

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030414

平面與立體鑲嵌之研究

臺南市立忠孝國民中學

作者姓名：

國二 吳哲仰 國二 蔡適鴻 國二 賴聖安

指導老師：

李俊億

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學組

組別：國中組

作品名稱：平面與立體鑲嵌之研究

關鍵詞：平面鑲嵌、立體鑲嵌

編號：

壹、摘要

一、平面鑲嵌的定義：

(一)每個頂點都是由同樣的正多邊形的頂點聚合而成的。

(二)各個多邊形均以邊相鄰，且不重疊。

(三)所拼成的圖形，沒有空隙且可以無限的延伸。

二、我們發現要形成平面鑲嵌，在於每個頂點周圍的多邊形，是否可以緊密的拼合，即內角和是否等於 360° 。

三、由於內角和等於 360° ，可推得：

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1, \quad n_1, n_2, \dots, n_k \text{ 表多邊形的邊數。}$$

四、討論上述方程式的值，進而討論 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 之可能的數值。

五、將平面鑲嵌的定義推廣，可得立體鑲嵌的定義：

(一)每個頂點都是由同樣的多面體的頂點聚合而成的。

(二)各個多面體均以面相鄰，且不重疊。

(三)所拼成的圖形，沒有空隙且可以無限的延伸。

六、同理，要形成立體鑲嵌，則圍繞一頂點的多面體的立體角，要能緊密的拼合。

七、多面體的立體角 ζ ，定義為該角在單位球上佔的面積，即為：

$$\zeta = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} - \pi$$

八、因此圍繞一頂點的多面體的立體角 ζ ，要等於 4π 。

九、最後，我們用電腦程式求解立體鑲嵌。

貳、研究動機

X 同學有一天突發奇想提議要做平面磁磚排列的研究，Y 同學就說：「啊哈！這算什麼，這幾百年前就有人研究過了啊！要嘛就做立體的！」。不過，我們後來還是研究平面鑲嵌，我們的將以前的方法改良，使得不須畫出圖形觀察，便能判斷結果是否正確。後來又在「阿草的葫蘆」[1]一書中學到了一個關鍵「球面餘弦律」，我們可用它來求得多面體的立體角，因此將平面鑲嵌推廣，進而研究立體鑲嵌。

參、研究目的

- 一、研究平面圖形的鑲嵌性質。
- 二、找出所有平面鑲嵌的解。
- 三、再將平面鑲嵌推廣來研究立體的鑲嵌。
- 四、找出所有立體鑲嵌的解。

肆、研究設備及器材

電腦軟體(Poly Pro, cwTeX 排版系統, Visual C++, CorelDraw, Adobe PhotoShop), POLYDRON 拼片。

伍、研究過程與方法

- 一、研究平面鑲嵌的幾何性質。
- 二、將所推得之性質導入代數式中，並求解。
- 三、將問題推廣，研究立體鑲嵌。
- 四、以電腦程式求解立體鑲嵌。

陸、研究結果

平面鑲嵌

正多邊形如果像瓷磚一樣緊密的鋪排在一起，稱之為鑲嵌。我們以圍繞一頂點的 k 個正多邊形，其邊數各為 $n_i (i=1 \sim k)$ 來定義鑲嵌：

$$(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k).$$

如果要形成鑲嵌，則需符合下列條件：

條件 1.

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1.$$

證明. 圍繞一頂點的多邊形的內角和要等於 360° ，因此：

$$\sum_{i=1}^k \frac{180^\circ(n_i - 2)}{n_i} = 360^\circ,$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i - 2}{2n_i} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1.$$

條件 2. 每個與奇數多邊形相鄰的多邊形，邊數必相等。

證明. 由於每一頂點周圍有相同的多邊形，因此最多只有兩種多邊形與該多邊形相鄰，設為 $n_A \neq n_B$ ，且 n_i 是奇數，因此圍繞的順序為： $n_A, n_B, n_A, n_B, \dots, n_A$ 頭尾相等，即該頂點周圍的多邊形與其它頂點不同，是為矛盾，故 $n_A = n_B$ 。

條件 3. 設任意兩多邊形其邊數各為 n_A, n_B , 若 $\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} = \frac{M}{N}$ (M, N 屬於正整數) , 則

$$(M \cdot n_A - N)(M \cdot n_B - N) = N^2 .$$

證明.

$$\begin{aligned}\frac{n_A + n_B}{n_A \cdot n_B} &= \frac{M}{N}, \\ N(n_A + n_B) &= M \cdot n_A \cdot n_B, \\ M \cdot n_A \cdot n_B - N \cdot n_A - N \cdot n_B &= 0, \\ M^2 \cdot n_A \cdot n_B - M \cdot N \cdot n_A - M \cdot N \cdot n_B &= 0, \\ (M \cdot n_A - N)(M \cdot n_B - N) - N^2 &= 0, \\ (M \cdot n_A - N)(M \cdot n_B - N) &= N^2.\end{aligned}$$

我們將不同的 k 值分別進行討論，而且爲了避免找到重覆的解，限定 $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq K \leq n_k$ 。

