

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

佳作

030412

分水的藝術

基隆市立銘傳國民中學

作者姓名：

國二 王琳

指導老師：

李健次 陳國和

中華民國第 四十五 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：分水的藝術

關 鍵 詞：分水遊戲 、最大公因數、 虛擬刻度（最多三個）

編 號：

摘要

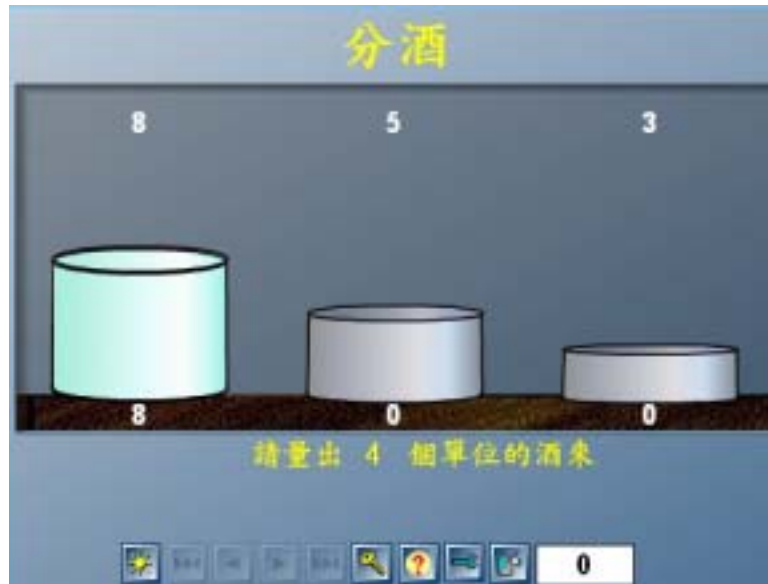
分水遊戲是一個許多同學都聽過、玩過的遊戲，許多科展競賽（註 1）或科學叢書也常能看到相關的命題出現。

它的玩法很簡單，主要是利用二個不同的水桶，在反覆的傾倒後，產生我們要的水量。剛開始，我研究的目的，本來只是想考倒同學，哪知道同學比我厲害，反而是我被考倒了，因此激勵我做更深入的研究。於是在改變許多外加的條件後，對該命題作加深加廣的研究，也獲得了許多嶄新的發現：

1. **在加廣部分：**我改變了桶子的數量及種類，也改變了內容物的種類及判別性，並且求出相對應的解。
2. **在加深部分：**我詳細的探討了水池大小與總水量的關係，以及總水量的不同，造成解的變化情形。
3. **在創新發現部分：**一個是”虛擬刻度”，一個是跳格子解法，而這二個全新的發現，使這類問題變的簡單且有趣，這是讓我感到最自豪的！

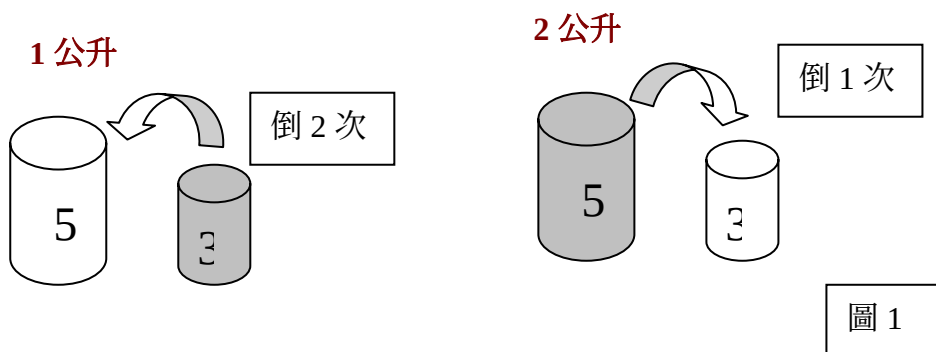
壹、研究動機

之前在做數學專題報告的時候，瀏覽了一些不錯數學網站，有一個更是有 FLASH 的數學動畫遊戲〈如下圖，擷自網站“尤怪之家”（註 2）〉。



其中有一個是“分酒遊戲”，基本的遊戲規則：用 1 個 3 公升、1 個 5 公升、一個 8 公升的杯子，把 8 公升的酒平分成一半〈4 公升〉，只能把酒加滿或倒光，不能用斜對角的倒水方式來平分。在操作很多次後，終於是抓到了訣竅（註 3）。後來也發現，用 2 個升數互質的杯子，就能倒出所有小於 2 個升數相加以下的升數。後來的靈機一動，讓我想到了可以把「油」一起加入，變化內容物、桶子的數量，或是加入其他特殊的條件，分水遊戲倒得出來〈有解〉情況又是如何？

這竟然也有公式可循，而且還是數學課提到過的「二元一次方程式」及「整除」的概念，種種新發現，激起了我的好奇心，促使我對此主題深入研究。



貳、研究目的

- 一、研究在什麼條件下，可以用水桶，倒出指定的水量
- 二、研究在什麼條件下，可以用水桶，倒出指定的水量及油量
- 三、研究在什麼條件下，可以用二個紅茶桶子，倒出指定的水量和油量
- 四、研究在總水量有限時，可以用桶子倒出多少的水量

參、研究設備與器材

筆、紙、白板

肆、研究過程與方法

一、代號解釋

- (一) 水桶〈杯〉指沒有刻度，桶子代號及內容量則分別為：a 公升、b 公升、c 公升…的桶子，且 a、b、c 皆為正整數。
- (二) 水桶〈杯〉內容物—就是水啦！數量用 w 表示。如果加上油，則要求油在水上面，數量用 oil 表示。如果加上汞〈水銀〉，則要求汞在水下面，數量用 Hg 表示，且 w、oil、Hg 皆為正整數。
- (三) 內容物的總合，以 T 來表示。例如： $T = 3 \langle 2T_w, 1T_o \rangle$ 即表示 2 公升水、1 公升油。或 $T = (T_a, T_b)$
 T_w ：表示水的總量，且 T_w 為正整數。
 T_o ：表示油的總量，且 T_o 為正整數。
 T_{Hg} ：表示汞的總量，且 T_{Hg} 為正整數。
 T_a ：表示 a 桶內裝了 T_a 量的內容物
 T_b ：表示 b 桶內裝了 T_b 量的內容物
- (四) 如果油、水是不同顏色的，則視為可分辨；如果油、水是相同顏色的，則視為不可分辨。

