

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030415

等不到車？載不到人？

臺中市立崇倫國民中學

作者姓名：

國二 黃紀元 國二 許督敖 國二 劉羿劭

國二 蔡孟橋

指導老師：

邱維昭 涂宏禎

目 錄

摘要.....	2
壹、研究動機.....	3
貳、研究目的.....	3
參、研究設備及器材.....	3
肆、研究過程.....	4
伍、研究結果.....	8
陸、討論.....	8
柒、結論.....	9
捌、參考資料.....	9
附表.....	10

摘 要

針對一般人在等公車時，常會遇到的問題：

- 1.等很久都等不到車；
- 2.雖然車來了，可是卻同時來兩、三班車。

這樣的情況下，一方面浪費許多乘客的時間；另一方面也顯得客運公司的營運沒有效率。因此我們將公車發車的間隔時間、乘客上下車所花費的時間、前後兩班公車到達同一候車站的間隔時間、每班公車在各個候車站可能上下車的人數.....等設為變數，推導出公車在路線上行進的規律式，利用 Microsoft Excel 應用軟體計算出公車最可能集結的地點，進而發展出客運公司及乘客解決問題的策略。

壹、研究動機

在炎熱的夏天或寒冷的冬天等候公車，絕不是件愉快的事，偏偏每次不是等不到公車，就是好不容易等到了公車，卻又是氣死人的兩、三班車同時來，害許多人平白無故地遭受風吹日曬雨淋。若是客運公司能平均地分散車班，或是我們能選在對的時間去等車，一定能節省許多不必要的等待時間。

貳、研究目的

在單一公車路線上，調查各站乘客到站候車的分佈情形，搭配將班車發車的間隔時間設為常數 T ，以及將每位乘客上、下車所花費的時間設為常數 t ，我們希望透過相鄰兩班公車到達各站間隔時間的連鎖關係，導出一對應的關係式，進而提供下列解決問題的對策：

- 一、若相鄰兩班公車會在中途集結，集結點會出現在哪裡？客運公司該如何調整發車的時間，才能避免集結的情況發生，又不至於讓乘客等太久？
- 二、搭車的乘客該選擇在什麼時間到達候車站，才最有可能將等候公車的的時間縮到最短？

參、研究設備及器材

紙、筆、電算機、電腦、Microsoft Excel 應用軟體。

肆、研究過程

一、條件描述

在單一公車路線上，假設每班公車發車的間隔時間及公車行駛的平均速率皆為定值，則各班公車在行駛路程所花的時間都相同，因此影響公車是否會在中途集結的因素只有各站上、下車人數的多寡。

若前一班公車的載客數比後一班公車多，那麼後一班車花在乘客上、下車的時間相對地就比前一班車少，因此兩班車會愈來愈接近。當前一班車比後一班車多花在乘客上、下車的時間超過兩班車發車的間隔時間時，就會發生在中途集結的現象。我們希望透過數學式來表達兩班公車集結的情況。

二、設定變數

候車站代號： $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{n-1}, S_n$ ，其中 S_0 為起站。

