中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030410

從摺紙中談規律之美

臺中縣立大華國民中學

作者姓名：

國一 楊峻盛 國一 曾明慧 國一 王若維

國一 羅茜文

指導老師：

詹益彥

中華民國第 45 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：從摺紙中談規律之美

關 鍵 詞：摺紙、規律

編　　號：

從摺紙中談規律之美

壹、 摘要

將紙條的摺痕定義出「內」與「外」之後，探索摺痕所形成數列的規律性及紙條立起來後最後所指的方向。

貳、 研究動機

雨後的彩虹以七彩圓弧橫越天際；沙丘的起伏形如波浪 ...，自然界處處都隱含著某一規律之美。在下課之餘，桌上突然飛來一團紙，打開之時有些似『山峰』、有些似『山谷』排列其中，也隱藏某種規律，因此邀約同學一起研究這個問題並請老師指導。

參、 研究目的

一、能從這個研究中，找出紙條摺痕的規律性。

二、能應用 GSP 軟體，來輔助解決問題及驗證。

三、培養團隊合作的精神。

肆、 研究設備及器材

紙條、電腦、量角器、GSP 軟體 。

伍、 研究過程或方法

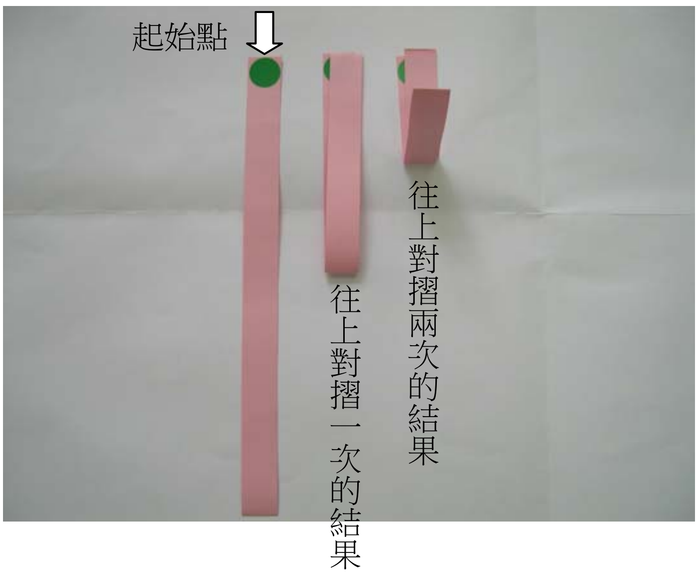
一、預備知識：

1. GSP 軟體操作。
2. 多邊形內角和： $(n-2)\times 180^{\circ}$
3. 正 n 邊形的每一內角：$(n-2)\times 180^{\circ} \div n$

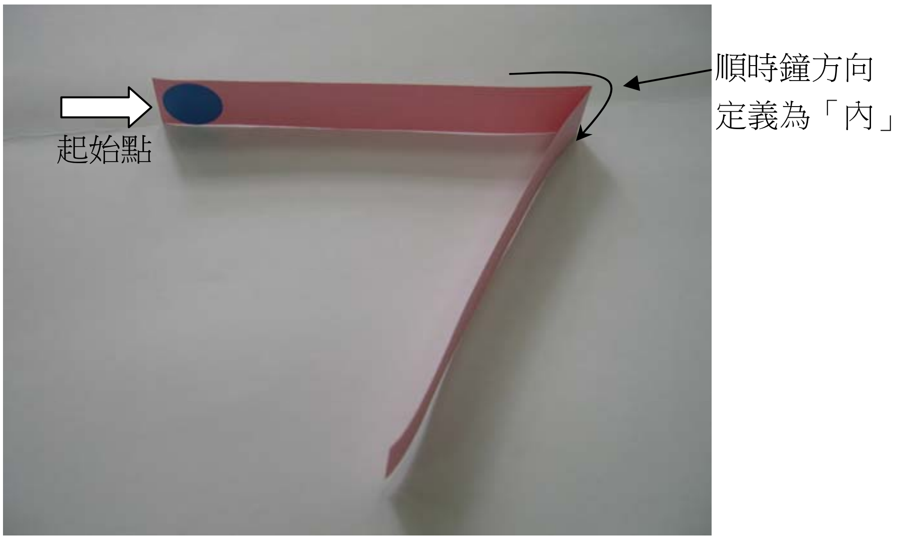
二、研究過程：

$\boxed{\text{問題一}}$ 拿一張紙條依同方向對摺，指出「起始點」，並將摺痕定義出「內」與「外」。

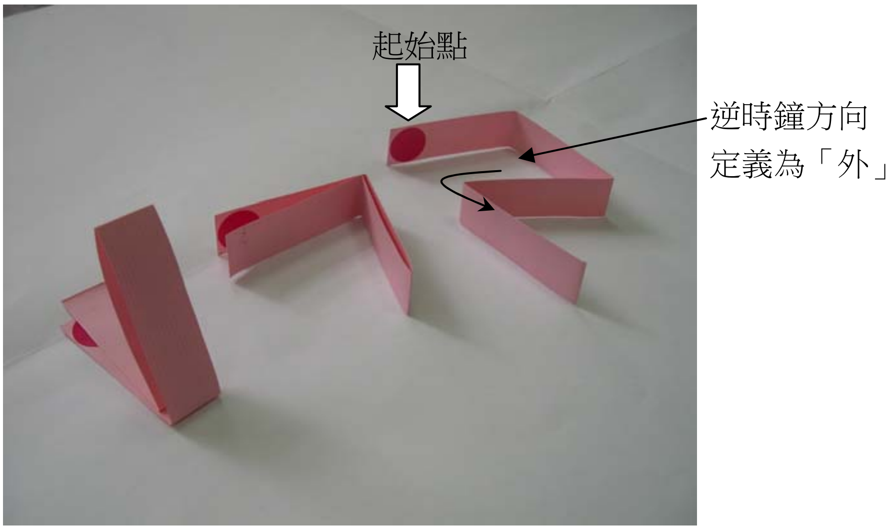
(1)依同方向對摺：如圖往上對摺（即往圓形貼紙方向）。



(2)將摺痕定義出「內」與「外」。