一、 設 $k = 3$,

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}, \quad n_1 \leq n_2 \leq n_3.$$

(一) 設 n_1 爲奇數，則：

- $n_2 = n_3$
- n_2, n_3 爲偶數(若 n_2 爲奇數，則 $n_1 = n_3 \Rightarrow n_1 = n_2 = n_3$ 解得 $n_1 = n_2 = n_3 = 6$ ，是爲矛盾，所以 n_2, n_3 爲偶數。)

$$\begin{aligned}n_2 = n_3 &\Rightarrow \frac{1}{n_2} = \frac{1}{n_3}, \\ \frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_2} &= \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{n_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n_1} = \frac{n_1 - 2}{2n_1} \Rightarrow \frac{1}{n_2} = \frac{n_1 - 2}{4n_1} \Rightarrow n_2 = \frac{4n_1}{n_1 - 2}\end{aligned}$$

令： $u = n_1 - 2$ ，代入

$$n_2 = \frac{4u + 8}{u} = 4 + \frac{8}{u},$$

因 n_2 為整數，所以 u 需整除 8，亦即 u 為 8 的因數。

$$\begin{aligned} u &= 1, 2, 4, 8, \\ n_1 &= 3, 4, 6, 10 \left\{ \begin{array}{l} n_1 \text{ 為奇數,} \\ n_2 = 12, 8, 6, 5 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} n_2 \text{ 為偶數.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

解得：

$$(3, 12, 12)$$

(二) 設 n_1 為偶數，則：

n_2, n_3 皆為偶數(若 n_2 為奇數，則 $n_1 = n_3$ 且 $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \Rightarrow n_1 = n_2 = n_3$ 解得 $n_1 = n_2 = n_3 = 6$ ，是為矛盾，因而 n_2 為偶數，同理 n_3 亦為偶數。)

1. 設 $n_1 = 4$

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

根據條件 3：

$$\begin{aligned} (n_2 - 4)(n_3 - 4) &= 16, \quad n_2 - 4, n_3 - 4 \text{ 為 } 16 \text{ 的因數.} \\ n_2 - 4 &= 1, 2, 4, 8, 16 \quad n_2 = 5, 6, 8, 12, 20 \left\{ \begin{array}{l} n_2, n_3 \text{ 為偶數,} \\ n_3 - 4 = 16, 8, 4, 2, 1 \quad n_3 = 20, 12, 8, 6, 5 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} n_1 \leq n_2 \leq n_3. \end{array} \right. \end{aligned}$$

解得：

$$(4, 6, 12), (4, 8, 8).$$

2. 設 $n_1 = 6$,

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} (n_2 - 3)(n_3 - 3) &= 9, \quad n_2 - 3, n_3 - 3 \text{ 為 } 9 \text{ 的因數.} \\ n_2 - 3 &= 1, 3, 9 \quad n_2 = 4, 6, 12 \left\{ \begin{array}{l} n_2, n_3 \text{ 為偶數,} \\ n_3 - 3 = 9, 3, 1 \quad n_3 = 12, 6, 4 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} n_1 \leq n_2 \leq n_3. \end{array} \right. \end{aligned}$$

解得：

$$(6,6,6)$$

3. 設 $n_1 \geq 8$,

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3 \Rightarrow n_2 \geq 8, n_3 \geq 8 \Rightarrow \frac{1}{n_2} \leq \frac{1}{8}, \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{4} \text{ 與 } \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} \geq \frac{3}{8} \text{ 矛盾，無解。}$$

二、 設 $k=4$,

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1, \quad n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4.$$

$$n_1 < 5 \text{ (設 } n_1 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{n_1} \leq \frac{1}{5} \text{ 且 } n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \Rightarrow \frac{1}{5} \geq \frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{n_4} \Rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \leq \frac{4}{5} < 1, \text{ 無解.)}$$

(一) 設 $n_1 = 3$ ，則：

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

• $n_2 = n_3$ 或 $n_3 = n_4$

• $n_2 < n_4$ (若 $n_2 = n_4$ 且因 $n_2 \leq n_3 \leq n_4 \Rightarrow n_2 = n_3 = n_4 = \frac{2}{3}$ 解得 $\frac{2}{9}$ ，矛盾。

所以 $n_2 \neq n_4 \Rightarrow n_2 < n_4$.)

• n_2, n_3 為 3 或偶數 (若 n_2, n_3 為 $\neq 3$ 的奇數，則

$n_1 = n_4$ 且 $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \Rightarrow n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4$, 矛盾.)