$C(i, j)$ ：第 i 班車在 S_j 站上車的乘客數。

$R(i, j)$ ：第 i 班車在 S_j 站下車的乘客數。

$D(i, j)$ ：第 i 班車在 S_j 站停車到第 $i+1$ 班車在 S_j 站停車並讓 $R(i+1, j)$ 名乘客下車所經過的時間(分鐘)。

$P(i, j)$ ：第 i 班車離開 S_j 站時車上的乘客數。

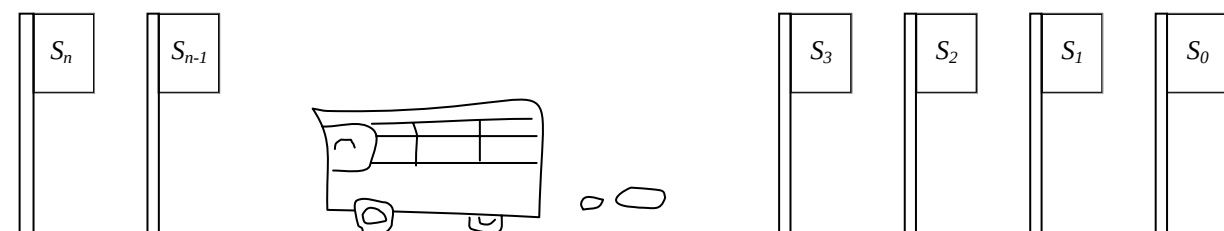
T ：相鄰兩班車發車的間隔時間(分鐘)。

t ：每位乘客上(下)車所花費的時間(秒鐘)。

其中 $C(i, j)$ 、 $R(i, j)$ 、 $D(i, j)$ 、 $P(i, j)$ 皆為非負整數， i 為正整數，

$j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ，且 $P(i, 0) = C(i, 0)$ 、 $R(i, 0) = 0$ 。

三、公式推導



當公車的行駛速度設為定值時，相鄰兩班公車的集結地點會出現在某一候車站，假設第 i 班車和第 $i+1$ 班車集結於 S_j 站，則直覺上集結的條件為

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{a=1}^j [C(i, a) + R(i, a)] - \sum_{b=1}^{j-1} [C(i+1, b) + R(i+1, b)] \right\} \times \frac{t}{60} > T \\ \Rightarrow & \left\{ \sum_{a=1}^j [C(i, a) + R(i, a)] - \sum_{b=1}^{j-1} [C(i+1, b) + R(i+1, b)] \right\} > \frac{60T}{t} \end{aligned} \quad (1)$$

在統計學中， S_j 站到站候車的人數 X_j 符合 *Poisson* 機率分佈，設其參數為 λ_j ， $j = 1, 2, 3, \dots, n$ 。其中 λ_j 亦為平均每位乘客到達 S_j 站候車的間隔時間(分鐘)。

現在從計算出第 1 班車與第 2 班車，兩班公車最有可能集結的候車站開始，看看是否能逐步推導出各班公車集結地點的規律性？當第 1 班車在 S_1 站有 $R(1, 1)$ 名乘客下車並載走 $C(1, 1)$ 名乘客後，到第 2 班車到達 S_1 站並讓 $R(2, 1)$ 名乘客下車之間共經過了 $T - \{[C(1, 1) + R(1, 1)] - R(2, 1)\} \times \frac{t}{60}$ 分鐘，所以

$$D(1, 1) = T - \{[C(1, 1) + R(1, 1)] - R(2, 1)\} \times \frac{t}{60} \quad (2)$$

那麼在這段時間內可能有 $\{T - \{[C(1, 1) + R(1, 1)] - R(2, 1)\} \times \frac{t}{60}\} \times \frac{1}{\lambda_1}$ 名乘客到達 S_1 站候車，所以

$$\begin{aligned} C(2, 1) &= \frac{T}{\lambda_1} - \{[C(1, 1) + R(1, 1)] - R(2, 1)\} \times \frac{t}{60} \times \frac{1}{\lambda_1} \\ &= D(1, 1) \times \frac{1}{\lambda_1} \end{aligned} \quad (3)$$

同理，當第 1 班車在 S_2 站有 $R(1, 2)$ 名乘客下車並載走 $C(1, 2)$ 名乘客後，到第 2 班車到達 S_2 站並讓 $R(2, 2)$ 名乘客下車之間共經過了

$$\begin{aligned} & D(1, 2) \\ &= T - \{[C(1, 1) + R(1, 1) + C(1, 2) + R(1, 2)] - [C(2, 1) + R(2, 1) + R(2, 2)]\} \times \frac{t}{60} \\ &= T - \left\{ \sum_{a=1}^2 [C(1, a) + R(1, a) - R(2, a)] - C(2, 1) \right\} \times \frac{t}{60} \end{aligned} \quad (4)$$

分鐘。那麼在這段時間內，可能又有

$$\frac{T}{\lambda_2} - \left\{ \sum_{a=1}^2 [C(1, a) + R(1, a) - R(2, a)] - C(2, 1) \right\} \times \frac{t}{60} \times \frac{1}{\lambda_2}$$