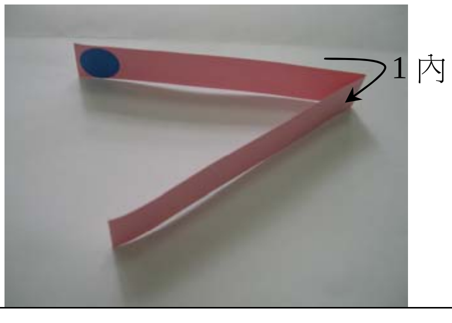
圖二 定義「內」

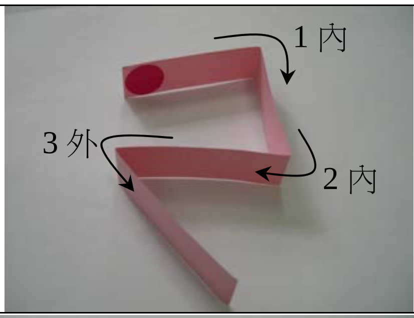
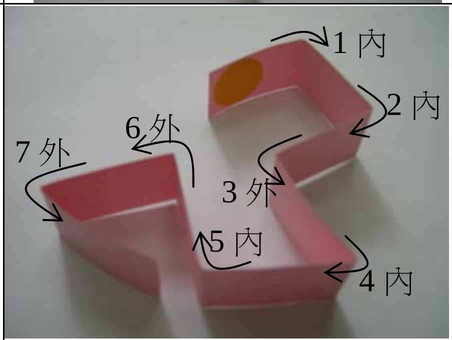
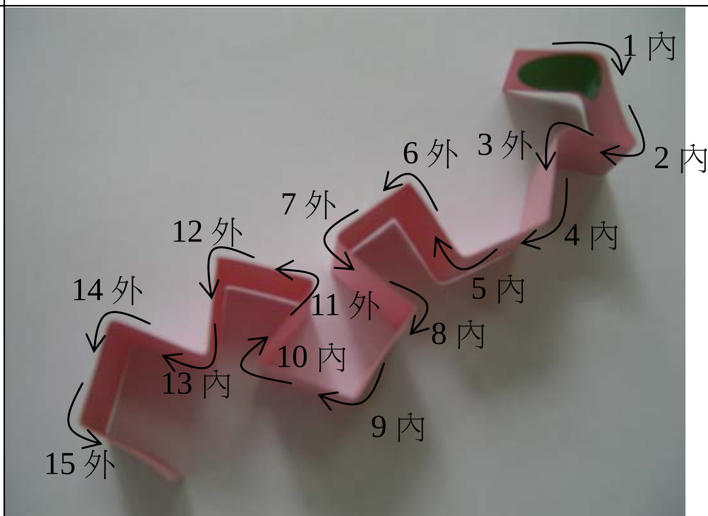


圖三 定義「外」

問題二 對摺多次後，打開觀察摺痕且由起始點依序寫出一數列？可否用 GSP 軟體來驗證？

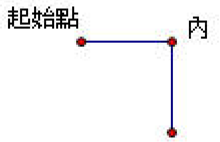
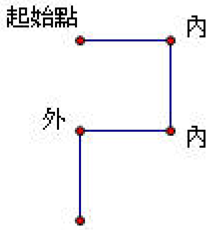
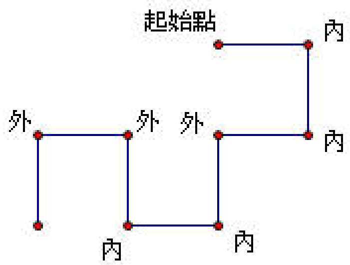
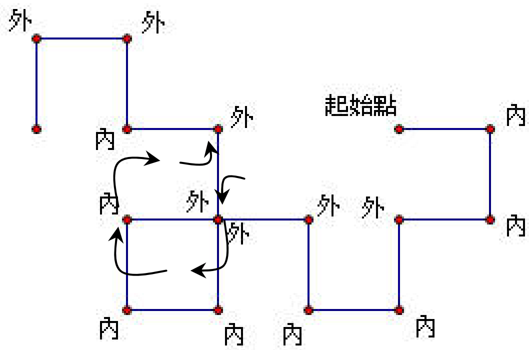
(1)實際用紙條對摺多次並紀錄如下表:

	實 際 的 圖 片	數列
對摺一次		內

對摺二次		內 內 外
對摺三次		內 內 外 內 內 外 外
對摺四次		內 內 外 內 內 外 外 內 內 內 外 外 內 外 外

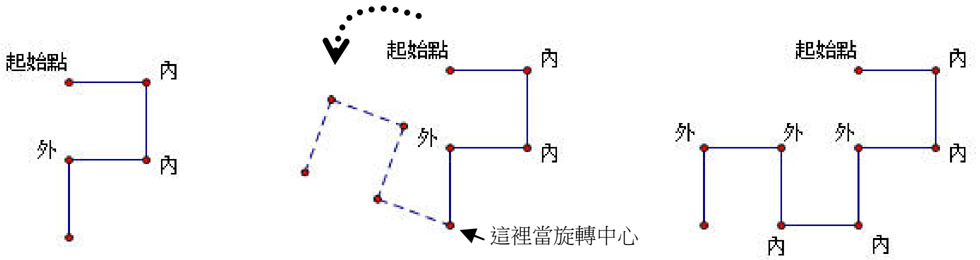
在對摺五次時，就很困難進行，因為紙摺疊在一起厚度增加了,就很難再對摺了，除非再把紙條加長。

(2)用 GSP 軟體來操作並紀錄如下表：

<table>
<tr><th></th><th>GSP 軟體操作的圖形</th><th>數列</th></tr>
<tr><td>摺一次</td><td>
</td><td>內</td></tr>
<tr><td>摺二次</td><td>
</td><td>內
內
外</td></tr>
<tr><td>摺三次</td><td>
</td><td>內
內
外
內
內
外
外</td></tr>
<tr><td>摺四次</td><td>
</td><td>內
內
外
內
內
外
外
內
內
內
外
外
內
外
外</td></tr>
</table>