1. 設 $n_2 = 3$,

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$(n_3-3)(n_4-3)=9$$

$$\left. \begin{array}{l} n_3-3=1,3,9 \quad n_3=4,6,12 \\ n_4-3=9,3,1 \quad n_4=12,6,4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_3=3 \text{ 或 } n_3=n_4, \\ 3 \leq n_3 \leq n_4. \end{array}$$

解得：

$$(3,3,6,6).$$

2. 設 $n_2=4$,

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12},$$

$$(5n_3-12)(5n_4-12)=144,$$

$$5n_3-12=1,2,3,4,6,8,12,18,24,36,48,72,144$$

$$5n_4-12=144,72,48,36,24,18,12,8,6,4,3,2,1$$

$$\left. \begin{array}{l} n_3=3,4,6,12 \\ n_4=12,6,4,3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_3=3 \text{ 或 } n_3=n_4, \\ 3 \leq n_3 \leq n_4. \end{array}$$

解得：

$$(3,4,4,6).$$

3. 設 $n_2 \geq 5$,

$$\frac{1}{5} \geq \frac{1}{n_2} \text{ 且 } 5 \leq n_3 \leq n_4,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \geq \frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{n_4},$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} \leq \frac{3}{5} < \frac{2}{3}, \text{ 無解.}$$

(二) 設 $n_1=4$,

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{3}{4}.$$

1. 設 $n_2=4$,

$$\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (n_3-2)(n_4-2) &= 4 \\ \left. \begin{array}{l} n_3-2=1,2,4 \quad n_3=3,4,6 \\ n_4-2=4,2,1 \quad n_4=6,4,3 \end{array} \right\} 3 \leq n_3 \leq n_4. \end{aligned}$$

解得：

$$(4,4,4,4).$$

2. 設 $n_2 \geq 5$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} &\geq \frac{1}{n_2} \text{ 且 } 5 \leq n_3 \leq n_4, \\ \Rightarrow \frac{1}{5} &\geq \frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{n_4}, \\ \Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} &\leq \frac{3}{5} < \frac{3}{4}, \text{ 無解.} \end{aligned}$$

三、 設 $k=5$,

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}, \quad n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5.$$

(一) 設 $n_1=3$, 則 $n_2=n_3$,

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{7}{6}, \quad n_2=n_3.$$

1. 設 $n_2=n_3=3$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} &= \frac{7}{6} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{2} \\ (n_4-2)(n_5-2) &= 4 \\ \left. \begin{array}{l} n_4-2=1,2,4 \quad n_5=3,4,6 \\ n_5-2=4,2,1 \quad n_4=6,4,3 \end{array} \right\} 3 \leq n_4 \leq n_5. \end{aligned}$$

解得：

$$(3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4).$$

(二)設 $n_1 \geq 4$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{n_1} \text{ 且 } 4 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5, \\ \Rightarrow \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{n_4} \geq \frac{1}{n_5}, \\ \Rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} &\leq \frac{5}{4} < \frac{3}{2}, \text{ 無解.} \end{aligned}$$

四、 設 $k = 6$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} &= 2, \quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6, \\ 3 &\leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5 \leq n_6, \\ \frac{1}{3} &\geq \frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{n_3} \geq \frac{1}{n_4} \geq \frac{1}{n_5} \geq \frac{1}{n_6}, \\ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} &\leq 2 = 2. \end{aligned}$$

解得：

$$(3, 3, 3, 3, 3, 3).$$

由此解得所有的平面鑲嵌，共有十組解：

$$\begin{aligned} k = 3: & (3, 12, 12), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (6, 6, 6), \\ k = 4: & (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6), (4, 4, 4, 4), \\ k = 5: & (3, 3, 3, 3, 6), (3, 3, 3, 4, 4), \\ k = 6: & (3, 3, 3, 3, 3, 3). \end{aligned}$$

我們只是解出何種組合可以圍繞一頂點，但要拼成鑲嵌，尚須決定其順序，根據條件 2，相鄰於奇數邊多邊形的兩個多邊形要相等，將其重新排列，即得十組平面鑲

嵌¹²:

$$\begin{aligned} k=3: & (3,12,12),(4,6,12),(4,8,8),(6,6,6), \\ k=4: & (3,6,3,6),(3,4,6,4),(4,4,4,4), \\ k=5: & (3,3,3,3,6),(3,4,3,4,3), \\ k=6: & (3,3,3,3,3,3). \end{aligned}$$

二、立體鑲嵌

研究過平面的鑲嵌之後，我們將其推廣，進而研究立體的鑲嵌。

立體鑲嵌所指的立體是指柏拉圖立體、阿基米德立體、多角柱這三種立體，而這三種立體皆能以半正立體代碼³來表示⁴。

鑲嵌則以圍繞一頂點周圍的半正立體代碼來表示鑲嵌：

$$S_1, S_2, \dots, S_l = (n_{1,1}, n_{1,2}, \dots), (n_{2,1}, n_{2,2}, \dots), \dots, (n_{l,1}, n_{l,2}, \dots).$$

若鑲嵌要成立，則繞一頂點所有多面體之立體角要能緊密的砌合。亦即，設多面體邊長為 1，有一單位球以該頂點為球心，則（單位球的表面積）＝（繞一頂點所有多面體之立體角在單位球上所張的面積）。

