中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030416

格格「有路」：點數 面數-線數=1？！

金門縣立金城國民中學

作者姓名：
國二 戴克穎 國二 王玉鑫 國二 許德麟

指導老師：
宋文法

格格『有路』

點數＋面數－線數＝1？！

壹、摘要：

生活中隨處可見數學的美與它的影響力！學校停車場地是我們每天上下學必經的場地，原本熟悉、平凡到無奇，想不到可以從一個簡單的問題中，透過不斷的追問、觀察、發現與驗證，進而確定其中數形的變化規則，而且我們還發現這些有規律的平面圖形結構，其間的（交點數＋單元凸多邊形面數－之間相鄰的邊數）竟然都等於定值 1！想不到課堂上所學的數學知識，真的非常有用，幫助我們快速又準確解決看似複雜的趣味難題。

貳、研究動機：

在我們校園停車場地裡，散落著一些方格圖案，圍繞這些方格的是更小的方塊磚。對這些圖形佈置，我們深感興趣，記得曾經在數學課討論過數形關係的主題，於是我們腦袋裡快速浮現下面這些問題：在一個 3×3 大方格樣式裡總共會有有多少個小塊方磚圍繞呢？能不能找到較快的方式算出小塊方磚的數目呢？而大方格數與周圍的小塊方磚數有沒有某種關係存在呢？……以下是我們對這些問題的追蹤與討論。

参、研究問題：

一、在一個 3×3 大方格樣式裡有會圍繞著多少個小塊方磚呢？

二、如果是 10×10 大方格樣式呢？能不能找到較快的方式算出小塊方磚的數目呢？

三、大方格樣式中的**大方格數**與**圍繞的邊數**、**交接的角落點數**，彼此之間存不存在某種關係呢？

四、如果方格樣式改為其他多邊形樣式，比如：三角形、五邊形……則情況會有如何變化呢？

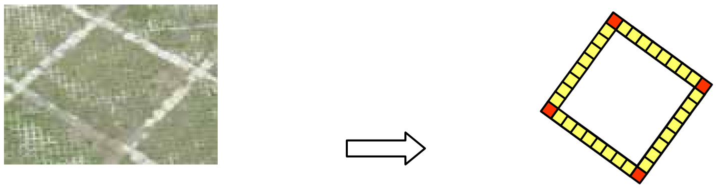
肆、研究內容：

一、問題的起點：

我們第一個有興趣的問題是：究竟在一個 3×3 大方格樣式(如右下圖形)裡共圍繞多少塊小塊方磚呢？

(一)、思考策略：

我們仔細觀察圍繞一個大方格周圍的小塊方磚，發現如果將它們分成兩類在解題上較為簡單，也就是說，我們將圍繞大方格的小塊方磚分類成右下圖中的紅黃兩類：

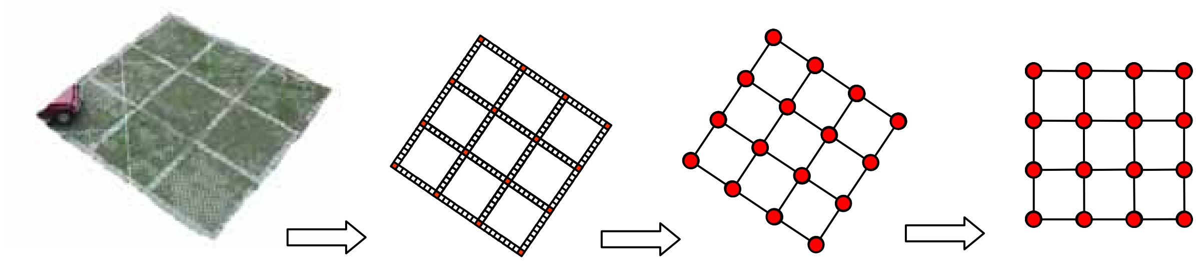


其中，黃色部分我們稱為圍繞大方格的四個**邊**，而紅色部分我們稱為圍繞大方格的四個**角落點**。因為每個**邊**上有 8 塊小塊方磚，每個**角落點**各有 1 塊小塊方磚，只要求出**邊數**和這些**角落點數**就可以推知結果。

(二)、問題數學化：

根據以上策略，我們便可將一個 3x3 的大方格樣式，逐步簡化成為下圖最右側的 3x3 正方格，而從簡圖中馬上就可以發現，其中共有 24 個相鄰**邊**、16 個**點**，因此所有圍繞 3x3 大方格的小塊方磚數共有：

$8\times24+1\times16=192+16=208$(塊)