名乘客到達 S_2 站候車，所以

$$\begin{aligned} C(2, 2) &= \frac{T}{\lambda_2} - \left\{ \sum_{a=1}^2 [C(1, a) + R(1, a) - R(2, a)] - C(2, 1) \right\} \times \frac{t}{60} \times \frac{1}{\lambda_2} \\ &= D(1, 2) \times \frac{1}{\lambda_2} \end{aligned} \quad (5)$$

同理，當第 1 班車在 S_3 站有 $R(1, 3)$ 名乘客下車並載走 $C(1, 3)$ 名乘客後，到第 2 班車到達 S_3 站並讓 $R(2, 3)$ 名乘客下車之間共經過了

$$D(1, 3) = T - \left\{ \sum_{a=1}^3 [C(1, a) + R(1, a) - R(2, a)] - \sum_{b=1}^2 C(2, b) \right\} \times \frac{t}{60} \quad (6)$$

分鐘。那麼在這段時間內，可能又有

$$\begin{aligned} C(2, 3) &= \frac{T}{\lambda_3} - \left\{ \sum_{a=1}^3 [C(1, a) + R(1, a) - R(2, a)] - \sum_{b=1}^2 C(2, b) \right\} \times \frac{t}{60} \times \frac{1}{\lambda_3} \\ &= D(1, 3) \times \frac{1}{\lambda_3} \end{aligned} \quad (7)$$

名乘客到達 S_3 站候車。

依上述規律可類推得

$$\begin{aligned} C(i+1, j) &= \frac{T}{\lambda_j} - \left\{ \sum_{a=1}^j [C(i, a) + R(i, a) - R(i+1, a)] - \sum_{b=1}^{j-1} C(i+1, b) \right\} \times \frac{t}{60} \times \frac{1}{\lambda_j} \\ &= D(i, j) \times \frac{1}{\lambda_j} \end{aligned} \quad (8)$$

其中 i 為正整數， $j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ 。

在(8)式中，我們必須再估計出 $R(i, j)$ 的值，才能以遞迴的方式計算出所有 $C(i, j)$ 的值。在觀察公車路線沿線候車站的過程中，發現候車人數愈多的站，相對地，下車人數也會愈多，而下車人數的多寡又與車上乘客人數有最直接的關係。所以要在候車人數較多的車站下車的人數，也會佔車上乘客人數較高的比例，可以用數學式表示為 $R(i, j) = k_j \times P(i, j-1)$ ，其中 k_j 為車上乘客可能在 S_j 站下車人數的比例。

先前有提到 S_j 站到站候車的人數 X_j 符合 $Poisson(\lambda_j)$ 機率分布，但 λ_j 愈大表示乘客到站候車的頻率愈低，所以 X_j 應與 $\frac{1}{\lambda_j}$ 成正比，也就是說在 S_j 站下車的人數亦與 $\frac{1}{\lambda_j}$ 成正比，令 $\lambda = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n}$ ，則可以合理地令

$$k_j = \frac{\frac{1}{\lambda_j}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda \times \lambda_j}$$

$$\text{所以 } R(i, j) = \frac{1}{\lambda \times \lambda_j} \times P(i, j-1) \quad (9)$$

而第 i 班車離開 S_j 站時車上乘客人數

$$\begin{aligned} P(i, j) &= P(i, j-1) + C(i, j) - R(i, j) \\ &= P(i, j-1) + C(i, j) - \frac{1}{\lambda \times \lambda_j} \times P(i, j-1) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\lambda \times \lambda_j}\right) \times P(i, j-1) + C(i, j) \end{aligned} \quad (10)$$

由(9)、(10)二式，我們也可以用遞迴的方式計算出所有的 $R(i, j)$ 。

再回到(8)式，將 $\frac{1}{\lambda_j}$ 移項可得 $D(i, j) = \lambda_j \times C(i+1, j)$ 。當 $D(i, j) \leq 0$ 時，表示第 i 班車和第 $i+1$ 班車集結於 S_j 站。