(五) 可分辨時的操作：若桶內含有 2 種以上的內容物，可把其中一種內容物完全倒出，而另一種內容物則繼續留在原桶。

圖例：

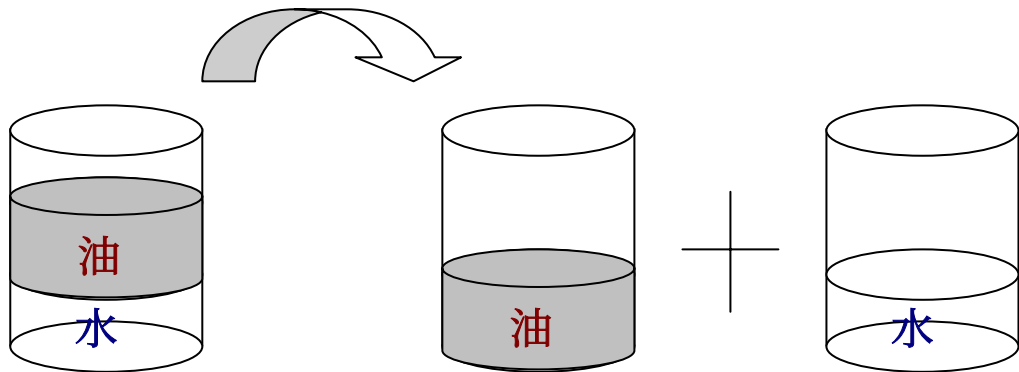


圖 2

二、操作條件

(一) 水桶問題：由水桶的上方，反覆的互相傾倒，可任意加滿水或把水倒光，不計水〈油、汞…〉的來源及數量

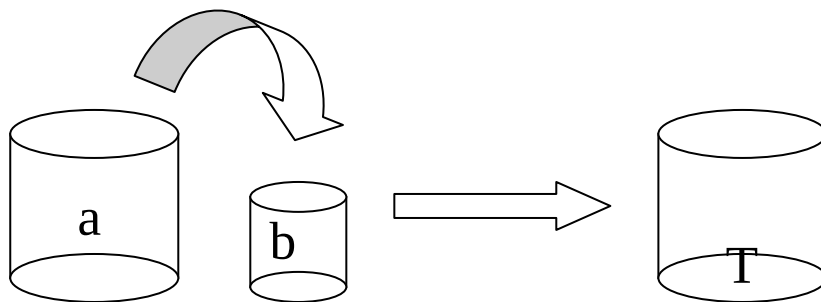


圖 3

(二) 紅茶桶問題：

由於紅茶桶"僅能"由下方取出內容物，且由上方加入內容物，若含有 2 種以上比重不同之內容物，就需考慮操作過程。

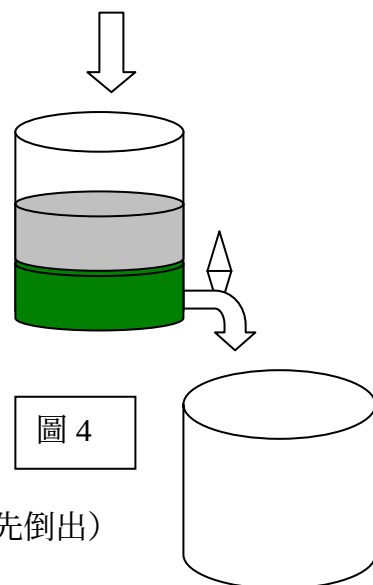


圖 4

(比重大的會先倒出)

伍、研究結果與討論

一、研究一

(一) 題目一：水桶數 2 個，內容物 1 種〈水〉

命題：用 2 個水桶，倒出 T 公升的水

1. 先解簡單命題： $a = 3$, $b = 5$, 倒出 $T = 4$

解法：

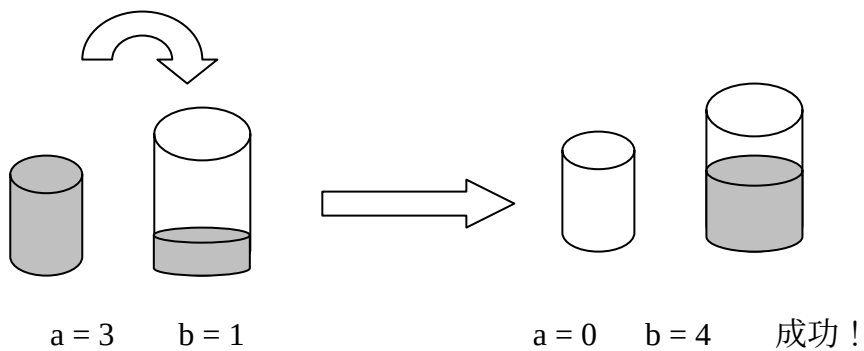
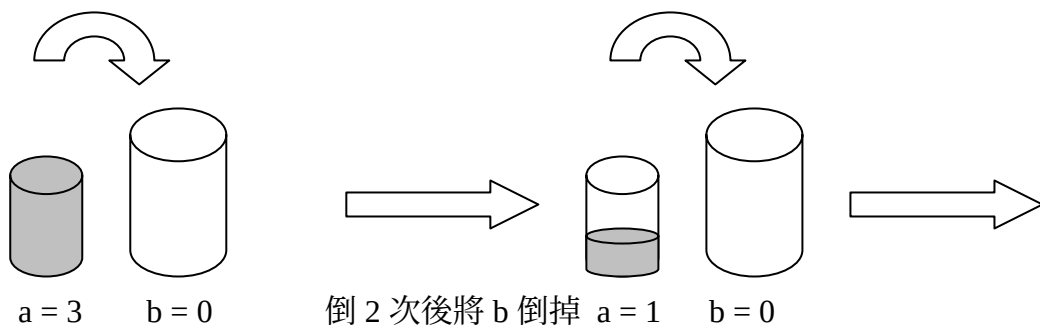