二、問題的複雜度提高：

在 3x3 大方格樣式中找交點數及邊數，數量不多只要數一數便可求出答案，但如果要算出 10x10 或是更複雜的大方格樣式，這樣做是一件非常累人的事情，顯然尋求其他策略有其必要性。

(一)、規律的尋找：

為了要能快一點找出 10x10 或更大的大方格樣式中的所有角落點數與邊數，我們試著有系統地觀察一些例子，看看能不能找到一些規律性。(以下的大方格樣式圖形皆是為了方便觀察而轉正後的簡圖。)

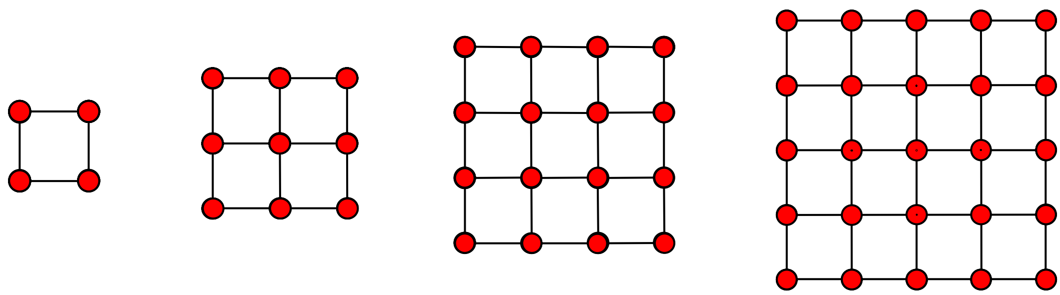


圖 1　　圖 2　　圖 3　　圖 4

由上列圖形可觀察出：
① 1×1 的大方格樣式裡可找出裡面有 4 個角落點與 4 條邊(圖 1)
② 2×2 的大方格樣式裡可找出裡面有 9 個角落點與 12 條邊(圖 2)
③ 3×3 的大方格樣式裡可找出裡面有 16 個角落點與 24 條邊(圖 3)
④ 4×4 的大方格樣式裡可找出裡面有 25 個角落點與 40 條邊(圖 4)……

我們把這些觀察製成下表：

大方格樣式 / 項目	1×1	2×2	3×3	4×4	……	10×10
點	4	9	16	25	……	?
邊	4	12	24	40	……	?

(二)、大方格樣式中所有的角落點數：
我們可從上表中清楚的觀察到角落點數的變化如同下列數列：
4、9、16、25……
而這些數字分別是以下數列各項的平方數：
2、3、4、5……
他們對應的大方格樣式分別爲：
1×1、2×2、3×3、4×4……
也就是說，這些角落點數是其對應的大方格樣式的大邊長加 1 後的平方數，所以我們推論：
10×10 的大方格樣式中的角落點數應該有
$(10+1)^2=11^2=121$ (個角落點)

(三)、大方格樣式中所有的所有的邊數：
再仔細觀察上表邊數的變化，可發現數列的規律都是依照 4 的倍數排列下去的：
4 、12 、24 、40 ……
⇨ 4×1、4×3、4×6、4×10……
再進一步的觀察可得到：
4＝4×1、12＝4×(1+2)、24＝4×(1+2+3)、40＝4×(1+2+3+4)……
而他們對應的大方格樣式分別爲：
1×1、2×2、3×3、4×4……
所以我們推論：
10×10 的大方格樣式中的所有邊數
＝4×(1+2+3+4+…+9+10)
＝4×[(1+10)×10÷2]
＝4×55
＝220 (個邊)

(四)、推論答案：

現在一來，大方格樣式中所有的所有的小塊方磚數就可求出：因爲每一個角落點代表 1 塊小塊方磚，而每個邊又有 8 個小塊方磚，由上列(二)、(三)分別得知 10×10 大方格樣式中**角落點數**與**邊數**分別爲 121 及 220，所以所有圍繞的小塊方磚數目

＝121×1＋220×8

＝121＋1760

＝1881 (個小塊方磚)

(五)、一般化討論：

爲了方便解決更大、更複雜的方格問題，我們做了一般化的討論，因此我們把上面的表格重新整理成下表：

大方格樣式 / 項目	1×1	2×2	3×3	4×4	⋯	10×10	n×n
點	$(1+1)^2$	$(2+1)^2$	$(3+1)^2$	$(4+1)^2$	...	$(10+1)^2$	?
邊	4×1	4×(1+2)	4×(1+2+3)	4×(1+2+3+4)	⋯	4×(1+2+⋯+10)	?