(3)從上面(1)與(2)的表中可知，用紙條實際對摺與 GSP 軟體操作的結果是相同的，因此用 GSP 軟體解決了(1)厚度增加且不易再對摺的問題。

另外在操作 GSP 軟體的過程中，我們也有重大的發現，如下圖所示。



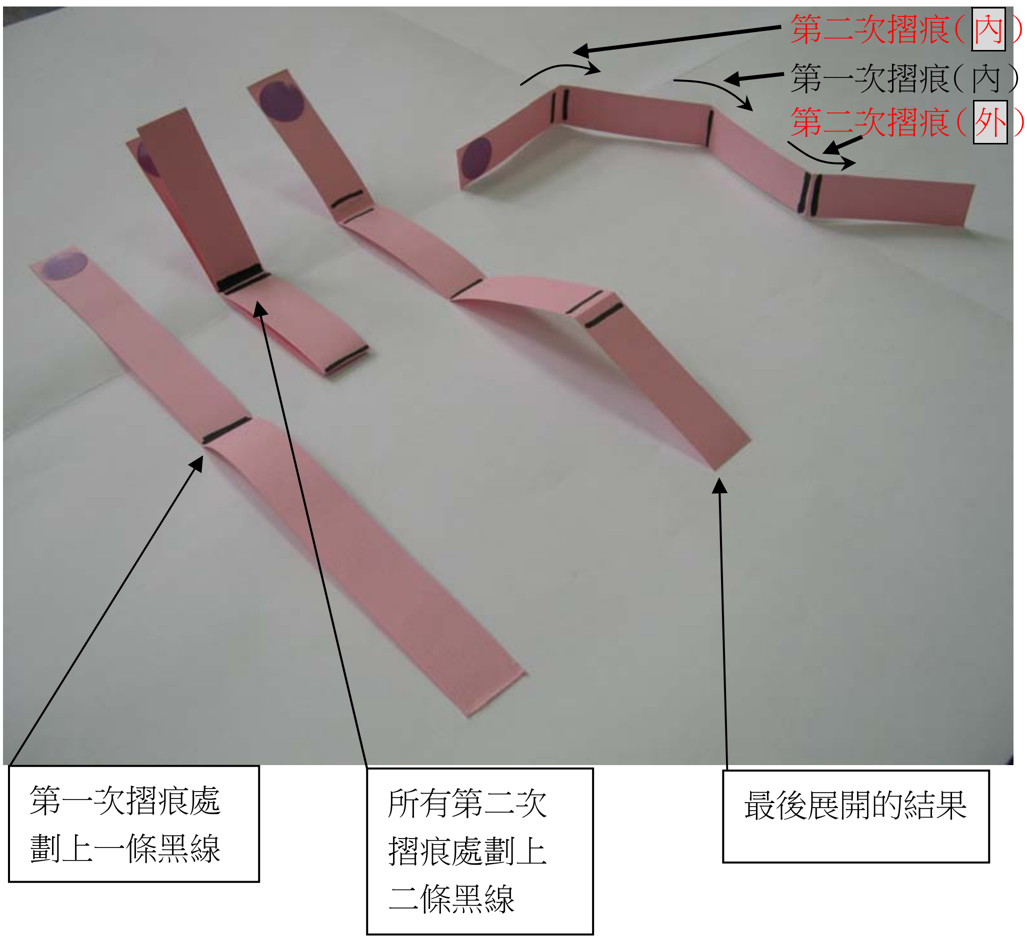
摺二次的圖形 → 將摺二次後的圖形全部旋轉 90 度 → 就產生摺三次的圖形

問題三 如果不藉助紙條或 GSP 軟體時可否在對摺多次後寫出一數列？

我們討論出一個結論：

以對摺二次來說明，在第一次摺痕處劃上一條黑線，在第二次摺痕處劃上二條黑線。

最後展開的結果是在「一條黑線」之上、下各有『二條黑線』。如下圖：



因此在對摺二次時，在原先的「內」，上、下依次各插入一個「內」與「外」，所以我們得到了對摺二次的數列是 內、內、外 。

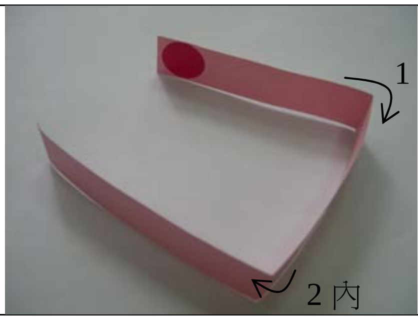
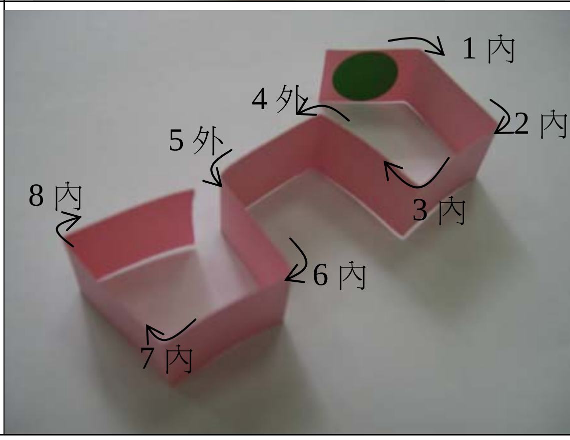
繼續再做下去，我們發現了「內、外、內、外・・・」有規律地插入在前一次數列的間隔中，因此我們得到「對摺三次」、「對摺四次」的數列。如下表：

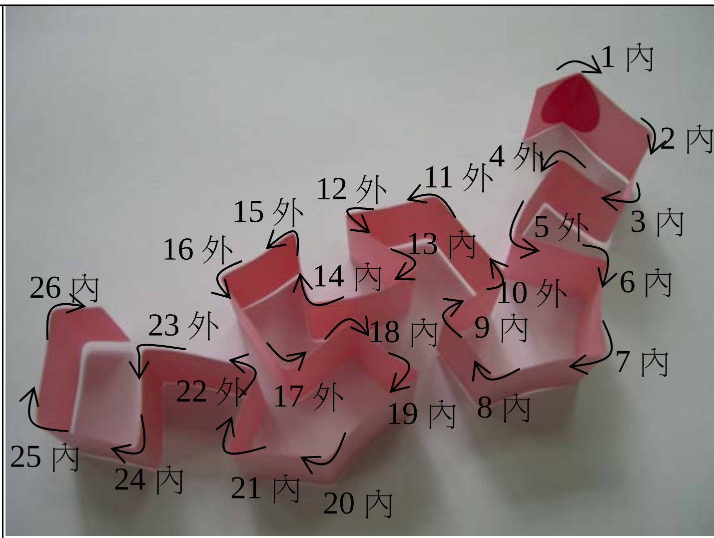
	摺一次	摺二次	摺三次	摺四次
數列	內	內 內 外	內 內 外 內 內 外 外	內 內 外 內 內 外 外 內 內 內 外 外 內 外 外

問題四 摺三等分多次時所得的數列又是如何？

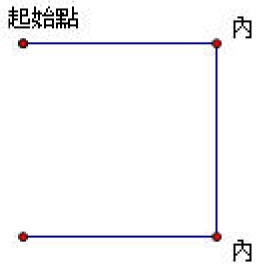
我們也分三個部份來討論：

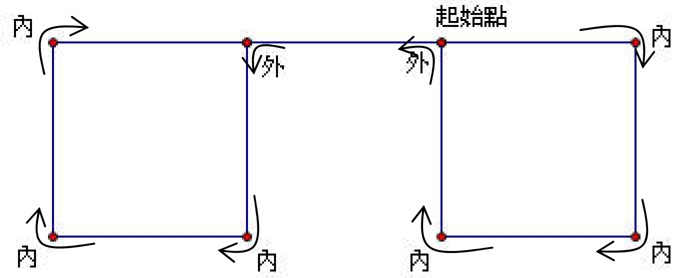
(1)用紙條實際摺時

	實 際 的 圖 片	數列
摺一次		內 內
摺二次		內 內 內 外 外 內 內 內

<table>
<tr><td>摺
三
次</td><td>
</td><td>內
內
內
外
外
內
內
內
內
外
外
外
內
內
外
外
外
內
內
內
內
外
外
內
內
內</td></tr>
</table>