圖 5

2. 正式解題過程：

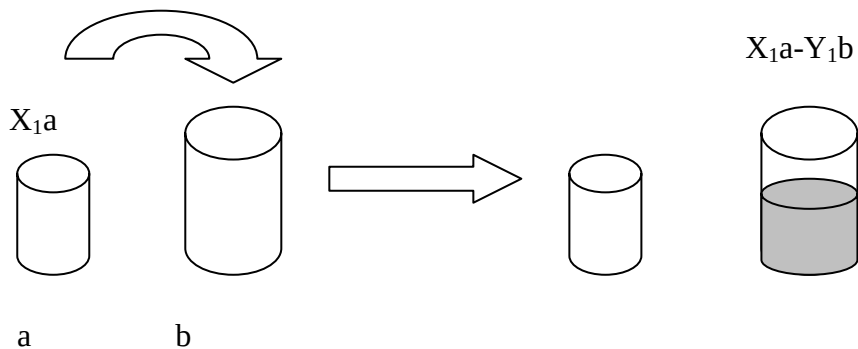


圖 6

將 X_1 倍的 a 倒入 b 桶中，並將 Y_1 倍的 b 倒掉，故僅剩 $X_1a - Y_1b$ 在 b 桶中，如果 $X_1a - Y_1b \neq T$ ，則反覆上述步驟，即 $X_1a + X_2a - Y_1b - Y_2b = X_3a - Y_3b = T$

故推論，若方程式 $aX - bY = T$ 有解，則我們一定可以藉由 2 個水桶間的反覆傾倒，而得到我們所要的 T ；

如果方程式 $aX - bY = T$ 無解，則 2 個水桶，無論如何反覆置換，皆無法得到所要的 T ，
‘除非另有條件’

依照〔註 4〕所列，我們知道， T 存在的條件，是 $(a, b) \mid T$

例如前項命題： $a = 3$ ， $b = 5$ ， $T = 4$

則因為 $(3, 5) = 1$ ， $(3, 5) \mid 4$ 故命題有解

另，若 $a = 2$ ， $b = 4$ ， $T = 3$

則因為 $(a, b) = (2, 4) = 2$ ，且 2 不整除 3，故該命題無解

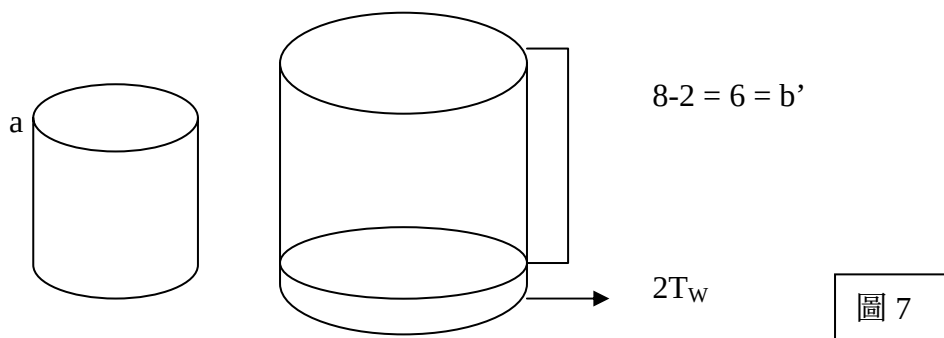
3.**簡單推想：內容量為 2 公升及 4 公升的 2 個桶子，不管如何反覆傾倒，應該都只有 2 的倍數的容量存在，故結果是合乎邏輯的**

(二) 題目二：水桶數 2 個，內容物 2 種〈水、油〉，油、水可分辨

命題：用 2 個水桶，倒出 T 公升的內容物〈 T_O 油、 T_W 水〉

1.先解簡單命題： $a = 3$ ， $b = 8$ ，倒出 $T = 4$ 〈 $2T_O$ 、 $2T_W$ 〉

解法：經過我們長期的研究及反覆失敗後，我們得到了一個系統性的解法，就是先解出水的 T_W 〈因為水比油重，一定會沉在下面〉也就是說，扣除了 $T_W = 2$ 的部分後，就形成了新的 $a = 3$ ， $b' = 6$ 的結構，故反覆使用上述步驟，即可解題。



$\because (3, 8) \mid 2$, 故可形成 $2T_w \rightarrow a = 3, \quad b' = 6 \quad T = T_o = 2$

又 $(3, 6)$ 不整除 2 故此題無解

就在我興高采烈的拿去“拷”問同學時，竟被同學破解了，答案是有解~咦？奇怪？不合我得出的理論嘛！詳細推敲同學的做法後，我才恍然大悟。

他的做法是先在 a 桶中形成 $w = 2$ （水），故 a 桶僅剩 1 格的空間，於是形成了**虛擬刻度**，故能製造出 2 格的油（倒 2 次）。

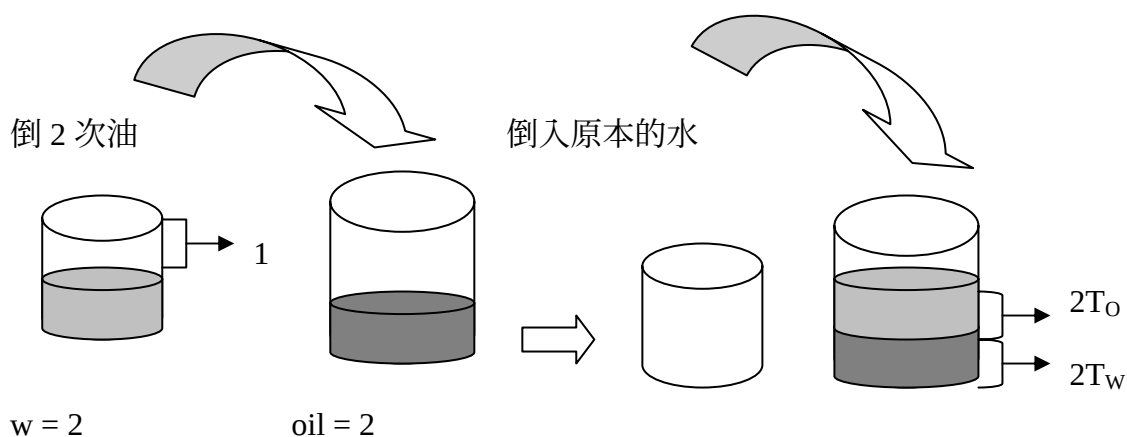


圖 8

（a 桶剩下一格的空間，將油倒入一格空間後，因油水可分辨，故能把一格的油倒到 b 桶中，重複以上動作，再把 a 桶中的水倒回 b 桶，形成 $2T_o + 2T_w$ ）