從此表依序觀察，我們推論 n × n 的大方格樣式中

角落點數應該有：$(n+1)^2$　(個)

邊數共有＝4(1+2+3+⋯⋯+n)＝ $4\times\dfrac{(n+1)\times n}{2}$ ＝2n(n+1)　(個)

也是就說，從這一般的式子裡面我們可以快速的算出所有 n × n 的大方格樣式中角落點數及邊個數，進而把圍繞的的小塊方磚數目算出來，例如在一個更大的大方格樣式：

20×20 的大方格樣式中

角落點數共有：$(20+1)^2＝21^2＝441$

邊數共有：2×20×(20+1)＝40×21＝840

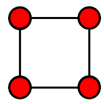
所以圍繞的小塊方磚數目＝441×1＋840×8＝441＋6720＝7161 (個小塊方磚)

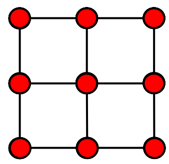
(六)、以數學歸納法證明這個一般化推論的正確性：

爲了支持我們這樣的推論是正確的，我們嘗試用數學歸納法來證明這些一般化式子：

命題 A：所有 n × n (n∈N)大方格樣式中的角落點數＝$(n+1)^2$

證明：





❶ 當 n＝1，

即 1×1 大方格樣式中的角落點數(如右圖)爲：

$4＝2^2＝(1+1)^2$，命題成立。

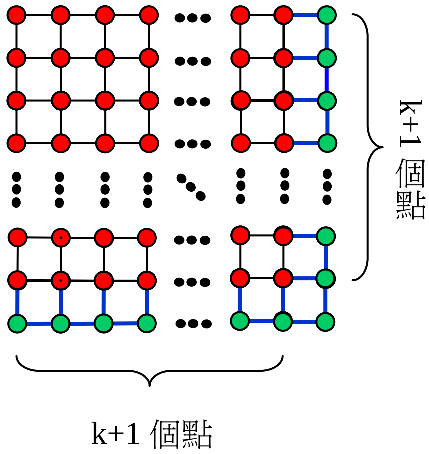
當 n＝2，

即 2×2 大方格樣式中的角落點數(如右圖)爲：$9＝3^2＝(2+1)^2$，命題成立。

❷假設 $n=k$ 成立，也就是說，在 $k\times k$ 大方格樣式中的角落點數共有 $(k+1)^2$ 如右下圖中的紅點數。

∵正方形的每邊皆相等，∴所以一個 k×k 大方格樣式每一邊的角落點數爲

$\sqrt{(k+1)^2}=(k+1)$ 個



❸當 $n=k+1$ 時，

因爲 $(k+1)\times(k+1)$ 大方格樣式爲 k×k 大方格樣式外圍再加上一層(如右圖中綠點)，即多了 $2(k+1)+1$ 個角落點。

因此 $(k+1)\times(k+1)$ 大方格樣式中的所有角落點數是 k×k 大方格樣式的所有紅色點數再加上外圍這一層的綠色點數，

即 $(k+1)^2+[2(k+1)+1]=(k^2+2k+1)+(2k+2+1)=k^2+4k+4=(k+2)^2$

$=【(k+1)+1】^2$，命題成立

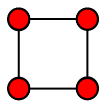
得證：對於所有 $n\in N$ 的 $n\times n$ 大方格樣式的角落點數爲 $(n+1)^2$

#

<u>命題 B</u>：所有 $n\times n$ $(n\in N)$ 大方格樣式中的邊數 $=2n(n+1)$

證明：

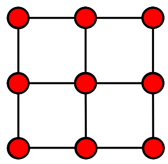
❶ 當 $n=1$，



即 1×1 大方格樣式中的邊數(如右圖)爲：

$4=2\times2=2\times1\times(1+1)$，命題成立。

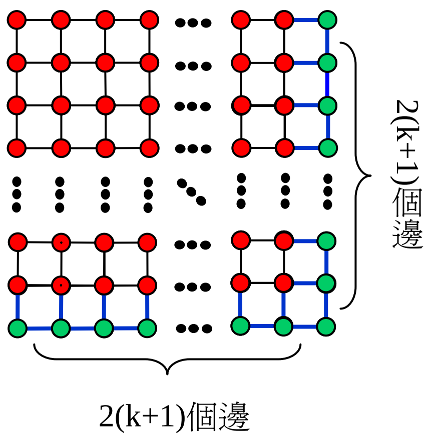
當 $n=2$，



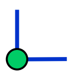
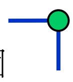
即 2×2 大方格樣式中的邊數(如右圖)爲：