因此我們要求得立體角在單位球上所張的面積 ζ ：

公式 1. 令一半立體繞於一點之多邊形內角分別為 α 、 β 、 γ ，則在單位球上所張的面積

$$\begin{aligned} \zeta = & \cos^{-1} \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} + \cos^{-1} \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} \\ & + \cos^{-1} \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} - \pi \end{aligned}$$

¹平面鑲嵌之圖形請見附圖 2。

²此處唯(3,3,3,3,6)是個例外，但觀察其圖形，確實可以拼成鑲嵌

³半正立體代碼表示一頂周圍的多邊形邊數，以表示不同的半立體。

⁴見附圖。

証明. 在單位球面上，令一球面三角 $\triangle ABC$ ，其三邊 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 在球心所對的角分別為 α 、 β 、 γ ，根據球面餘弦律：

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A \\ \cos \beta &= \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos B \\ \cos \gamma &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C\end{aligned}$$

整理後，得：

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta \cos C &= \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta, \\ \cos C &= \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}, \\ C &= \cos^{-1} \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.\end{aligned}$$

同理：

$$\begin{aligned}A &= \cos^{-1} \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}, \\ B &= \cos^{-1} \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}.\end{aligned}$$

立體角在單位球上所張的面積等於球面三角 $\triangle ABC$ 的面積：

$$\begin{aligned}\zeta &= \Delta ABC \\ &= (A + B + C - \pi)r^2, \text{半徑 } r = 1 \\ &= (A + B + C - \pi), \text{代入 } A、B、C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta &= \cos^{-1} \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} + \cos^{-1} \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} \\ &\quad + \cos^{-1} \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} - \pi\end{aligned}$$

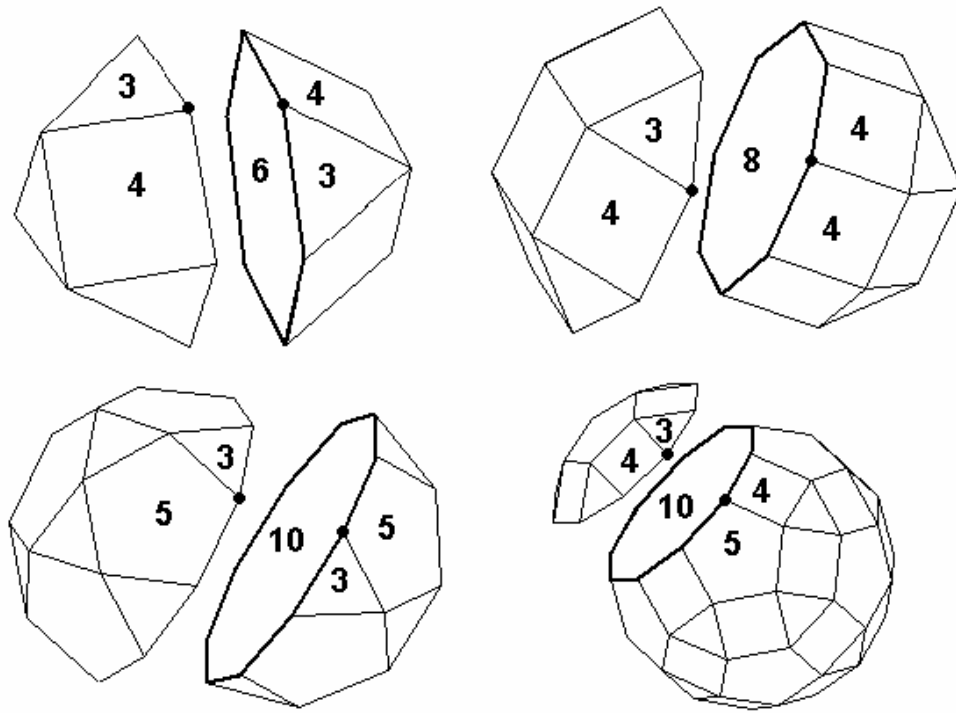


圖 1:立體剖面圖

$k=3$ 時，可直接計算頂點周圍多邊形的內角，代入公式即得。但 $k=4$ 時，並無公式可計算。不過我們發現，若將該立體切開⁵，發現切面皆為正多邊形。因此，可分別計算切開後的兩個立體角後再相加，即可得實際的立體⁶⁷。

不過，我們發現求得的 ζ 值多為小數，不易以數學方法求解，不過我們尚能以電腦程式求解，對 VC++ 有研究者可參閱以程式求解的部分。

⁵見:圖 1。

⁶見附錄:表 1。

⁷(3,3,3,3,3)是以其它方法求得，其過程較複雜，此處僅列出其解，不討論。

以電腦程式求解

我們的程式以 Visual C++ 來撰寫，程式的詳細過程在手稿中有詳述，以下為程式大至的運作流程：

一、立體角 ζ 原是以單位球面表面積 4π 做計算，

現為方便計算，將球面表面積設為 1，即 ζ 要除以 4π 。

二、 ζ (除以 4π) 的最小值與最大值分別為 0.0438 與 0.3538，因此多面體總數 k 的最小值與最大值分別為 3，22 分別求解 $l=3, 4, \dots, 22$ 。