反推到我的理論，我找到我理論上不嚴謹的地方，就是 T_w 不見得僅可以放在 b 桶，應該亦可放在 a 桶才對。

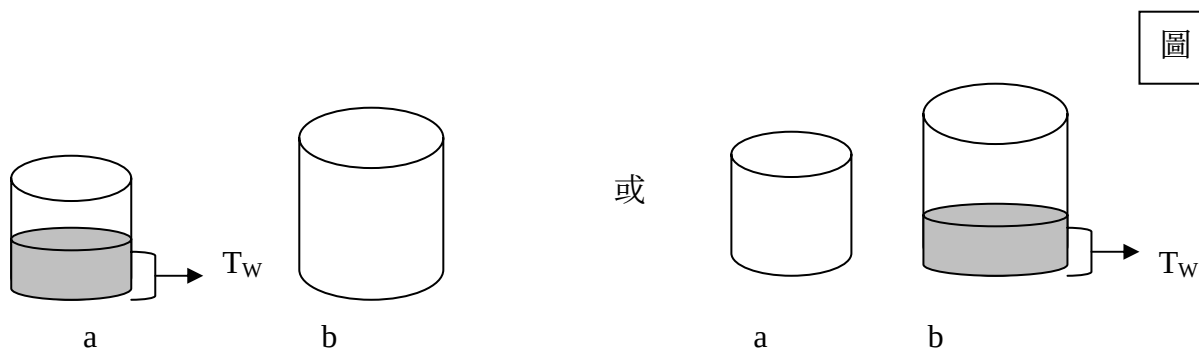


圖 9

2.正式解題

(1)首先 $(a, b) \mid T_w$ 用以形成底層

(2)再來 $(a - T_w, b) \mid T_o$ 或

$(a, b - T_w) \mid T_o$ 用以形成第二層

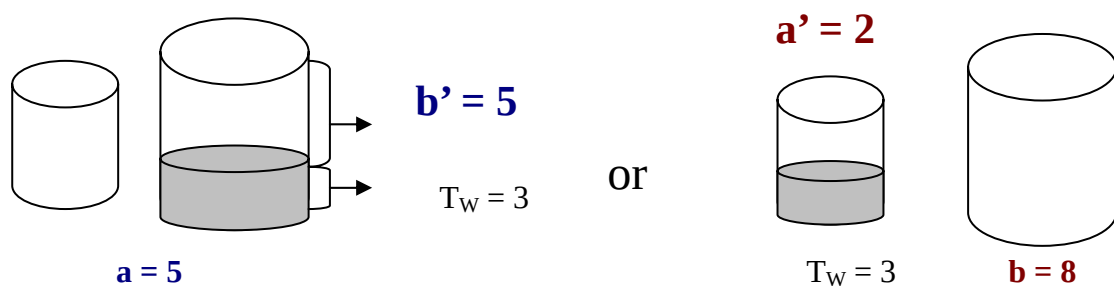
也就是說，符合上述條件者，即會有解；

不符合上述條件者，須「另有條件」才能得解。

舉例來說

$a = 5$, $b = 8$, $T = 4(1T_o, 3T_w)$

圖解：



都不可能產生 $1T_o$

圖 10

公式解法：

雖然 $(5, 8) \mid 3 \cdots$ 成立

but $(5 - 3, 8) = 2$ 不整除 1 且 $(5, 8 - 3) = 5$ 不整除 1

故此命題無解

(三) 題目三：水桶數 2 個，內容物 3 種〈水、油、汞〉3 者皆可分辨

1.解答：只須先將水、油視為同一類，再反覆使用上述結果即可，甚至內容物超過 3 種以上，也可反覆利用上述方法疊加，在此不加敘述。

(1)首先 $(a, b) \mid T_{Hg}$ 用以形成底層

(2)再來 $(a - T_{Hg}, b) \mid T_w$ 或 $(a, b - T_{Hg}) \mid T_w$ 用以形成第二層

(3)再來 $(a - T_{Hg} - T_w, b) \mid T_o$ 或 $(a - T_{Hg}, b - T_w) \mid T_o$

或 $(a - T_w, b - T_{Hg}) \mid T_o$ 或 $(a, b - T_{Hg} - T_w) \mid T_o$ 用以形成第三層

(四) 題目四：水桶 2 個，內容物 2 種〈水、油〉，二者不可分辨。

1.先解簡單命題： $a = 3$ ， $b = 5$ ， $T = 4$ ($2T_O$ 、 $2T_W$)

由於二者無法分辨，不能再形成虛擬刻度，故僅能使用“題目一”的解法。但又須先形成 $2T_W$ ，也就是說當你要製造 $2T_O$ 時，其 $2T_W$ 也將受到破壞，二者不能同時存在，除非有特殊條件存在，比如說 “另一種的虛擬刻度”。

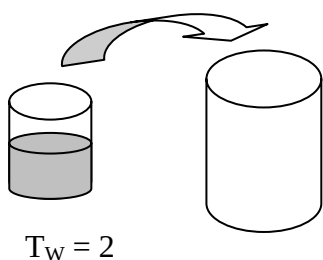


圖 11

以此命題為例，其虛擬刻度僅有 a 、 b 二種，就是桶子本身。

也就是說：A.將 b 裝滿後，用 a 去削

B.或用 a 裝滿後，用 b 去削。

故須符合條件：

(1) $(a, b) \mid T_W \sim$ 用以形成底層

(2) $T = T_W + T_O = a \text{ or } b$ 或

$b - ka = T = T_W + T_O$ 即 $a \mid (b - T)$ (其中： $b > a$)

(上式中的： b 、 k 、 a 、 T 、 T_W 、 T_O 皆為正整數。)

以此題為例：

$(3, 5) \mid 2$ (可行) but $4 \neq 3 \neq 5$

且 3 不整除 $(5 - 4)$

故此題無解

(五) 題目五：若將題目四的水桶數改為 3 個(a, b, c)，那麼我們只須先用(a, b)做出 T_O ，

再用(a, c)做出 T_W ，再混合即可，其所用方法如題目一所言，在此不再贅述。

符合條件： $(a, b) \mid T_O$ 且 $(a, c) \mid T_W$

或： $(a, b) \mid T_W$ 且 $(a, c) \mid T_O$

(六) 題目六：紅茶桶數 2 個，內容物 2 種〈水、油〉，油水可分辨。

命題：用 2 個紅茶桶，倒出 T 公升的內容物〈 T_O 油、 T_W 水〉

1.先解簡單命題 $a = 5$, $b = 7$, $T = 2 (1T_O, 1T_W)$

自從在學校路口的某自助餐店悟到這個題目後，剛開始讓我很興奮，可是後來卻讓我一個頭兩個大，因為紅茶桶內容物的存取方式是由"上方置入，由下方拿取，這是有方向性的"，故困難度大增。

(表一)

a 桶	b 桶
	$1T_W$
	$1T_W + 6T_O$
$1T_W + 4T_O$	$2T_O$
$4T_O$	$1T_W + 2T_O$
倒滿 $5T_O$	$1T_W + 2T_O$
$1T_O$	$1T_W + 6T_O$
$1T_O + 1T_W$	$6T_O$

以此為例：首先用題目一的解法，做出 $1T_W$ 置入 a 桶中，然後再.....