$12=4\times3=2\times2\times(2+1)$，命題成立。

❷假設 $n=k$ 成立，也就是說，在 $k\times k$ 大方格樣式中的邊數共有 $2k(k+1)$ 個，如右下圖中紅色點數間的黑色線段。



❸當 $n=k+1$ 時，

因爲 $(k+1)\times(k+1)$ 大方格樣式爲 k×k 大方格樣式外圍再加上一層(如右圖中藍色線段)，可分解成橫向 k+1 個  樣式及縱向 k+1 個 ，即多了 $2\times[2\times(k+1)]$ 個邊。

因此(k+1)×(k+1)大方格樣式中的所有邊個數是 k×k 大方格樣式的所有黑色線段再加上外圍這一層的藍色線段，即

$2k(k+1)+2\times[2\times(k+1)]\ =(2k^2+2k)+(4k+4)=2k^2+6k+4=2(k^2+3k+2)$

$=2(k+1)(k+2)=2(k+1)[(k+1)+1]$

得證：對於所有 n∈N 的 n × n 大方格樣式中的邊個數爲 2n(n+1)

#

太棒了！如此一來，我們有了這個一般化式子，就可以精準而快速地算出停車場地裡圍繞方格<u>小塊方磚</u>的個數，也就是說，任何一個 n × n 大方格樣式中所有圍繞的<u>小塊方磚</u>個數 $=(n+1)^2\times1+2n(n+1)\times8=17n^2+18n+1=(n+1)(17n+1)$ (個)

三、點數＋面數－線數＝？

其實在停車場中的<u>小塊方磚</u>個數求法的重點，是在於找出角落點數與邊數即可，但是大方格樣式中的方格數(以下簡稱爲**面數**)與角落**點數**、圍繞的**邊數**，彼此之間有沒有某種關係存在呢？以下是我們再進一步的追蹤與討論：

(一)、大方格樣式中所有的正方格個數：

我們觀察大方格的個數的變化後製成下表：

大方格樣式 \ 項目	1×1	2×2	3×3	4×4	…
面數	1	4	9	16	…

我們得到下面這個對應的面數數列：

1、4、9、16……

也就是說面數就是每邊大方格數的平方。這個推論非常顯然，我們也利用了數學歸納法把它證明了一下：

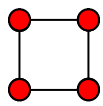
<u>命題 C</u>：所有 n × n (n∈N)大方格樣式中的面數 $=n^2$

證明：

❶ 當 n＝1，

即 1x1 大方格樣式中的面數(如右圖)爲：

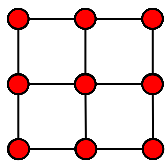
$1=1^2$，命題成立。



當 n＝2，

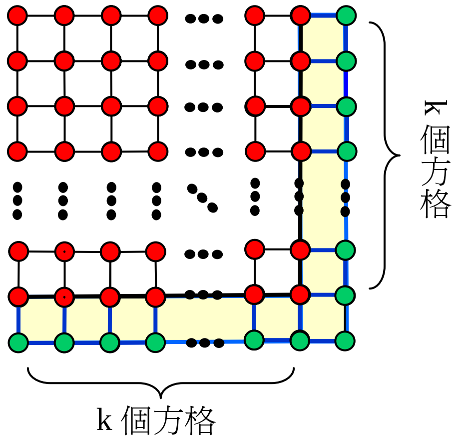
即 2x2 大方格樣式中的面數(如右圖)爲：

$4=2^2$，命題成立。



❷假設 n＝k 成立，也就是說，在 k × k 大方格樣式中的面數共有 k^2，如右下圖中的紅點所圍住的方格。∵正方形的每邊皆相等，∴k×k 大方格樣式每一邊的面數爲

$\sqrt{k^2}$ ＝k 個。



❸當 n＝k+1 時，
因爲(k+1)×(k+1)大方格樣式爲 k×k 大方格樣式外圍再加上一層(如右圖中黃色區域)，即多了 2k+1 個方格(面)。因此，(k+1)×(k+1)大方格樣式中的所有面數是 k×k 大方格樣式的所有紅色點數包圍的方格，再加上外圍這一層的綠色點數包圍的方格，即 $k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=k^2+2k+1^2=(k+1)^2$，命題成立。
得證：因此對於所有 n∈N 的 n × n 大方格樣式的面數爲 n^2

#

(二)、點數＋面數－邊數＝1？！：

爲了能了解大方格樣式中點數、邊數和面數關係，我們把點數、面數、邊數同時放入下表格以便觀察。

大方格樣式 / 項目	1x1	2x2	3x3	4x4	…
點數	4	9	16	25	…
面數	1	4	9	16	…
邊數	4	12	24	40	…

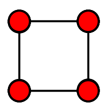
仔細觀察上表中每一種大方格樣式點面邊的數目關係，我們發現它們都滿足以下式子：點數＋面數－邊數＝1。