三、使用遞迴來選取 $S_1, S_2, \dots, S_k$ 之值。

四、判斷 $Sum = \sum_{i=1}^l S_i$ 是否等於 1，但 ζ 有些許的誤差，所以只要 $Sum = 1 \pm 0.001$ ，

即認定兩者相等。

五、比對多面體上的多屬邊形是否可以兩兩相合，且因多面體皆為凸多面體，因此兩多面體間最多只有一面相連。

六、我們尚須剔除全由角柱構成的鑲嵌，否則就跟把平面鑲嵌的多邊形改得多角柱一樣了。

七、以程式解出可圍繞一頂點的解，再以 POLYDRON 拼片組合，確定是否可拼成鑲嵌。

以下為程式碼：

```
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
#include <math.h>
const PolyMinCount = 3;
const PolyMaxCount = 22;
//多面體
int Poly[21][5] =
{{3,3,3,0,0},{3,4,4,0,0},{3,3,3,3,0},{4,4,4,0,0},{5,4,4,0,0},{3,6,6,0,0},
{6,4,4,0,0},{8,4,4,0,0},{3,4,3,4,0},{10,4,4,0,0},{3,3,3,3,3},{3,8,8,0,0},
{5,5,5,0,0},{4,6,6,0,0},{3,4,4,4,0},{3,5,3,5,0},{3,10,10,0,0},{4,6,8,0,0},
{5,6,6,0,0},{3,4,3,5,0},{4,6,10,0,0}};

//輸出用文字
char* cPoly[21] =
{"(3,3,3)","(3,4,4)","(3,3,3,3)","(4,4,4)","(5,4,4)","(3,6,6)","(6,4,4)",
"(8,4,4)","(3,4,3,4)","(10,4,4)","(3,3,3,3,3)","(3,8,8)","(5,5,5)","(4,6,6)",
"(3,4,4,4)","(3,5,3,5)","(3,10,10)","(4,6,8)","(5,6,6)","(3,4,3,5)","(4,6,10)"};

//立體角
double Zeta[21] = { 0.043869, 0.083333, 0.108173, 0.125000, 0.150000, 0.152043,
0.166667, 0.187500, 0.195913, 0.200000, 0.2097, 0.222957, 0.235688, 0.250000,
0.277043, 0.292347, 0.308069, 0.312500, 0.338104, 0.353826, 0.375000 };
int k = 0;
int temp[PolyMaxCount];
ofstream fAns;
int Select( int );
bool Check();
int main()
{   fAns.open("Answer.txt");
    for( k = PolyMinCount; k <= PolyMaxCount; k++ ) {
        fAns << k << "." << endl;
        Select( 0 );
    }
    fAns.close();
    return 0;
}
int Select( int ptr )
```



```

{    if( ptr < k ) { //還未選完
        for( int i = ( ptr > 0 ? temp[ptr - 1] : 0 );
            i < 21; i++ ) { //限定下一值大於等於前一值
                temp[ptr] = i; //選定此元素之值
                Select( ptr + 1 ); //指標加一，選定下一值
            }
    }else {
        double Sum = 0.0;
        for( int i = 0; i < k; i++ ) {
            Sum += Zeta[temp[i]]; //加總
        }
        if( Sum - 1.0 < 0.001 && Sum - 1.0 > -0.001 ) {
            Check();
        }
        return 0;
    }
}

bool Check()
{
    int check[PolyMaxCount][5];
    bool flag[PolyMaxCount];
    int pc[PolyMaxCount];
    // 填入資料
    for( int a = 0; a < k; a++ ) {
        flag[a] = true;
        pc[a] = 0;
        for( int b = 0; b < 5; b++ ) {
            check[a][b] = Poly[temp[a]][b];
            if( check[a][b] )
                { pc[a]++; }
        }
    }

    for( int i = 0; i < k; i++ ) {
        int S = 0;
        for( int r = 0; r < k; r++ )      S += flag[r];
        if( !S ) break;
        //不可再重覆接合者 1 可 0 不可
        bool pf[PolyMaxCount];
        for( int ary = 0; ary < k; ary++ )
            { pf[ary] = 1; }
        int Max = 0; //剩餘多邊形最多者
        for( int p = 0; p < k; p++ )
            { pf[p] = flag[p]; }
        for( int h = 0; h < k; h++ ) {

```

```

        if( flag[h] ) {
            if( pc[h] > pc[Max] ) {
                Max = h;    } } }
flag[Max] = false;
pf[Max] = false;
for( int j = 0; j < 5; j++ ) {
    if( check[Max][j] ) {
        //逐一比對
        for( int m = 0; m < k; m++ ) {
            if( pf[m] ) {
                for( int n = 0; n < 5; n++ ) {
                    if( check[m][n] ==
                        check[Max][j] ) {
                        //不可再比對
                        check[Max][j] = 0;  check[m][n] = 0;
                        pc[Max]--;  pc[m]--;
                        if( !pc[m] )
                            flag[m] = false;
                        pf[m] = false;
                        //已比對完，跳出
                        goto OutLoop;
                    }
                }
            }
        }
    }
}
OutLoop::;
}
}
int total = 0;
for( int j = 0; j < k; j++ )    total += pc[j];
if( !total ) {
    for( int j = 0; j < k; j++ ) { //輸出答案
        fAns << cPoly[temp[j]];
    }    fAns << endl;
}
return true;
}