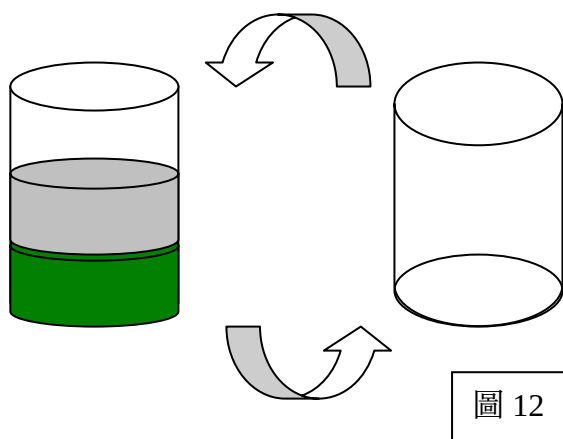


圖 12

過程較複雜，無法用圖示
解析，請看現場示範！

2.正式解題

改成一般性解法，首先油水是可分離的，但無法形成「虛擬刻度」，因為每次取用時，只有 2 種情形：

- (1)只有水會被取出。
- (2)水和油被當成一體一般的被取出。

故解法必須分二部份探討：首先用 $(a, b) \mid T_w$ 用以形成底層，再來：

(1)當只有水會被取出時，用 $(a, b) \mid T_o$ 得到所要的 T_o ，再加上可以被單獨取出的 T_w ，就可以成功。

(2)當水和油被當成一體一般的被取出時，就直接使用 $(a, b) \mid T$ 的方法得到結果。

※由於 $T = T_w + T_o$ ，而且 $(a, b) \mid T_w$ ，

所以 $(a, b) \mid T$ 與 $(a, b) \mid T_o$ 是相同敘述！

符合條件：

1.首先 $(a, b) \mid T_w$ 用以形成底層，且

2.再來 $(a, b) \mid T_o \equiv (a, b) \mid T$ 用以形成第二層

也就是說，符合上述條件者，即會有解；

不符合上述條件者，須「另有條件」才能得解。

(七) 題目七：另外，若將題目六修改為油水不可分辨，則因難度又更加大增，

以 $a = 5$, $b = 8$, $T = 4$ ($2T_o$ 、 $2T_w$)為例

先用前題方法做出 $2T_w$

(表二)

a	b
	$2T_w$
	$2T_w + 6T_o$
$2T_w + 3T_o$	
	$2T_w + 6T_o$
$5T_o$	
$2T_o$	?
	無法分出 $2T_w$

由左項流程圖來判斷，即可了解其中的困境，因為油水不能分辨，以至於就算做出 T_o ，也分不出 T_w 來。

除非有特殊條件，如題目四的條件一般。

即： $T = T_w + T_o = a$ 或 b

但是 $b - ka = T = T_w + T_o$

(即 $a \mid (b - T)$) 的條件則不可行

故符合條件僅有：

1. $(a, b) \mid T_w$ 用以形成底層

且 2. $T = T_w + T_o = a$ 或 b 或是

3. $a \mid (b - T)$

研究二：

在研究一中，已經在桶子數目、內容物數量、甚至是桶子的種類，都做了變化，也在這些題目中得到了初步的小小成果。但當我準備要做更多的條件變化及延伸時，卻遇到了瓶頸，一直沒辦法再想出特殊的點子，讓我有點頭痛。為此只好去請教老師，老師建議我，在**加廣**的部份已經有了成果，應該**回到最初條件的題目**，做更深入的了解。後來經過仔細的分析，發現原來題目的假設是：「有 2 個桶子及 1 個無限供應水量的大桶子」，但如果套用到現實生活中，這第 3 個桶子必定是有容量限制的，這讓我發現了另一個指標，從第 3 個桶子的水量及容量下手，由「題目一」再做更深入的研究。

(一) 題目八：如果大桶子的內容物不是無限多時

1. 首先，我們必須分析一下桶子容量的影響

(1) 如果總容量 $T_{\text{tot}} > \text{桶子公升數 } C$

→ 這是不合理且不允許的假設

(2) 如果 $T_{\text{tot}} = C \rightarrow$ 合理

(3) 如果 $T_{\text{tot}} < C \rightarrow$ 可以

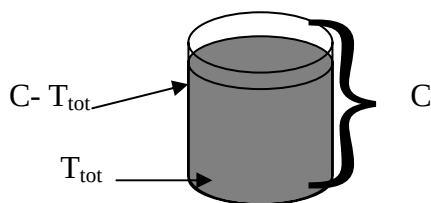
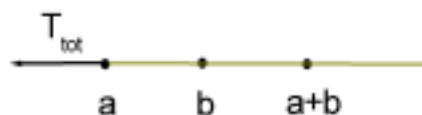


圖 13

但我們研究發現，在操作過程中，永遠用不到 $C - T_{\text{tot}}$ 的部份，故形成一個 $C' = T_{\text{tot}}$ 的虛擬桶子。表示 C 的大小沒有影響， **T_{tot} 才是影響的最大因素。**

2. 若 $T_{\text{tot}} \leq a \leq b$

由於水量不足，故其解僅能有 $T_W = T_{\text{tot}}$ 1 種

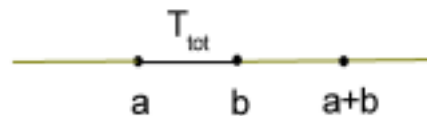


3. 若 $a \leq T_{\text{tot}} \leq b$

則水量的變化可用 a 桶去削，故其解有

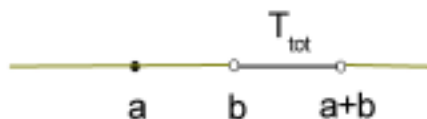
$$T_W = ka \leq T_{\text{tot}} \quad \text{或} \quad T_W = T_{\text{tot}} - ka \geq 0$$