由於我們擁有的數據並不多，所以我們無法肯定這一項發現往後延伸推論仍然是否會成立，因此我們嘗試以數學歸納法來驗證：

命題 D：所有 n × n (n∈N)大方格樣式中的點數、面數、邊數有以下的關係
點數＋面數－邊數＝1

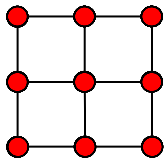
證明：

❶ 當 n＝1，
即 1x1 大方格樣式中(如右圖)的
頂點數爲：4，面數爲：1，邊數爲：4，



∴點數＋面數－邊數＝4＋1－4＝1，命題成立。

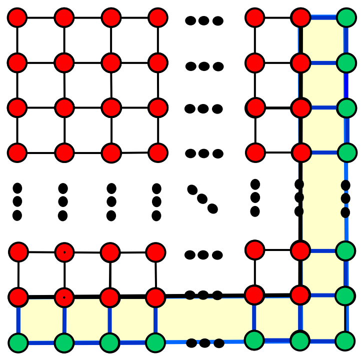
當 n＝2，

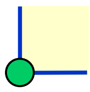
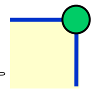
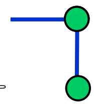


即 2×2 大方格樣式中(如右圖)的點數爲：9，面數爲：4，
邊數爲：12，
∴點數＋面數－邊數＝9＋4－12＝13－12＝1，命題成立。

❷假設 n＝k 成立，
也就是說，在 k × k 大方格樣式中的點數＋面數－邊數＝1

❸當 n＝k+1 時，
因爲(k+1)×(k+1)大方格樣式爲 k×k 大方格樣式(右下圖紅色區域)外圍再加上一層(如右下圖黃色區域)，我們把多加



的那一層先橫向分解成數個☞ 、再縱向分解數個☞ ，但是在縱向分解時，最後在右下角落角落剩下一個☞ (2 個邊，2 個綠點，但少一個黃色面的)。
這三種分解單位中，各自(點數＋面數－線數)的結果皆是 0，
因此，(k+1) ×(k+1)的大方格樣式中的(點數＋面數－邊數)的結果是跟 k×k 的大方格樣式一樣的，也就是說，
點數＋面數－邊數＝1，命題成立。

得證：對於所有 n∈N 的 n × n 大方格樣式的點數＋面數－邊數＝1

#

(三)、Double Check：

其實由前面我們證明過的命題 A、B、C，也可以來檢驗 n×n 大方格樣式中的點數、面數及線數之間的關係。由命題 A、B、C 可知：n×n 大方格樣式中的點數＝$(n+1)^2$，面數＝n^2，邊數＝2n(n+1)。

所以：點數＋面數－邊數＝$(n+1)^2+n^2-2n(n+1)=(n^2+2n+1)+n^2-(2n^2+2n)$
$=2n^2-2n^2+2n-2n+1=1$

經由以上的討論，我們發現到、也證明了大方格樣式中的點數、面數與邊數維持一定的關係，也就是說：點數＋面數－邊數＝1

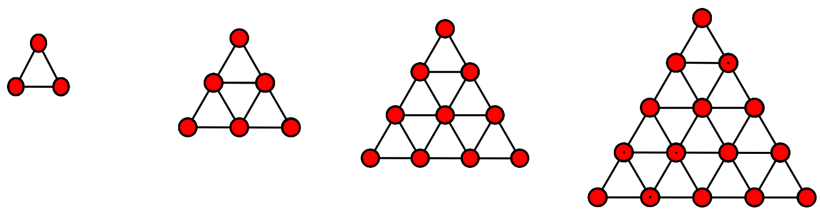
想不到最後的式子竟然這麼『乾淨、簡潔』，真是令人意外，也驚訝數學的美居然就近在咫尺，藏身在我們週遭呢！

四、延伸思考

解決這個停車方格問題後，我們接下來感到有興趣的問題是：如果把正方格結構改成其他正多邊形結構，情況會有什麼變化呢？還是可以找到其間的規律性？而結構中點、線及面的數目的關係會跟正方形結構一樣嗎？以下我們的討論的重心在於結構間的點數、面數與線數：

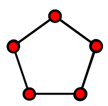
(一)、有限的正多邊形結構：

因爲在正方形結構中，每增加新一層的結構都是複製第一個起始的正方形點、邊、面組合，也就是全等圖形(正方形)的複製組合結構，因此如果將起始結構的正方形改成正三角形時，其逐層增加的變化會有如下的結果：