```

以下為程式執行後，再以 POLYDRON 拼片組合，確定可拼成鑲嵌的十組解：

$\{(4,6,6), (4,6,6), (4,6,6), (4,6,6)\}$

$\{(3,3,3), (4,4,4), (3,4,4,4), (3,4,4,4), (3,4,4,4)\}$

$\{(4,4,4), (4,4,4), (3,4,3,4), (3,4,4,4), (3,4,4,4)\}$

$\{(3,3,3,3), (3,8,8), (3,8,8), (3,8,8), (3,8,8)\}$

$\{(3,6,6), (3,6,6), (4,6,6), (4,6,6), (3,4,3,4)\}$

$\{(3,3,3,3), (3,3,3,3), (3,4,3,4), (3,4,3,4), (3,4,3,4), (3,4,3,4)\}$

$\{(3,3,3), (3,3,3), (3,6,6), (3,6,6), (3,6,6), (3,6,6), (3,6,6), (3,6,6)\}$

$\{(3,3,3), (3,3,3), (3,3,3), (3,3,3), (4,4,4), (4,4,4), (4,4,4), (4,4,4), (3,3,3,3), (3,3,3,3), (3,3,3,3)\}$

$\{(3,3,3), (3,3,3), (3,3,3), (3,3,3), (3,3,3,3), (3,3,3,3), (3,3,3,3), (3,4,4), (3,4,4), (3,4,4), (3,4,4), (3,4,4), (3,4,4)\}$

$\{(3,3,3), (3,3,3), (3,3,3), (3,3,3), (3,3,3), (3,3,3), (3,3,3), (3,3,3), (3,3,3,3), (3,3,3,3), (3,3,3,3), (3,3,3,3), (3,3,3,3), (3,3,3,3)\}$

柒、討論

我們處理平面鑲嵌的方式，較過去⁸處理的方法要好，其主要具有下列特點：

- 完整的推導出平面鑲嵌的所有條件，不須繪出圖形來觀察。
- 將原始的代數式表為因式的形式，即可以直接求得因數求解，不須假設所有的未知數數值。
- 不過雖然我們的方法比較好一點，但仍稍嫌冗長，尚在研究更好的解決方法。

而我們將平面鑲嵌推廣處理立體鑲嵌：

⁸見：中華名國第 42 屆中小學科學展覽會-國中數學科-磁磚的秘密。

- 立體鑲嵌與平面鑲嵌之概念大同小異，皆是以所有的角需緊密接合的觀點出發的。
- 我們運用球面三角的性質，求得立體角在球面上所張的三角形的面積與球面的比值，定之為立體角。
- 我們的程式雖尚可運作，但仍嫌緩慢，演算法仍需改良。

捌、結論

要形成平面鑲嵌，在於每個頂點周圍的多邊形，是否可以緊密的拼合，即內角和是否等於 360° 。

立體鑲嵌與平面鑲嵌之概念大同小異，皆是以所有的角需緊密接合的觀點出發的。

我們是以數學方法來解決平面鑲嵌問題的，不會有所遺漏，共有十組解。

但我們用電腦程式來解決立體鑲嵌問題，只是找出解而不是證明。

不過我們藉由找出的十組解，發現把鑲嵌中任一平面延展，在立體鑲嵌中切出的圖形，皆是平面鑲嵌的圖形，因此我們猜測立體鑲嵌皆有此性質，我們應當能藉此性質來證明立體鑲嵌只有十組解，不過因此性質尚未能得到證明，因此我們不加以討論。

玖、參考資料及其它

- 一、曹亮吉:阿草的葫蘆,遠哲科學教育基金會,第 7--8 章,2000 年。
- 二、彭君智:2001 年,3D 立體變變變,數學傳播,25 卷 3 期,第 68--80 頁。
- 三、平斯:1998 年,柏拉圖的地面,數學傳播,22 卷 4 期,第 59--64 頁。
- 四、林靜宜、吳穰蓉、李玟慧:2002 年,磁磚的秘密,中華民國第 42 屆中小學科學展覽會。
- 五、吳聰敏、吳聰慧: cwTeX 排版系統,翰蘆出版公司,2002 年。