其中 k 為自然數



4. 若 $a \leq b < T_{\text{tot}} = C < a + b$

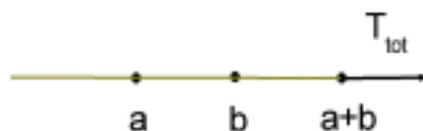
原先我以為這是很簡單的題目，後來才發現相當的複雜，就算用繁複的過程也無法解題，迫使我們必須研究一套簡潔且可靠的計算方式來解題。因為這非常複雜，無法在此簡說，我們將會獨立於下一章節做說明。



5. 若 $a \leq b < a + b \leq T_{\text{tot}} \leq C$

則由於 2 個桶子最多只用了 $a + b$ 公升的水，因此

a, b 二個桶子永遠不會知道 C 的水量是否為無限多，也就是說，若 $a \leq b < a + b \leq T_{\text{tot}}$ ，則其有解的條件和“題目一”一樣，是 $(a, b) \mid T_W$



三、研究三

在解題目八 -- 4 時，原本照經驗，這題目應該用 $T_{\text{tot}} - ka = T_w$ 或是 $(a, b) \mid T_w$ 的條件，就可以判斷是否有解，用數字套入也合乎邏輯。

[$(a, b, T_{\text{tot}}) = (3, 5, 7)$ 可以倒得出 $T_w = 1, 2, 3, 4 \cdots$]

但在做驗證時突然發現， $(a, b, T_{\text{tot}}, T_w) = (4, 6, 9, 1)$ 為題目時，在上述條件下無解，而實際上卻有解；而另一道 $(a, b, T_{\text{tot}}, T_w) = (8, 12, 19, 1)$ ，在上述情況下無解，而實際也無解。為什麼會發生這種情形？同學建議我，應該多假設一點數字來做結果的歸納，可是我試了幾題之後才發現，我解題時，都是**土法煉鋼**的慢慢把答案推敲出來，雖然累積了很多經驗，卻還是速度慢且容易出錯，要是推不出來，也不能肯定是不是真的無解。於是乎我意識到，必須找到一個快速可靠的解題模式，來判定是否有解，及其解的步驟。試過很多方法〈像輾轉相除法〉，依然沒有結果。直到一次數學課上到「直角座標」，我就嘗試把各種解以座標點的形式畫在座標圖上，竟然形成了一個框！更令人振奮的是，如果透過一定的規則跳點，就能輕鬆知道分水的步驟及結果。這種方式，大大的提升了解題的速度及準確度，成為一項利器。為求方便，我們將它稱為「**跳格子解法**」。

(一)由於字數的限制，我只能用較簡單的方式，敘述模型的原理。〈若老師認為敘述有不詳盡之處，懇請現場提問，謝謝！〉

(二)以 $a = 3$ ， $b = 5$ ， $T_{\text{tot}} = 7$ ， $T_w = 1$ 及 $T_w = 2$ 為例〈如下表所示〉

(表三)

Ta	Tb	Tc
0	0	7
3	4	0
0	4	3
3	1	3

(表四)

Ta	Tb	Tc
0	0	7
0	5	2
2	5	0
2	0	5

我們發現，在求得 T_w 的每一個單一步驟中，不是用 a 桶去改變別桶的內容，就是用 b 桶去改變別桶的內容。若用 a 桶去改變別桶內容，則 T_a 不是 a 就是 0，同理，b 也一樣。也就是說，經由 a、b 等 2 個水桶的互相傾倒後，所能產生的數對 (T_a, T_b) ：

1. 一定只會分布在 $X=0$ (x 軸)、 $X=a$ 、 $Y=0$ (y 軸)、 $Y=b$ 上

2. 且 $T_a + T_b$ 的最大值為 T_{tot} ，不能超過。

3. 將上述條件畫在直角座標圖上，

且令 $(x, y) = (T_a, T_b)$ ，則形成下圖：

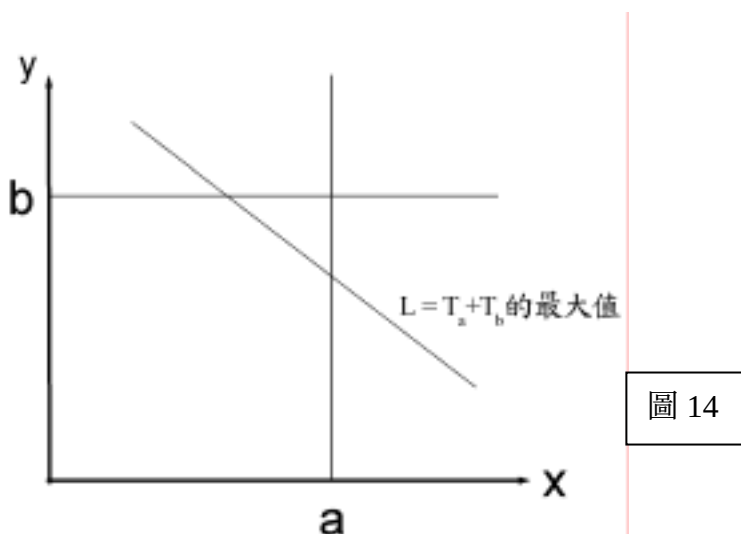
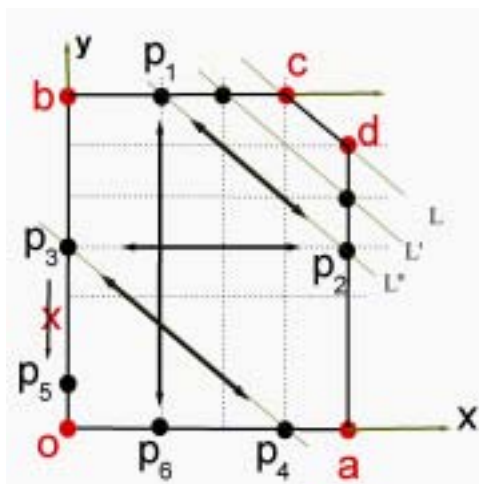


圖 14

4. 綜合上述的條件與模型（當然包括我的經驗與推理），我將「跳格子解法」的詳細規則分敘如下（參考附圖 15）

圖 15



(1) 若 T_w 能被形成，則其解的 (T_a, T_b) **必定只會分布在**以點 aobcd 所形成的多邊形上。

(2) aobcd 等多邊形的端點，皆可以作為起點。

(3) 多邊形上的任一點，皆可以以水平及垂直的方式，跳到任一邊線上，例如：

$P_3 \Leftrightarrow b$ 點、 $P_3 \Leftrightarrow O$ 點、 $P_3 \Leftrightarrow P_2$ 、 $P_2 \Leftrightarrow d$ 點、 $p_2 \Leftrightarrow a$ 點、 $p_1 \Leftrightarrow p_6$等等

(4)多邊形上的任一點，亦可以順著斜線 L 的平行線跳到任一邊線上，例如：

$P1 \leftrightarrow P2$ 、 $P3 \leftrightarrow P4$ 、 c 點 $\leftrightarrow d$ 點.....