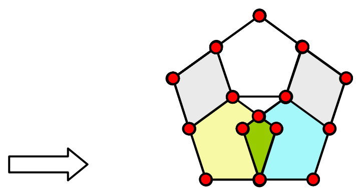


……

然而，如果起始結構是其它大於四邊的正多邊形(即不是正三角形及正方形)，例如，正五邊形，則它們在發展第二層結構時，會有不一樣的的多邊形結構產生(例如右下圖中的兩個灰色四邊形)，甚至產生圖形重疊的現象(例如右下圖中黃色及藍色的兩正五邊形重疊)，因此也就無法形成皆爲全等的正多邊形組合結構。



（起始結構）



（第二層衍生結構）

因此，以下我們將只討論到正三角形結構的頂點數、面數及邊數的規律性與其之間的關係。

(二)、正三角形結構的頂點數、面數及邊數：

我們嘗試著把正角形結構中的頂點數、面數及邊數，有系統的列成下表，以方便我們進一步的觀察及推論：

層數 / 項目	1 層	2 層	3 層	4 層	…
頂點數	3	6	10	15	…
面數	1	4	9	16	…
邊數	3	9	18	30	…

1、頂點數規律的觀察與證明

頂點數的變化為：3、6、10、15……

（1）、觀察與推論：

我們觀察頂點數目的變化時，發現：其中，從第一層跟第二層做比較時，兩者點數相差為 3，從第二層跟第三層做比較時，兩者點數相差為 4，從第三層跟第四層做比較時，兩者點數相差為 5……。而又 3＝1+2(一層結構：連續兩個數字相加)、6＝1+2+3(二層結構：連續三個數字相加)、10＝1+2+3+4(三層結構：連續四個數字相加)、15＝1+2+3+4+5(四層結構：連續五個數字相加)……。

因此我們做了這樣大膽的推測：

10 層三角結構的頂點數＝1+2+3+…..+9+10+11(連續 11 個數字相加)

＝(1+11)×11÷2＝12×11÷2＝6×11＝66 (個點)

也就是說，依此類推，n 層三角結構的頂點數＝1+2+3+…+n＋(n＋1)

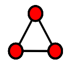
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

（2）、證明推論的正確性：

命題 D：n 層三角結構的頂點數目＝$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

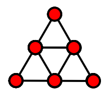
證明：

❶ 當 n＝1，



1 層三角結構的頂點數目(如右圖)＝3＝$\dfrac{(1+1)\times(1+2)}{2}$，命題成立。

當 n＝2，

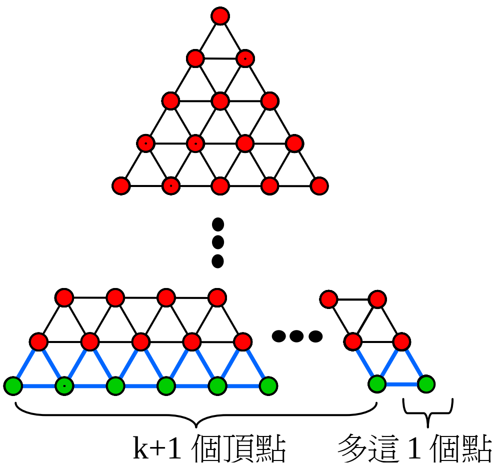


2 層三角結構的頂點數目(如右圖)＝6＝$\dfrac{(2+1)\times(2+2)}{2}$，命題成立。

❷假設 n＝k 成立，

也就是說，k 層三角結構的頂點數目＝$\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

❸當 n＝k+1 時，



因為 k+1 層三角結構(如右圖)比 k 層三角結構(紅色區域)的層數多了一層(右圖綠色區域)，而這一層比 k 層三角結構的最後一層多了 1 個頂點，相當是把 k 層最後一排的所有頂點往左下 45 度移動一格(如右圖的 k+1 個綠點)，然後在最右邊加上一個頂點。又因為 k 層最後一層共有 k+1 個頂點，所以 k+1 層三角結構比 k 層三角結構多了(k+1)+1 個頂點，即 k+2 個頂點數。

因此 k+1 層三角結構中所有的頂點數

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}+(k+2)=\frac{k^2+3k+2}{2}+\frac{2k+4}{2}$$

$$=\frac{k^2+5k+6}{2}=\frac{(k+2)(k+3)}{2}=\frac{[(k+1)+1][(k+1)+2]}{2}$$ ，命題成立

得證：對於所有 $n\in N$ 的 n 層三角結構中的頂點數目

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

#

2、面數規律的觀察與證明

面數的變化為：1、4、9、16……

（1）、觀察與推論：

顯然這些數字是下列數列各項的平方數：

1、2、3、4……

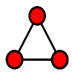
因此可以大膽的推測：10 層三角結構的面數有 10×10＝100(個面)，依此類推，n 層三角結構的頂點數應該有 n^2 個面。