表 1：立體之 ζ 值

	α	β	γ	A	B	C	ζ
柏拉圖立體							
(3,3,3)	1.0472	1.0472	1.0472	1.2309	1.2309	1.2309	0.0438
(4,4,4)	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	1.5708	0.1250
(5,5,5)	1.8849	1.8849	1.8849	2.0344	2.0344	2.0344	0.2356
(3,3,3,3)	=	(3,3,4)	+	(3,3,4)	=	0.1081	
(3,3,3,3,3)	=	0.2097					
半立體 k = 3							
(3,4,4)	1.0472	1.5708	1.5708	1.0472	1.5708	1.5708	0.0833
(3,6,6)	1.0472	2.0944	2.0944	1.2309	1.9106	1.9106	0.1520
(3,8,8)	1.0472	2.3561	2.3561	1.5708	2.1862	2.1862	0.2229
(3,10,10)	1.0472	2.5132	2.5132	2.0344	2.4892	2.4892	0.3080
(4,6,6)	1.5708	2.0944	2.0944	1.9106	2.1862	2.1862	0.2500
(4,6,8)	1.5708	2.0944	2.3561	2.1862	2.3561	2.5261	0.3125
(4,6,10)	1.5708	2.0944	2.5132	2.4892	2.5880	2.7767	0.3750
(5,4,4)	1.8849	1.5708	1.5708	1.8849	1.5708	1.5708	0.1500
(5,6,6)	1.8849	2.0944	2.0944	2.4118	2.4892	2.4892	0.3381
(6,4,4)	2.0944	1.5708	1.5708	2.0944	1.5708	1.5708	0.1666
(8,4,4)	2.3561	1.5708	1.5708	2.3561	1.5708	1.5708	0.1875
(10,4,4)	2.5132	1.5708	1.5708	2.5132	1.5708	1.5708	0.2000
半立體 k = 4							
(3,4,3,4)	=	(3,4,6)	+	(3,4,6)	=	0.1959	
(3,4,4,4)	=	(3,4,8)	+	(4,4,8)	=	0.2770	
(3,5,3,5)	=	(3,5,10)	+	(3,5,10)	=	0.2923	
(3,4,5,4)	=	(3,4,10)	+	(4,5,10)	=	0.3538	