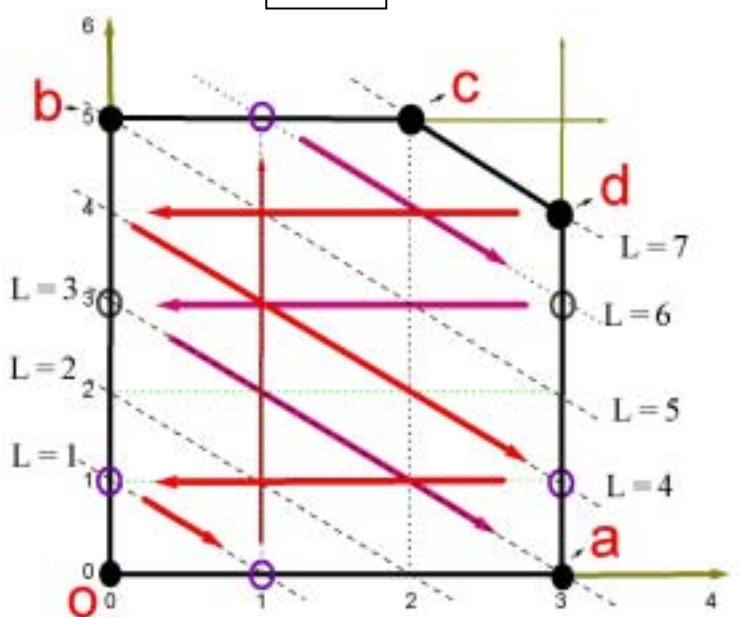
(5)除非使用上述步驟，否則多邊形上的任一點，**皆不可以**直接跳到另一點上，例如：

$P3 \leftarrow \times \rightarrow P5$ 、 $P4 \leftarrow \times \rightarrow P1$

5.現在我馬上使用「跳格子解法」解一些簡單命題

(1)以 $a = 3$ ， $b = 5$ ， $T_{\text{tot}} = 7$ ， $T_W = 1$ 為例，我們可以發現，在標示為 **○** 的點上，皆可以達到我們的要求（即 $T_a = T_W = 1$ or $T_b = T_W = 1$ ）並且以 d 點 $(3, 4)$ 為起點，最後再回到 $(3, 4)$ ；（可參考下圖 16，及其對應的表五）

圖 16



（表五）

(T_a, T_b)	T_a	T_b	T_c
$(3, 4)$	3	4	0
$(0, 4)$	0	4	3
$(3, 1)$	3	1	3
$(0, 1)$	0	1	6
$(1, 0)$	1	0	6
$(1, 5)$	1	5	1
$(3, 3)$	3	3	1
$(0, 3)$	0	3	4
$(3, 0)$	3	0	4
$(3, 4)$	3	4	0

6.在熟練「跳格子解法」後，我們省略了其中箭頭的指示，直接將可能的數序座標，標示在多邊圖形上，同時用它來解之前所提及、令我感到困惑的難題

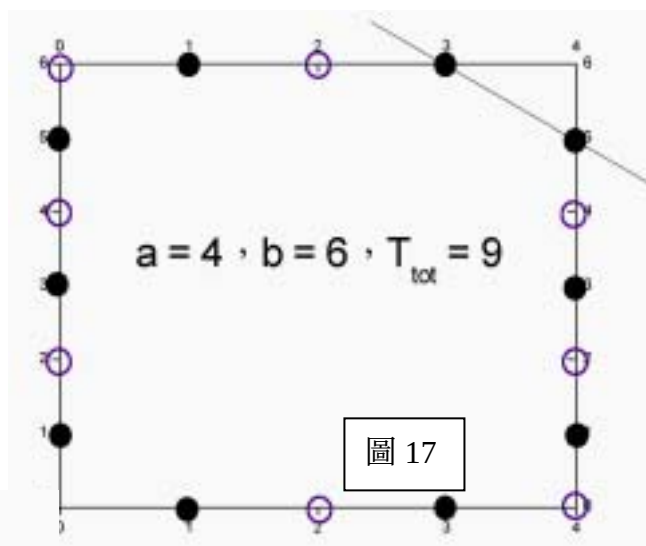


圖 17

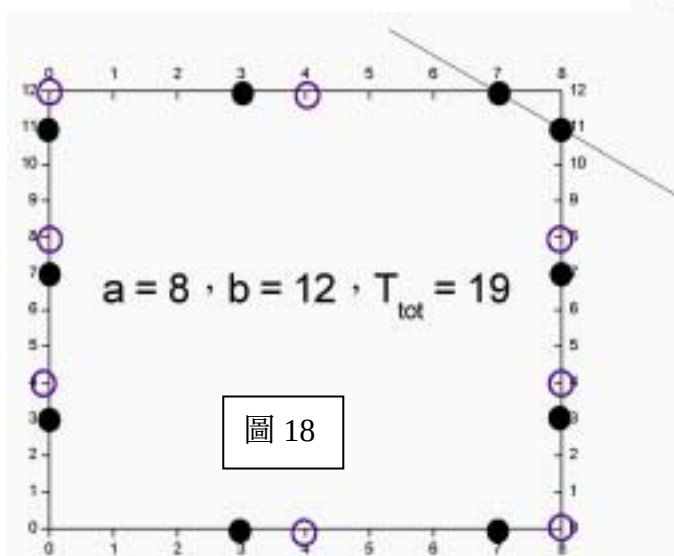


圖 18

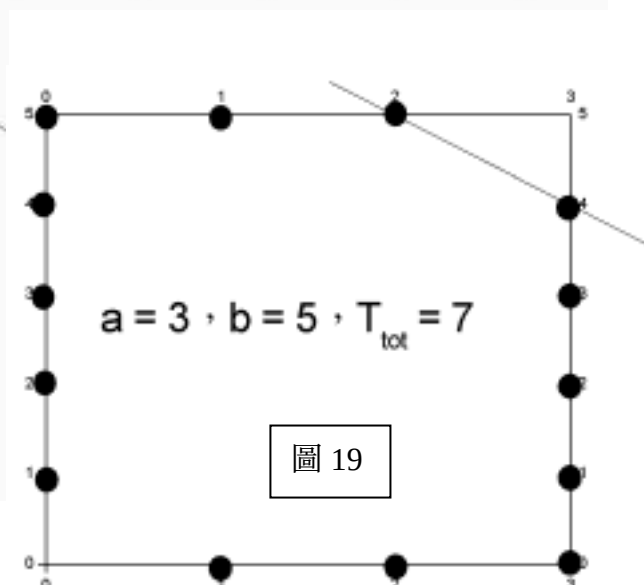


圖 19

命題: 由圖 17、18、19 等三組解的比較發現:

- (1)在條件為 $a = 8$, $b = 12$, $T_{\text{tot}} = 19$ 的命題中，確實沒有通過 $T_w = 1$ 的解，而在條件為 $a = 4$, $b = 6$, $T_{\text{tot}} = 9$ 的命題中，卻有 $T_w = 1$ 的解
- (2)條件為 $a = 8$, $b = 12$, $T_{\text{tot}} = 19$ 及條件為 $a = 4$, $b = 6$, $T_{\text{tot}} = 9$ 的所有解(T_w)，分布在 2 種不同路徑上（標示為 ○ 及 ● 二種），而且同路徑的解，彼此相差(a , b)
- (3)條件為 $a = 3$, $b = 5$, $T_{\text{tot}} = 7$ 的所有解(T_w)，只分布在同一路徑上，而且相鄰的解，彼此亦相差(a , b)

(4)由上述觀察結果，我猜測該命題的解，應該是

$$T_w = T_a = a - k(a, b) \quad \text{或} \quad (c - b) - k(a, b) \quad \text{或} \quad k(a, b)$$

$$\text{或} \quad T_w = T_b = b - k(a, b)$$

$$\text{或} \quad (c - a) - k(a, b) \quad \text{或} \quad k(a, b)$$

7.跳格子解法，亦可以使用在證明題目八的其他命題上，但為了節省版面空間，在此不多攢述，希望能有機會在會場，向老師們演示。

陸、結論

一、經過我們長期的和桶子與油水奮戰，花了很大的苦心及時間，以及一連串長長的算式後，總算是為這一系列的命題找到了解答，至於更多數目的桶子，或更多內容物數目的題目，是可以用目前的結果去累加的。

二、我在這個研究中，意外的發現，在這個系列的命題中，存在一種奇特且隱藏的刻度，我們稱它叫"虛擬刻度"，那是因為桶子之間任意倍數的疊加消去而產生的，是真實能使用，但卻又不存在的一種刻度！

三、在這個系列的研究中，我已在推理、邏輯推演等工作上，盡力的做到嚴謹，但是由於數學知識的局限，所以我只稱在這七個命題中，所找到的條件是"必定有解的條件"，更希望專家老師能指點我的錯誤及命題方向！

四、我們將結果列表如下：

※ 必定有解的情況：

桶子 種類	桶子 數目	內容物 數目	可否 分辨	結 果
水桶	2	1		$(a, b) \mid T$
水桶	2	2	可	$1. (a, b) \mid T_w$ $2. \text{且 } (a - T_w, b) \mid T_o$ 或 $(a, b - T_w) \mid T_o$
水桶	2	3	可	$1. (a, b) \mid T_{Hg}$ $2. (a - T_{Hg}, b) \mid T_w$ 或 $(a, b - T_{Hg}) \mid T_w$ $3. (a - T_{Hg} - T_w, b) \mid T_o$ 或 $(a - T_{Hg}, b - T_w) \mid T_o$ 或 $(a - T_w, b - T_{Hg}) \mid T_o$ 或 $(a, b - T_{Hg} - T_w) \mid T_o$
水桶	2	$m > 3$	可	只需將上格中的答案再反覆替代即可在此不加攢述
水桶	2	2	不可	$1. (a, b) \mid T_w$ $2. T = a \text{ 或 } b \text{ 或 } a \mid (b - T)$ (其中： $b > a$)
水桶	$m > 3$	$m - 1$	不可	只需將上格中的答案再反覆替代即可在此不加攢述
水桶	3	2	不可	$(a, b) \mid T_o \text{ 且 } (a, c) \mid T_w$ 或 $(a, b) \mid T_w \text{ 且 } (a, c) \mid T_o$
紅茶桶	2	2	可	$1. (a, b) \mid T_w, \text{ 且}$ $2. (a, b) \mid T_o \equiv (a, b) \mid T$

五、在總水量不同，而造成解的變化的情形，我們已經做了詳細的報告，現在將果列表如下：

T_{tot}	T_w
$T_{\text{tot}} \leq a \leq b$	$T_{\text{tot}} \leq a \leq b$
$a \leq T_{\text{tot}} \leq b$	$T_w = ka \leq T_{\text{tot}}$ 或 $T_w = T_{\text{tot}} - ka \geq 0$
$a \leq b < T_{\text{tot}} = C < a + b$	$T_w = Ta = a - k(a, b)$ 或 $(c - b) - k(a, b)$ 或 $k(a, b)$ 或 $T_w = Tb = b - k(a, b)$ 或 $(c - a) - k(a, b)$ 或 $k(a, b)$
$a \leq b < a + b \leq T_{\text{tot}} \leq C$	$(a, b) \mid T_w$

六、在我的研究中，不僅研究解的”可能性”，亦研究解的”可行性”，即”解的步驟”，而我所發現的”跳格子解法”讓過程變的簡單且容易。

玖、參考資料及其他

一、參考資料

註 1：黃士耘等 4 人、分水遊戲面面觀、中華民國中小學科展第 39 屆 初小組數學科第三名

註 2：網站「尤怪之家」數學戲谷/單人遊戲/分酒

〈<http://www.shes.hcc.edu.tw/~oddest/>〉

註 3：見 單樽 所著「趣味數論」二版、九章出版社、P.16、1993 年 4 月

註 4：見 單樽 所著「不定方程」初版、凡異出版社、P.2~P.11、民國 85 年 1 月

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國中組 數學科

佳作

030412

分水的藝術

基隆市立銘傳國民中學

評語：

研究主題從生活中發掘，作品生動有趣，如能在理論方面作更深入探討將會是一件不錯的作品。