（2）、證明推論的正確性：

命題 E：n 層三角結構的面數＝n^2

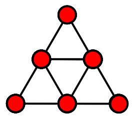
證明：

❶ 當 n＝1，



1 層三角結構的面數(如右圖)＝1＝1^2，命題成立。

當 n＝2，

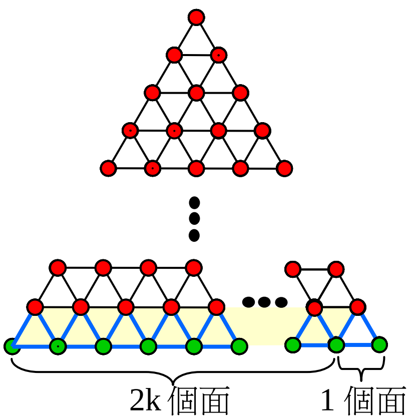


2 層三角結構的面數(如右圖)＝4＝2^2，，命題成立。

❷假設 n＝k 成立，

也就是說，k 層三角結構的面數＝k^2

❸當 n＝k+1 時，



因為 k+1 層三角結構(如右圖)最後一層(綠點部分)的面數共有 2k+1 個，因此 k+1 層三角結構中所有的面數

$=k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=k^2+2k+1^2$

$=(k+1)^2$，命題成立。

得證：對於所有 $n\in N$ 的 n 層三角結構中的面數＝n^2

#

3、邊數規律的觀察與證明

邊數的變化為：3、9、18、30……

（1）、觀察與推論：

從第一層跟第二層做比較時，發現兩者邊數相差為 6，從第二層跟第三層做比較時，發現兩者邊數相差為 9，從第三層跟第四層做比較時，發現兩者邊數相差為 12……顯然，這些數字都是 3 的倍數，因此將 3 提出：

$3=3\times1$、$9=3\times(1+2)$、$18=3\times(1+2+3)$、$30=3\times(1+2+3+4)$……

因此我們大膽推測：10 層三角結構的邊數共有

$3\times(1+2+3+\cdots+9+10)=3\times[(1+11)\times10\div2]=3\times(11\times5)=165$ (個邊)

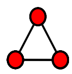
依此類推，n 層三角結構的邊數應該有

$$3\times(1+2+3+\cdots+n)=3\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3n(n+1)}{2}$$

（2）、證明推論的正確性：

命題 F：n 層三角結構的邊數$=\dfrac{3n(n+1)}{2}$

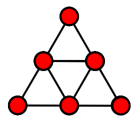
證明：



❶ 當 $n=1$，

即 1 層三角結構中(圖右)的邊數為 $3=6\div2=3\times1\times(1+1)\div2$，命題成立。

當 $n=2$，



即 2 層三角結構樣式中(圖右)的邊數為

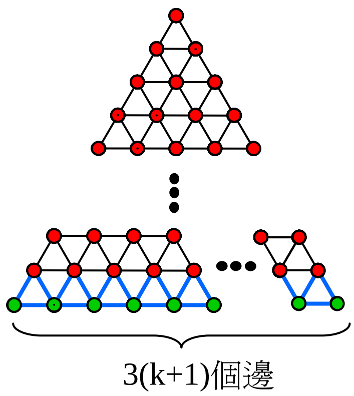
$9=18\div2=3\times2\times(2+1)\div2$，命題成立。

❷假設 $n=k$ 成立，也就是說，k 層三角結構中的邊數共有

$\dfrac{3n(n+1)}{2}$ 個，如右下圖中的紅色點包圍的黑色線段。

❸當 $n=k+1$ 時，

因為(k+1)層三角結構為 k 層三角結構下面再加上一層(如右圖中藍色線段)，即多了 3(k+1)個邊。(因為右圖中，(k+1)層三角結構底部的邊有 k+1 個，而每個邊上面又有兩個邊，所以共有 3(k+1)個邊。)