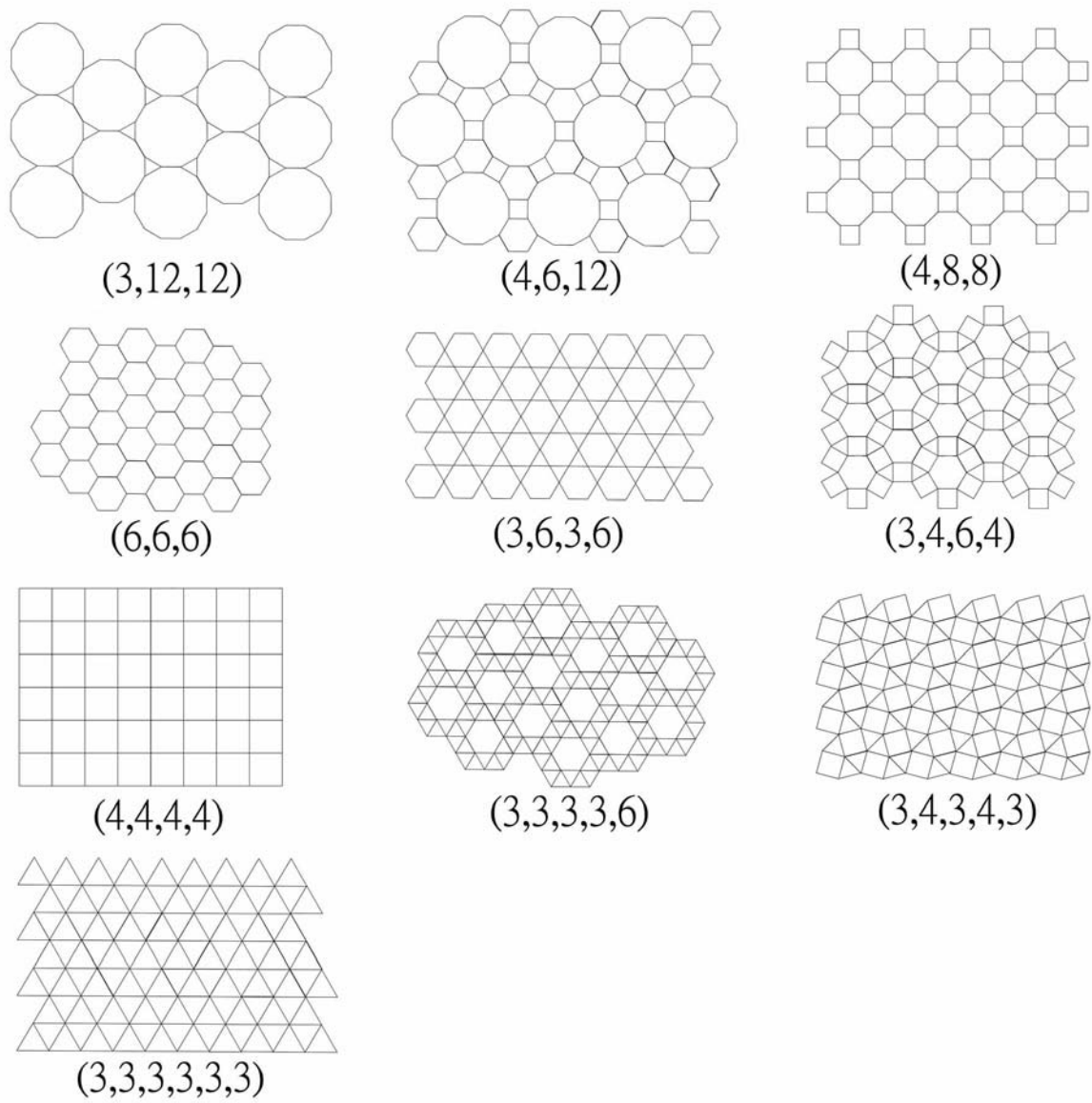


圖 2：平面鑲嵌圖形

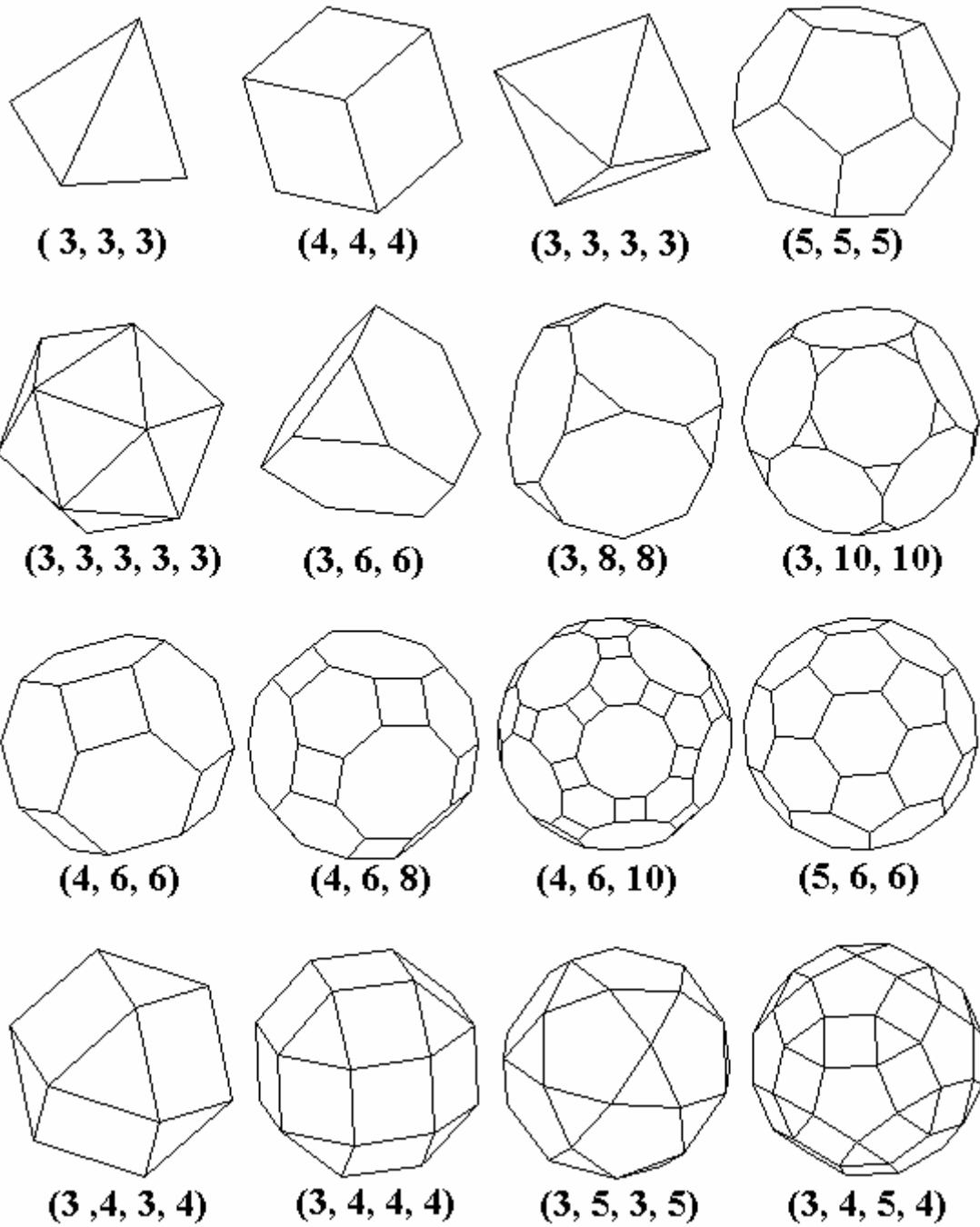


圖 3：半正立體與其代碼

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國中組 數學科

030414

平面與立體鑲嵌之研究

臺南市立忠孝國民中學

評語：

考慮平面是否可用不同大小的正多邊形拼接而成，對此給了完整的解答；對於是否可用大小不同的多邊形拼出多面體也做了討論，惟”平面鑲嵌”似乎不是太困難的問題，而”立體鑲嵌”在之前的科展中也早有人給出了完整的刻畫，建議在資料的搜集上可以再多下點功夫。