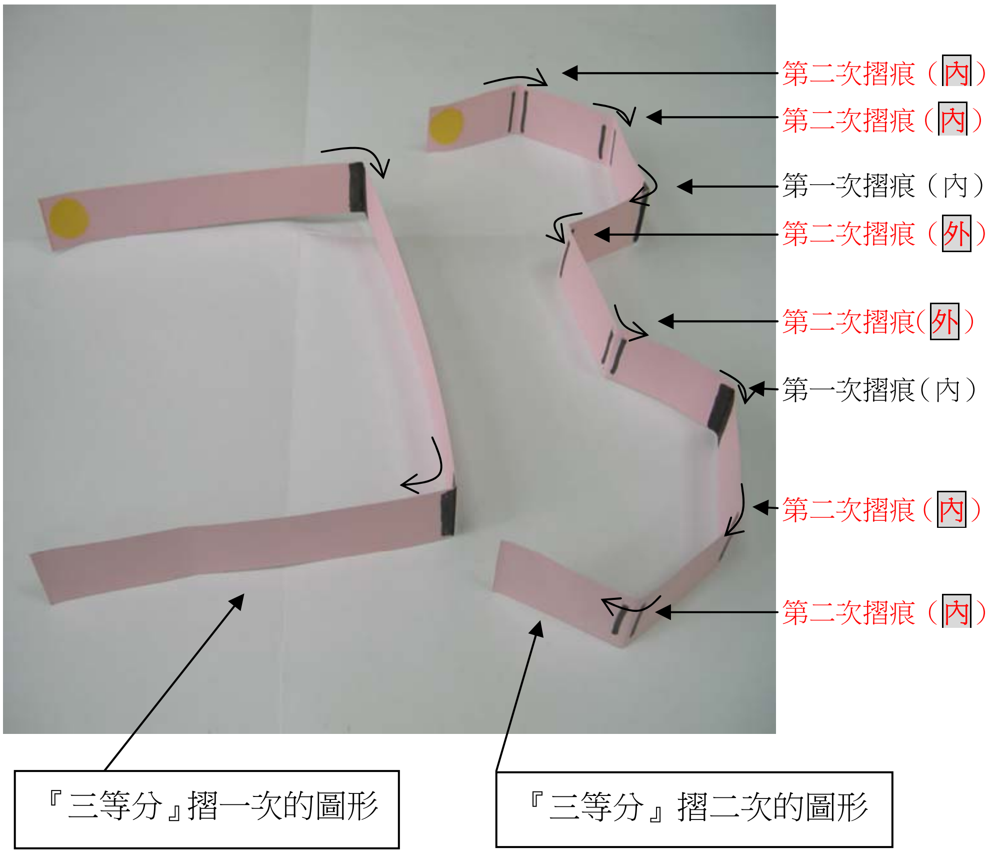
(2)用 GSP 軟體操作時

<table>
<tr><th></th><th>GSP 軟體操作的圖形</th><th>數列</th></tr>
<tr><td>摺
一
次</td><td>
</td><td>內
內</td></tr>
</table>

摺二次		內內內外外內內內
摺三次	這時候 GSP 軟體無法像對摺時那麼方便。	

(3)不藉助紙條或 GSP 軟體時

根據問題三的方法，在摺『三等分』二次時，保留原先的「內 內」，由上而下依「內 內」、「外 外」依次填入其中，如下圖所示。



同理也可推得「摺三次」的數列。如下表：

	摺一次	摺二次	摺三次
數列	內 內	內內 內 外外 內 內內	內內 內 外外 內 內內 內 外外 外 內內 外 外外 內 內內 內 外外 內 內內

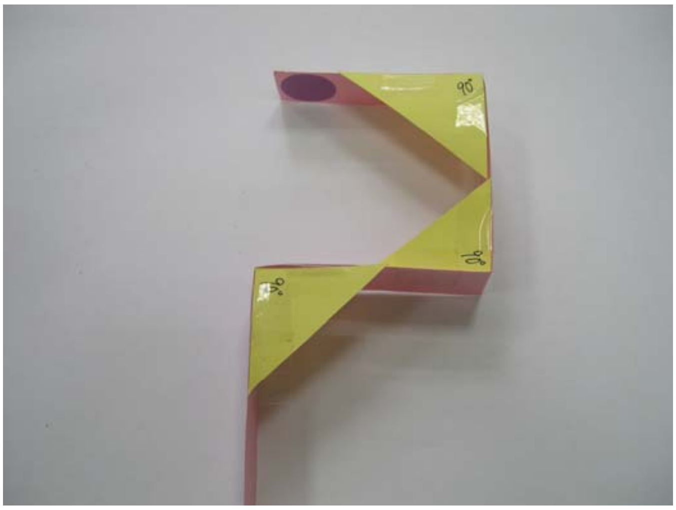
問題五 是否能繼續推廣到摺 n 等分？

我們根據問題三的方法 ---- 不藉助紙條或 GSP 軟體討論出下表：

		數　列
對摺	一次	內
	二次	內內外
摺三等分	一次	內內
	二次	內內內外外內內內
摺四等分	一次	內內內
	二次	內內內內外外外內內內內內外外外
摺五等分	一次	內內內內
	二次	內內內內內外外外外內內內內內內外外外外內內內內內
⋮		
摺 n 等分	一次	n-1 個內
	二次	n-1 個內內 n-1 個外內 n-1 個內 ．．．

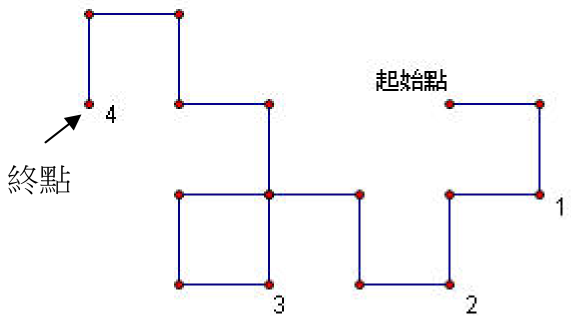
問題六 在對摺多次後，如果將摺痕打開成直角，且把紙條立起來，你將看到什麼形狀？紙條是否會轉向自己？