四、狀況分析

當 $D(i, j) \leq 0$ 時，表示第 i 班車和第 $i+1$ 班車集結於 S_j 站，也就是第 $i+1$ 班車在 S_j 站超越了第 i 班車，因此 $C(i+1, j) = 0$ ，所以 S_{j+1} 站的乘客也只需由第 $i+1$ 班車載運，因此 $C(i, j+1) = 0$ 。同理第 i 班車也會在 S_{j+1} 站超越第 $i+1$ 班車，所以 S_{j+2} 站的乘客只需由第 i 班車載運，因此 $C(i+1, j+2) = 0 \dots$ 。相同的情況一直延續到終站，歸納得

$$C(i, j+1) = C(i, j+3) = C(i, j+5) = \dots = 0$$

$$C(i+1, j) = C(i+1, j+2) = C(i+1, j+4) = \dots = 0$$

同時，因第 i 班車和第 $i+1$ 班車在 S_j 站集結後，到達各候車站的時間也非常接近，所以令 $D(i, j) = D(i, j+1) = D(i, j+2) = \dots = 0$ 。

由上述過程得知，當第 i 班車和第 $i+1$ 班車集結於 S_j 站後，接下來各個候車站的乘客由第 i 班車和第 $i+1$ 班車輪替載運，因此在 S_j 站到終站的這段路程中，兩班車的行駛時間將會縮短，也降低了三班車集結的機率。那麼，第 $i+2$ 班車和第 $i+3$ 班車到站的間隔時間會相對地拉長，如此一來，第 $i+3$ 班車和第 $i+4$ 班車集結的機會也將跟著提高...這樣的模式會一直持續不斷地循環著。

最後，我們還必須考慮到公車所能搭載的人數是有限的，那麼班車在中途客滿時的情況會是如何？假設每班公車最多能載運 F 名乘客，那麼當第 i 班車在 S_j 站靠站時，若候車人數大於 $F - [P(i, j-1) - R(i, j)]$ 時，則

$$\begin{aligned} C(i, j) &= F - [P(i, j-1) - R(i, j)] \\ &= F - P(i, j-1) + R(i, j) \end{aligned} \tag{11}$$

同樣地，中途客滿的情況雖然會縮短班車的行駛時間，卻也降低了客運公司的營運效率，並不是我們所樂意見到的現象。而中途客滿之所以會發生，不外乎為起站載運乘客數較多及 T 值過大導致各站上車人數過多兩種原因。

伍、研究結果

取 $T = 10$ 、 $t = 20$ 、 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 、 $\lambda_4 = \lambda_5 = 3$ 、 $\lambda_6 = \lambda_7 = 4$ 、 $\lambda_8 = \lambda_9 = 5$ 、 $\lambda_{10} = 6$ ，代入(8)、(9)、(10)式，在 10 個候車站及 6 班車的條件下求出 $C(i, j)$ 、 $R(i, j)$ 及 $P(i, j)$ 的值，如附表。其中 $C(i, 0)$ 及 $C(1, j)$ ， $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ， $j = 1, 2, \dots, 10$ 。

正如我們所預期的，第 1、2 班車集結，第 3、4 班車集結，第 5、6 班車集結(表中灰色部分)，客運公司可藉由調整發車間隔時間來改善這樣的狀況。

陸、討論

對於客運公司而言，最理想的狀況為：相鄰兩班公車到達各候車站的間隔時間固定與發車間隔時間 T 相同，如此一來，只要控制發車時間即可掌握乘客的候車時間。但由(2)、(4)、(6)及(8)式可看出，在發車時間固定的情況下，我們不可能將相鄰兩班公車到達各候車站的間隔時間控制為定值。因此以這次研究的預設條件，為了改善公車集結的情況，只能拉長發車的間隔時間，但是這又會造成前面幾個候車站的乘客需要花更多時間來等車，並沒有真正解決問題。

