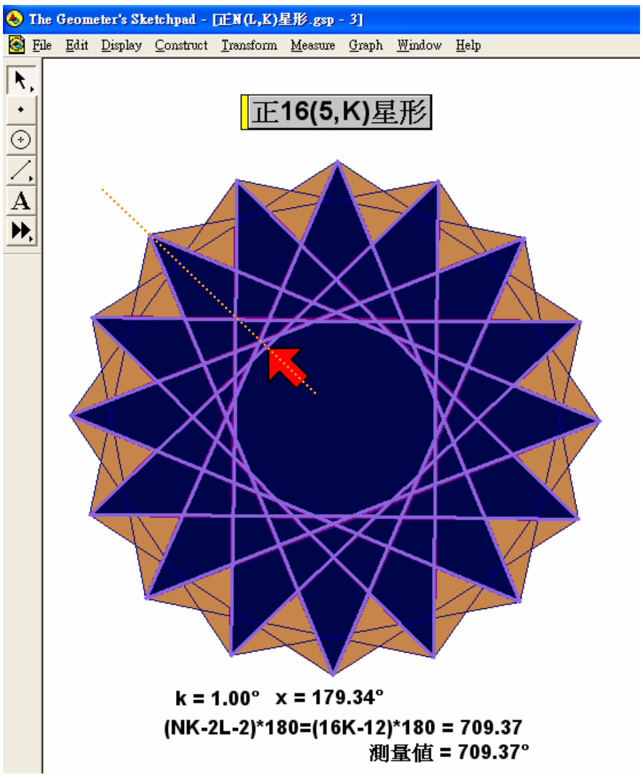
GSP 實作：範例 2

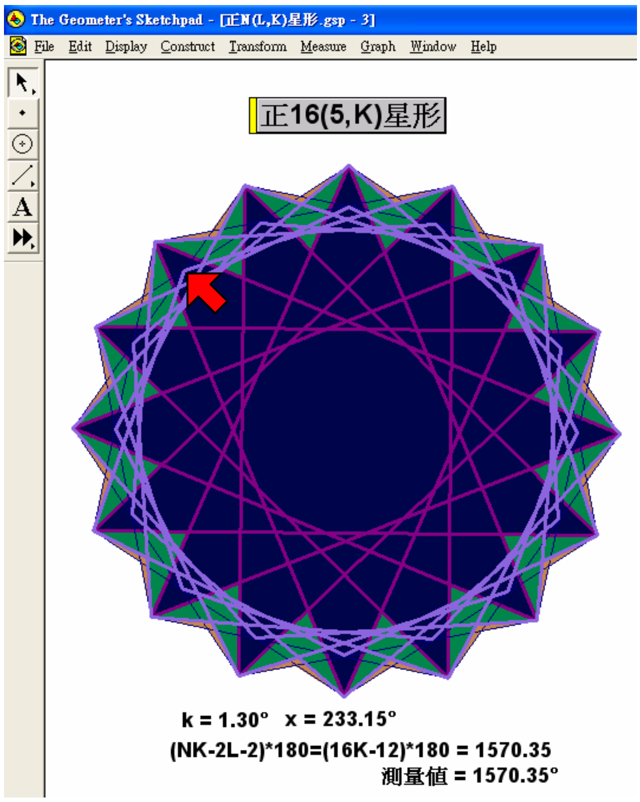
正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形系列，L=3、4。N 分別為 9 和 14。其餘同上。



GSP 實作：範例 3

正 $\hat{N}(L,K)$ 折線星形系列，L=5，N 的最小值為 13，我們挑戰繪製正 16 角星形，還沒畫完已經眼冒金星了，不過還好最後測量值與理論值跑出來是一樣的。



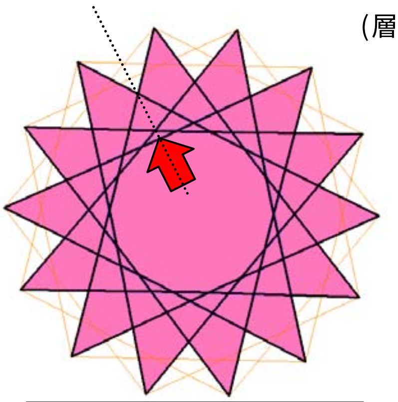


附錄二

GSP 實作：星形漸變展示

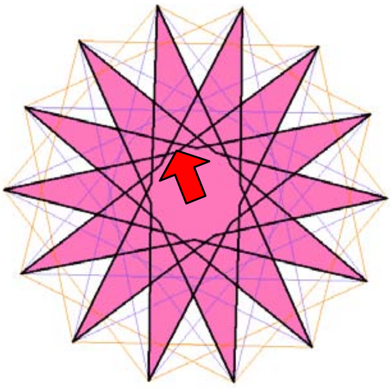
說明：

正$1\hat{4}(4,K)$折線星形的變化是由*<u>正 14（4）直線星形</u>*起始，折點向內凹至***正 14 條放射線***，而向外凸至***正 14（2）直線星形***。由 5/7≦K≦9/7 的範圍來說，K 值每增加（減少）1/7，星形層數恰會減少（增加）1 層。因此**正$1\hat{4}(4,K)$折線星形**的演變包含了（*表 1*）正 14 角星形第二層至第五層的星形，以及層與層之間的無窮多種星形。



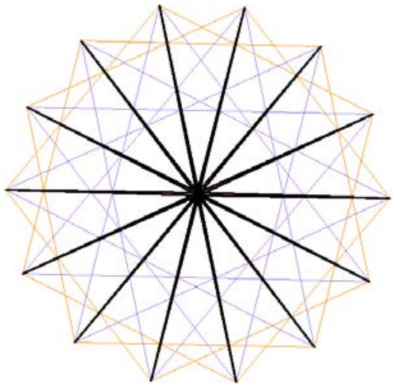
正 14（4）直線星形
=正$1\hat{4}(4,1)$折線星形

折點向內凹
（層數加一）



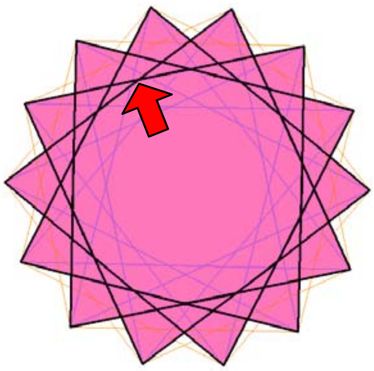
正 14（5）直線星形
=正$1\hat{4}(4,6/7)$折線星形

折點向內
凹到底



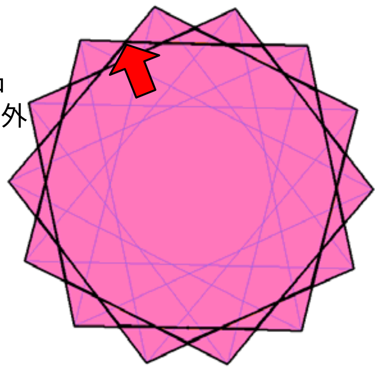
正 14 放射線
=正$1\hat{4}(4,5/7)$折線星形

折點向外凸
（層數減 1）



正 14（3）直線星形
=正$1\hat{4}(4,8/7)$折線星形

折點向外凸
到底（星形外
框）



正 14（2）直線星形
=正$1\hat{4}(4,9/7)$折線星形

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國中組 數學科

佳作

030417

物換星移 折折稱奇

高雄縣立甲仙國民中學

評語：

對 n 角星形的角度和做完整的探討構思不錯，唯研究方法若能再深入更佳。