(1)實際以紙條操作

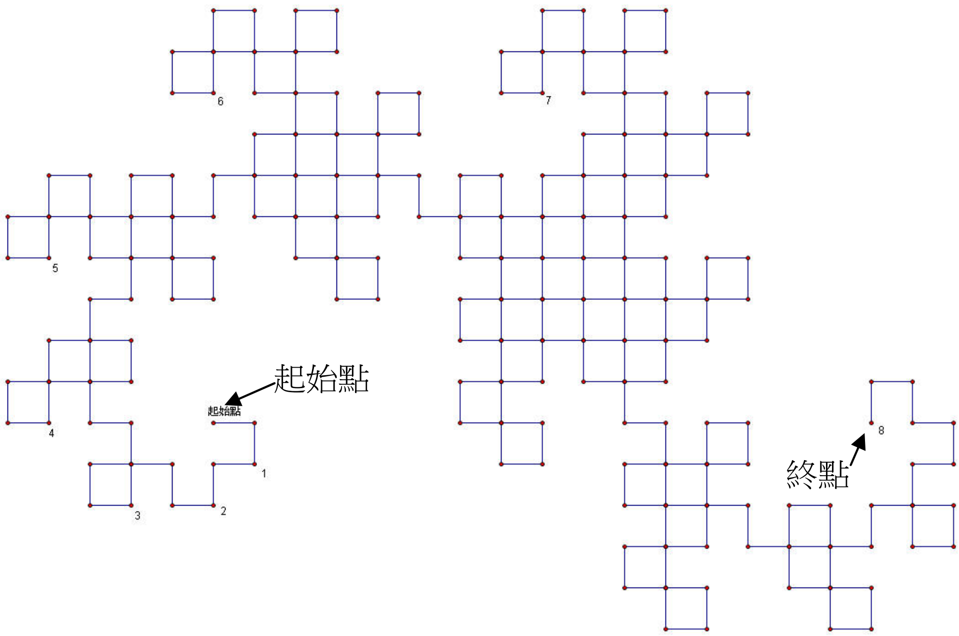
摺一次後打開的圖形	
摺二次後打開的圖形	
摺三次後打開的圖形	

(2)以 GSP 軟體操作

摺 1～4 次時的圖形，如下圖所示：

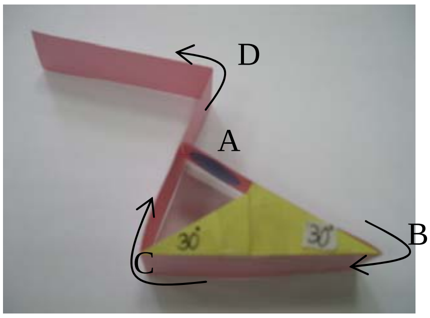


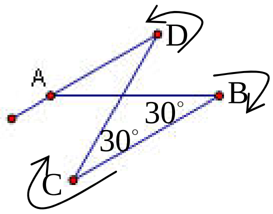
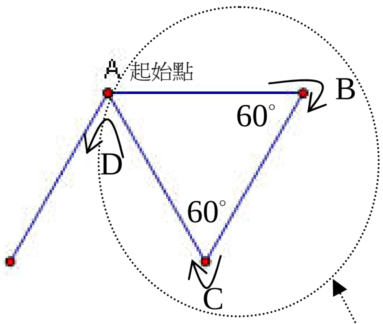
摺 1～8 次時的圖形，如下圖所示：

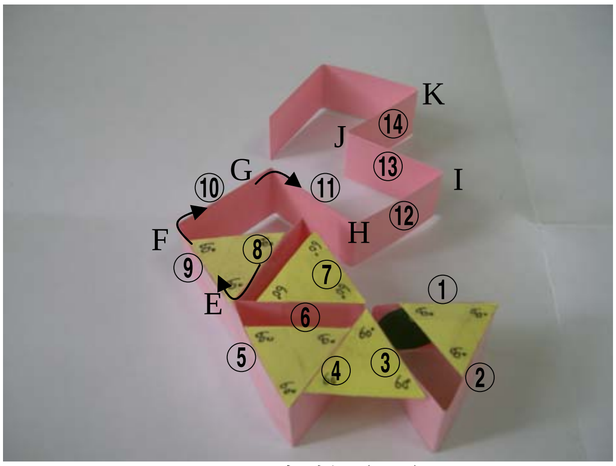


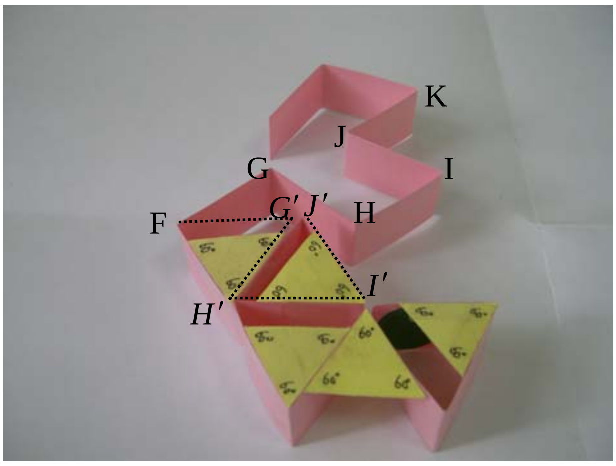
從（1）或（2）可知，圖形以順時鐘方向在旋轉，紙條會轉向自己。

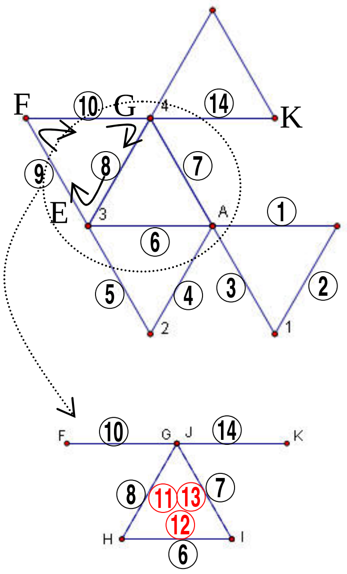
問題七 繼續推廣問題六，在對摺多次後，如果將摺痕打開成其他角度又如何？

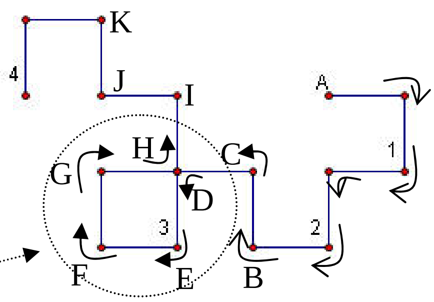
<table>
<tr><td colspan="2">一開始將摺痕打開成 30 度角</td></tr>
<tr><td>實　際　情　況</td><td>GSP 軟體操作</td></tr>
<tr><td>