這次研究的預設條件，是最單純的單一公車路線為主軸，但我們在實際觀察公車運行的分佈情形時，卻發現同一候車站會有兩條路線公車停靠的現象。另外，在公車行駛的過程中，仍有太多不確定的因素將影響公車是否集結？諸如交通狀況、紅綠燈、司機的駕駛習慣、離峰或尖峰時間...等等，考量這些因素才能符合實際應用的條件。

我們希望藉這次研究為基礎，來吸引更多有興趣的人一起深入探討這個有趣的主題，並幫助更多人解決等公車的問題。

柒、結論

一、客運公司只要適當地拉長第 1 和 2、第 3 和 4、第 5 和 6...等班車間的發車時間；並適當地縮短第 2 和 3、第 4 和 5、第 6 和 7...等班車的發車時間，雖不能將相鄰兩班車到站的間隔時間固定，但可利用程式計算的方式，將間隔時間控制在一定的範圍內，同時也可避免公車中途客滿的現象。

二、在(8)式的模式中，我們較無法掌握第 1 班車到達各站的時間，因第 1 班車發車時的載客數與在各候車站載運的乘客數為隨機變數，因此較難預估。假設透過調查得知第 1 班車到達 S_j 站的時刻為 $A(j)$ (例如 $A(1)$ 為早上 6 點 15 分)， $j = 1, 2, 3, \dots, n$ 。當客運公司發車的間隔時間固定為 T 時，則想在 S_j 站搭乘第 i 班車的乘客應在

$$A(j) + \sum_{a=2}^i D(a-1, j) - k$$

時到達候車站(換算為時刻)，在短時間內等到公車的機率較大，其中 k 為預留的保險時間。

捌、參考資料

Rob Eastaway & Jeremy Wyndham 著，蔡承志譯，Why Do Buses Come in Threes? (為什麼公車一次來三班?：81 個生活中隱藏的數學謎題)，初版，台北市三言社出版，家庭傳媒發行，2004(民國 93 年)。

附表：計算結果

C(1,0)	12			P(1,0)	12			備註
C(1,1)	11	R(1,1)	2	P(1,1)	21	D(1,1)	6.7	
C(1,2)	5	R(1,2)	3	P(1,2)	23	D(1,2)	5.8	
C(1,3)	10	R(1,3)	4	P(1,3)	29	D(1,3)	2.8	
C(1,4)	11	R(1,4)	3	P(1,4)	37	D(1,4)	0	1、2 班車集結
C(1,5)	0	R(1,5)	4	P(1,5)	33	D(1,5)	0	
C(1,6)	3	R(1,6)	3	P(1,6)	33	D(1,6)	0	
C(1,7)	0	R(1,7)	3	P(1,7)	30	D(1,7)	0	
C(1,8)	13	R(1,8)	2	P(1,8)	41	D(1,8)	0	
C(1,9)	0	R(1,9)	3	P(1,9)	38	D(1,9)	0	
C(1,10)	5	R(1,10)	2	P(1,10)	41	D(1,10)	0	
C(2,0)	15			P(2,0)	15			
C(2,1)	3	R(2,1)	2	P(2,1)	16	D(2,1)	9.7	
C(2,2)	2	R(2,2)	2	P(2,2)	16	D(2,2)	10.9	
C(2,3)	1	R(2,3)	2	P(2,3)	15	D(2,3)	12.7	
C(2,4)	0	R(2,4)	2	P(2,4)	13	D(2,4)	14.8	1、2 班車集結
C(2,5)	5	R(2,5)	1	P(2,5)	17	D(2,5)	15.1	
C(2,6)	0	R(2,6)	1	P(2,6)	16	D(2,6)	16.9	
C(2,7)	6	R(2,7)	1	P(2,7)	21	D(2,7)	16.9	
C(2,8)	0	R(2,8)	1	P(2,8)	20	D(2,8)	18.4	
C(2,9)	2	R(2,9)	1	P(2,9)	21	D(2,9)	19	
C(2,10)	0	R(2,10)	1	P(2,10)	20	D(2,10)	19.3	
C(3,0)	26			P(3,0)	26			
C(3,1)	4	R(3,1)	4	P(3,1)	26	D(3,1)	8.2	
C(3,2)	5	R(3,2)	4	P(3,2)	27	D(3,2)	7.3	
C(3,3)	6	R(3,3)	4	P(3,3)	29	D(3,3)	5.8	
C(3,4)	4	R(3,4)	3	P(3,4)	30	D(3,4)	4.9	
C(3,5)	5	R(3,5)	3	P(3,5)	32	D(3,5)	3.4	
C(3,6)	4	R(3,6)	2	P(3,6)	34	D(3,6)	2.2	
C(3,7)	4	R(3,7)	3	P(3,7)	35	D(3,7)	0.4	
C(3,8)	3	R(3,8)	2	P(3,8)	36	D(3,8)	0	3、4 班車集結
C(3,9)	0	R(3,9)	2	P(3,9)	34	D(3,9)	0	
C(3,10)	0	R(3,10)	2	P(3,10)	32	D(3,10)	0	