因此(k+1)層三角結構中的所有邊個數，是 k 層三角結構的所有黑色線段再加上最下面這一層的藍色線段，即

$$\frac{3k(k+1)}{2}+3(k+1)=\frac{3k^2+3k}{2}+\frac{6k+6}{2}=\frac{3k^2+3k+6k+6}{2}$$

$$=\frac{3k^2+9k+6}{2}=\frac{3(k^2+3k+2)}{2}=\frac{3(k+1)(k+2)}{2}$$

$$=\frac{3(k+1)[(k+1)+1)]}{2}$$ ，命題成立。

得證：因此對於所有 $n\in N$ 的 n 層三角結構中的邊個數爲 $\frac{3n(n+1)}{2}$

#

(三)、正三角形結構的頂點數、面數及邊數的關係：

在前面的討論裡，我們利用了數學歸納法證明出我們的觀察是正確的，也就是說：n 層三角結構的頂點數＝$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$，面數＝n^2，邊數＝$\frac{3n(n+1)}{2}$。因此，我們也試著來計算一下它們所對應的頂點數、面數與邊數的關係：

頂點數＋面數－邊數

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+n^2-\frac{3n(n+1)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}+\frac{2n^2}{2}-\frac{3n^2+3n}{2}$$

$$=\frac{n^2+3n+2+2n^2-3n^2-3n}{2}=\frac{2}{2}=1$$

想不到在正三角結構中，頂點數、面數與邊數仍然維持這樣一定的關係，真是令人感到驚奇。

伍、研究結果與討論：

一、我們一開始在探討停車場中的小塊方磚的個數問題，而有了以下的結論：

(一)、在 3×3 大方格樣式中的小塊方磚爲 8×24＋1×16＝192＋16＝208(塊)，而延伸到 10×10……n×n 的大方格樣式中的小塊方磚分別爲：

121×1＋220×8＝121＋1760＝1881 塊

$(n+1)^2\times1+2n(n+1)\times8=17n^2+18n+1=(n+1)(17n+1)$塊

(二)、小塊方磚的數量又與邊數、點數相關，所以推斷、證明出在任何 n×n 的大方格樣式中邊數、點數滿足下列關係式：邊數＝2n(n+1)，點數＝$(n+1)^2$。

這些式子可以有效的幫助我們解決有關更大方格圖形點數及邊數的問題。

在這些大方格樣式中的點數、邊數、面數彼此之間又隱含了神奇關係，那就是：點數＋面數－邊數＝１。

(三)、當問題做水平延伸思考的時候，也就是說將上述問題中的正方形改成其他正多邊形結構時，例如：正三角形、正五邊形……，但是因爲正五邊形以上的正多邊形會產生圖形重疊的現象，所以不與討論，不過在任何 n 層正三角形結構中的點數＝$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$、邊數＝n^2、面數＝$\frac{3n(n+1)}{2}$，從此三者的關係當中又找到了與正方形同樣的結果，那就是：

點數＋面數－邊數＝１。

(四)、有了點數＋面數－邊數＝１這個關係式之後，就可以幫助我們檢驗算出來的點數、邊數、面數之結果是否正確，並且適用於所有正三角形、正方形結構中。

二、這只是個開始：

老師提醒我們，所有空間的立體圖形的點數、邊數(稜線數)、面數，皆遵循尤拉公式，也就是說點數＋面數－邊數(稜線數)＝2，而在我們這一次所討論的正三角形結構和正方形結構中，點數＋面數－邊數＝1，我們猜想會不會是因爲正三角形結構和正方形結構中屬於二維平面，與立體三維空間兩者的差別就在於少了建築在平面上的高，因此（點數＋面數－邊數）的結果少了 1。另外，如果把這個問題推廣到更一般的的平面圖形，它們是否也都依循著這個關係：點數＋面數－邊數＝1，還是有其他限制條件呢？……這些非常有意思的問題，真的很值得我們以後有機會再追根究底下去。

陸、研究感想：

本次的數學探討中，從一個學校中平凡無奇的停車場，衍生出這麼多的學問，從尋找答案的過程中不斷發現新的知識，讓我們了解到處處皆學問的道理，並且所學到的東西能夠運用在生活當中，這是一個在學習生涯中難能可貴的經驗！

柒、參考資料：

1、*數學思考*（Thinking Mathematically，John Manson, Leone Burton & Kave Stancey 合著），台北市立建國高級中學 49 屆 314 班全體同學合譯，九章版社，2004 年 4 月。

2、*高中數學第一冊*，數學歸納法，南一書局出版社，2004 年 8 月修定版。

3、*昌爸工作坊*，多面體之 Euler's 公式篇，http://www.mathland.idv.tw/，2005 年，5 月 16 日。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國中組 數學科

030416

格格「有路」：點數 面數−線數=1？！

金門縣立金城國民中學

評語：

利用點數、面數與邊數來簡化計算，給出了方格數的一般化結果，值得稱許。只是與尤拉公式間的關聯性仍有待釐清，且此結論事實上並不只侷限於規則圖形。