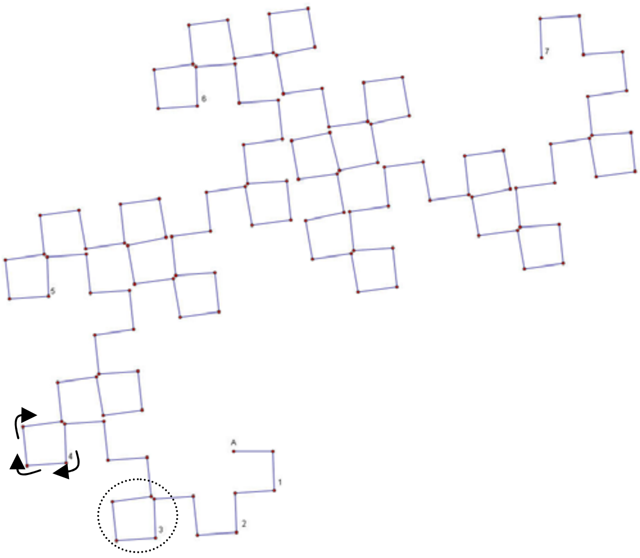
$\angle DCB = 30^{\circ}$ 會產生交疊</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">（1）對摺二次時的數列是 內、內、外。
（2）在 GSP 操作後，我們發現 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 交疊在一起，經討論後是遇到連續兩個「內」所造成的。
（3）在這個情況之下改成打開成 60 度角時就解決了這個問題，如下圖所示：

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">繼續再摺並打開成 60 度角</th></tr>
<tr><th>實　際　情　況</th><th>GSP 軟體操作</th></tr>
<tr><td>

相片（一）


相片（二）</td><td>

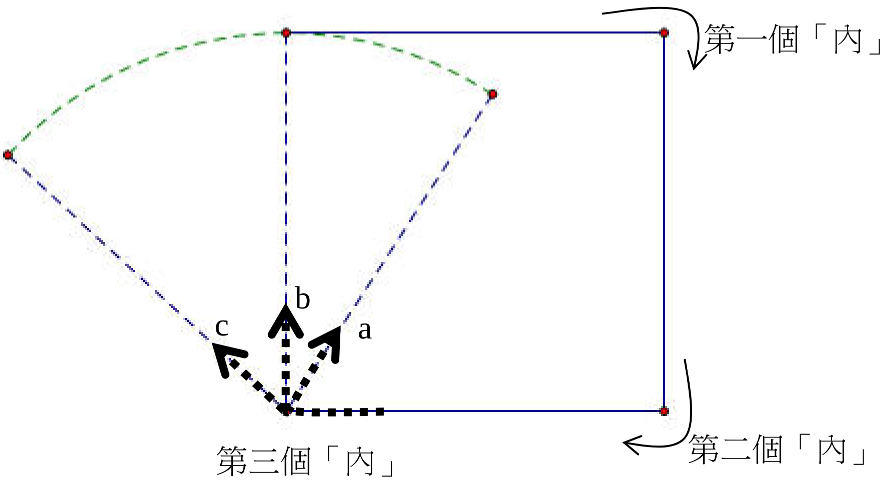
GSP 中交疊部份</td></tr>
<tr><td colspan="2">（1）對摺四次後的數列是 內內外內內外外內內內外外內外外。
（2）GSP 軟體操作後的圖形與實際情況相片（一）有出入。我們仔細分析與討論後，是因為相片（一）E、F、G 是連續三個「內」而造成在 GSP 中 ⑪ 和 ⑧、⑫ 和 ⑥、⑬ 和 ⑦ 三段交疊在一起。
（3)我們修正了相片(一)中的 F-G-H-I-J 改成相片(二)中的 F-G'-H'-I'-J'，紙條會發生交疊，就與 GSP 的模擬一致。
（4）在這個情況之下改為打開成 90 度角時就解決了這個問題，如下圖所示：
沒有交疊在一起

</td></tr>
</table>

最後以 GSP 軟體來操作並打開成 92 度角

打開成 92 度角時，也不再出現有交疊的現象。

從上面觀察我們討論出：

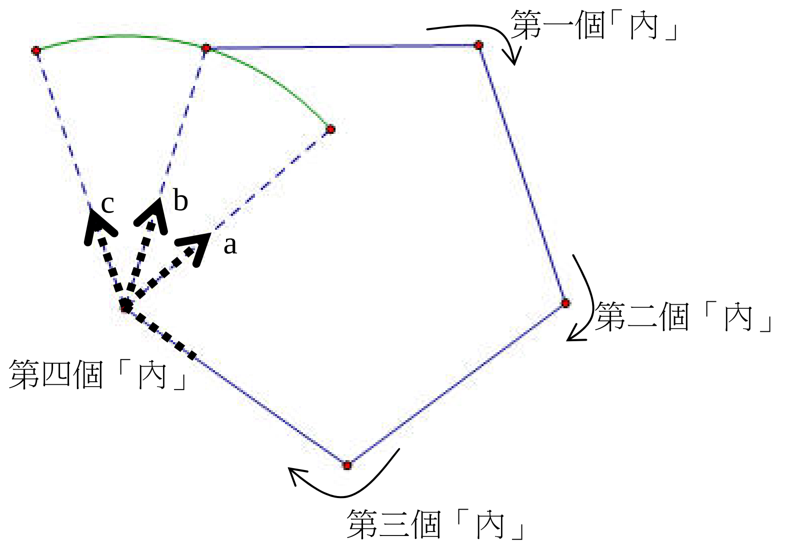
(1) 在問題三中所得到的數列，我們可以觀察到對摺多次後的數列最多只遇到連續三個「內」。

(2) 因為連續三個「內」，我們計算出$(4-2)\times 180^\circ \div 4 = 90^\circ$，所以摺痕打開的角度不要小於 90 度（如圖往 b 或 c），就不會產生交疊的現象。



問題八 摺『三等分』多次時，將摺痕打開成多少角度時就不會產生交疊的現象？

我們觀察出『三等分』摺三次時的數列是 內內內外外內內內內外外外內內外外外內內內內外外內內內，或是摺更多次時最多有連續四個「內」，我們計算出$(5-2)\times 180 \div 5 = 108$度。所以摺痕打開的角度不要小於 108 度（如圖往 b 或 c），就不會產生交疊的現象。



問題九 我們把問題七、問題八做個整理如下表：

	紙條至少打開的角度
對摺	$(4-2)\times 180^\circ \div 4 = 90^\circ$（連續三個內）
摺三等分	$(5-2)\times 180^\circ \div 5 = 108^\circ$（連續四個內）
摺四等分	$(6-2)\times 180^\circ \div 6 = 120^\circ$（連續五個內）
摺五等分	$(7-2)\times 180^\circ \div 7$（連續六個內）
⋮	
摺 n 等分	$n\times 180^\circ \div (n+2)$（連續 n+1 個內）

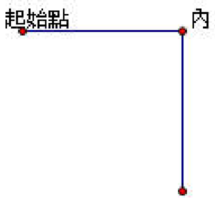
問題十 根據問題六、七、八的心得，在沒有交疊的情形下以數學模式來討論「對摺」及「摺三等分」時，紙條最後所指的方向。