C(4,0)	13			P(4,0)	13			
C(4,1)	4	R(4,1)	2	P(4,1)	15	D(4,1)	9.1	
C(4,2)	3	R(4,2)	2	P(4,2)	16	D(4,2)	10	
C(4,3)	2	R(4,3)	2	P(4,3)	16	D(4,3)	11.5	
C(4,4)	1	R(4,4)	2	P(4,4)	15	D(4,4)	13	
C(4,5)	1	R(4,5)	2	P(4,5)	14	D(4,5)	14.2	
C(4,6)	0	R(4,6)	1	P(4,6)	13	D(4,6)	15.7	
C(4,7)	0	R(4,7)	1	P(4,7)	12	D(4,7)	16.9	
C(4,8)	0	R(4,8)	1	P(4,8)	11	D(4,8)	18.4	3、4 班車集結
C(4,9)	3	R(4,9)	1	P(4,9)	13	D(4,9)	18.7	
C(4,10)	0	R(4,10)	1	P(4,10)	12	D(4,10)	19.9	
C(5,0)	22			P(5,0)	22			
C(5,1)	4	R(5,1)	3	P(5,1)	23	D(5,1)	8.5	
C(5,2)	5	R(5,2)	4	P(5,2)	24	D(5,2)	7.6	
C(5,3)	5	R(5,3)	4	P(5,3)	25	D(5,3)	6.4	
C(5,4)	4	R(5,4)	3	P(5,4)	26	D(5,4)	5.8	
C(5,5)	4	R(5,5)	3	P(5,5)	27	D(5,5)	4.3	
C(5,6)	3	R(5,6)	2	P(5,6)	28	D(5,6)	3.4	
C(5,7)	4	R(5,7)	2	P(5,7)	30	D(5,7)	1.9	
C(5,8)	3	R(5,8)	2	P(5,8)	31	D(5,8)	0.7	
C(5,9)	3	R(5,9)	2	P(5,9)	32	D(5,9)	0	5、6 班車集結
C(5,10)	0	R(5,10)	2	P(5,10)	30	D(5,10)	0	
C(6,0)	11			P(6,0)	11	----	----	
C(6,1)	4	R(6,1)	2	P(6,1)	13	----	----	
C(6,2)	3	R(6,2)	2	P(6,2)	14	----	----	
C(6,3)	3	R(6,3)	2	P(6,3)	15	----	----	
C(6,4)	1	R(6,4)	2	P(6,4)	14	----	----	
C(6,5)	1	R(6,5)	1	P(6,5)	14	----	----	
C(6,6)	0	R(6,6)	1	P(6,6)	13	----	----	
C(6,7)	0	R(6,7)	1	P(6,7)	12	----	----	
C(6,8)	0	R(6,8)	1	P(6,8)	11	----	----	
C(6,9)	0	R(6,9)	1	P(6,9)	10	----	----	5、6 班車集結
C(6,10)	3	R(6,10)	1	P(6,10)	12	----	----	

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國中組 數學科

030415

等不到車？載不到人？

臺中市立崇倫國民中學

評語：

能由日常生活中發掘問題，構思不錯，唯研究方法不甚恰當殊為可惜。