（1）對摺時

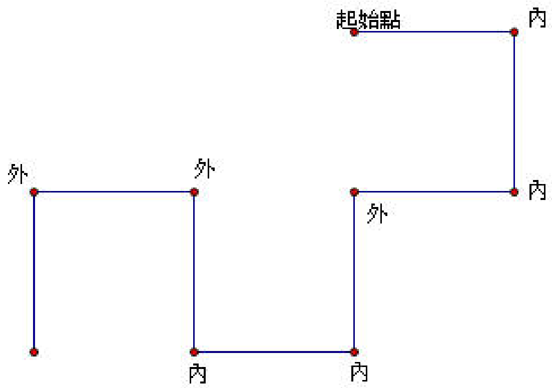
假設「內」= 1，「外」= -1。我們就可得到下表中數列的和

	數　　列	數列的和
摺一次	內	1
摺二次	內內外	1
摺三次	內內外內內外外	1
摺四次	內內外內內外外內內內外外內外外	1
⋮		
摺 n 次		1

和都等於 1 ，表示紙條最後所指的方向和對摺一次的方向一致，如下圖如示：



對摺一次的圖形



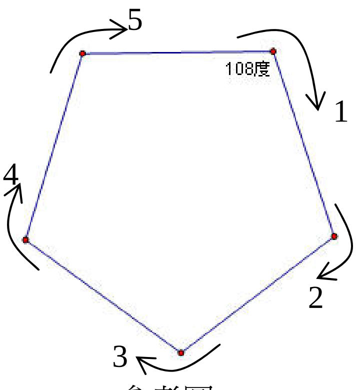
對摺三次的圖形

（2）摺三等分時

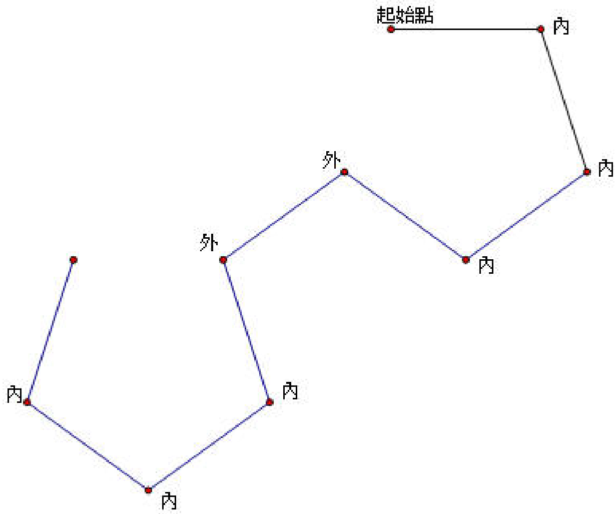
假設「內」= 1，「外」= -1。我們就可得到下表中數列的和

	數　　　　列	數列的和
摺一次	內內	$2 = 2\times1$
摺二次	內內內外外內內內	$4 = 2\times2$
摺三次	內內內外外內內內內外外外內內外外外內內內內外外內內內	$6 = 2\times3$
⋮		
摺 n 次		$2 \times n$

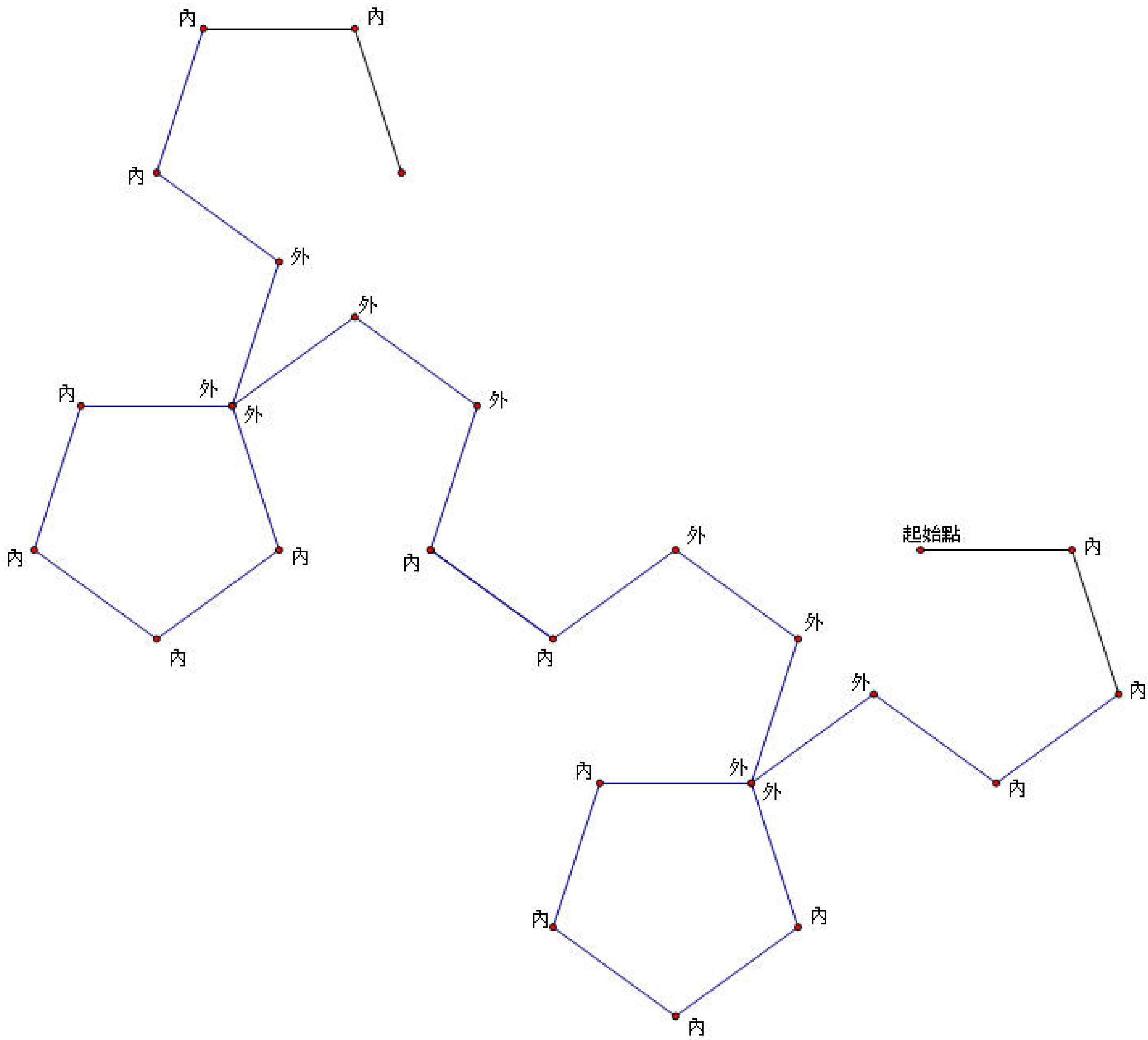
以摺二次並且將紙條打開角度為 108 度為例，數列的和等於 4 ，表示紙條最後所指的方向和參考圖中「4」的方向一致。



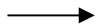
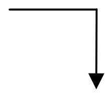
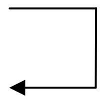
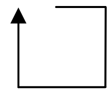
參考圖



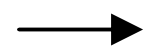
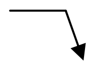
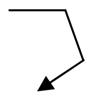
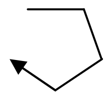
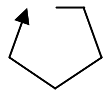
摺三次並且將紙條打開角度為 108 度，數列的和等於 6 ，我們就
$6 \div 5 = 1 \cdots\cdots 1$ ，餘數是 1，表示紙條最後所指的方向和參考圖中「1」的方向一致



（3）從這裡我們也討論出一個心得如下表：

	摺痕打開成 90 度角			
餘數	0	1	2	3
紙條最後所指的方向				

因為每一個內角等於 90 度構成了正方形，所以將數列的和除以 4 所得的餘數，就是紙條最後所指的方向。

	摺痕打開成 108 度角				
餘數	0	1	2	3	4
紙條最後所指的方向					

因為每一個內角等於 108 度構成了正 5 邊形，所以將數列的和除以 5 所得的餘數，就是紙條最後所指的方向。

問題十一　討論『對摺』、『摺三等分』及推廣到「摺 n 等分」的摺痕總數。

一開始我們觀察對摺的摺痕的總數是 1，3，7，17，．．．．，看不出有什麼規律，但是我們寫成下面的方式很容易看出它的規律性。

（1）對摺時

	數 列	摺痕的總數	摺痕總數的數學公式
一次	內	1	1×1
二次	內內外	3	$(2+1)\times 1$
三次	內內外內內外外	7	$(2^2+2+1)\times 1$
四次	內內外內內外外內內內外外內外外	15	$(2^3+2^2+2+1)\times 1$
⋮			
n 次			$(2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}...+2^2+2+1)\times 1$

摺痕總數的數學公式推演如下：

對摺二次的摺痕總數 ＝ 對摺一次的摺痕總數 ＋ 插入摺痕總數

＝ 對摺一次的摺痕總數 ＋ （對摺一次的摺痕總數+1）

換句話說：
假設前一次的摺痕 ＝ x
目前摺痕總數 ＝ 前一次的摺痕總數 ＋ （前一次的摺痕總數+1）

$$= x + (x+1)$$

$$= 2 \times x + 1$$

對摺一次	對摺二次	對摺三次	對摺四次
	$2 \times x + 1$	$2 \times \Delta + 1$	$2 \times \Delta + 1$
1	$2 \times 1 + 1$	$2 \times (2 \times 1 + 1) + 1$ $= 2^2 \times 1 + 2 \times 1 + 1$	$2 \times (2^2 \times 1 + 2 \times 1 + 1) + 1$ $= 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2 \times 1 + 1$
1×1	$(2+1) \times 1$	$(2^2 + 2 + 1) \times 1$	$(2^3 + 2^2 + 2 + 1) \times 1$

所以摺 n 次時的摺痕總數 ＝ $(2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} ... + 2^2 + 2 + 1) \times 1$

（2）摺三等分時

	數 列	摺痕的總數	摺痕總數的數學公式
一次	內內	2	1×2
二次	內內內外外內內內	8	$(3+1) \times 2$
三次	內內內外外內內內內外外外內內外外外內內內內外外內內內	26	$(3^2 + 3 + 1) \times 2$
⋮			
n 次			$(3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3} ... + 3^2 + 3 + 1) \times 2$

摺痕總數的數學公式推演如下：
摺二次的摺痕總數 ＝ 摺一次的摺痕總數 ＋ 插入摺痕總數
＝ 摺一次的摺痕總數 ＋ （摺一次的摺痕總數 ＋1）× 2
換句話說：
假設前一次的摺痕 ＝ x
目前摺痕總數 ＝ 前一次的摺痕總數 ＋ （前一次的摺痕總數 ＋1）× 2

$$= x + (x+1) \times 2$$

$$= 3 \times x + 2$$

摺一次	摺二次	摺三次	摺四次
	$3\times x+2$	$3\times\Delta+2$	$3\times\Delta+2$
2	$3\times 2+2$	$3\times(3\times 2+2)+2$ $=3^2\times 2+3\times 2+2$	$3\times(3^2\times 2+3\times 2+2)+2$ $=3^3\times 2+3^2\times 2+3\times 2+2$
1×2	$(3+1)\times 2$	$(3^2+3+1)\times 2$	$(3^3+3^2+3+1)\times 2$

所以摺 n 次時的摺痕總數 $=\left(3^{n-1}+3^{n-2}+3^{n-3}\ldots+3^2+3+1\right)\times 2$

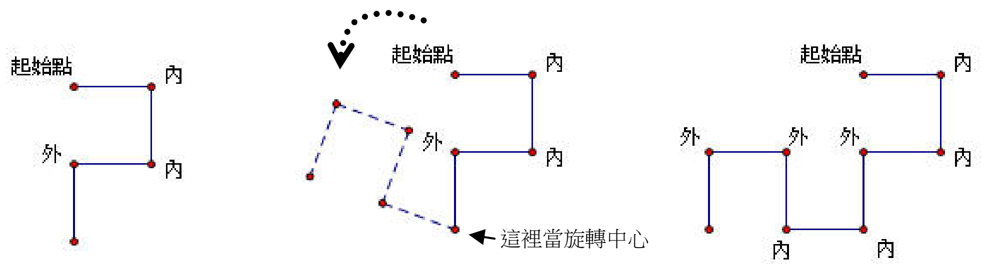
(3) 推廣到摺 n 等分

	n 次後摺痕的總數
對摺	$\left(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1\right)\times 1$
摺三等分	$\left(3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3^2+3+1\right)\times 2$
摺四等分	$\left(4^{n-1}+4^{n-2}+\cdots+4^2+4+1\right)\times 3$
摺五等分	$\left(5^{n-1}+5^{n-2}+\cdots+5^2+5+1\right)\times 4$
⋮	
摺 n 等分	$\left(n^{n-1}+n^{n-2}+\cdots+n^2+n+1\right)\times(n-1)$

陸、 結論

（一） 實際用紙條對摺多次時，遇到的瓶頸是疊在一起的厚度一直增加，相對也不易對摺，應用 GSP 軟體來操作也解決了不少問題。

（二） 在使用 GSP 軟體來印證紙條實際對摺多次後得到的數列過程中，我們也有重大的發現，如下圖所示。



摺二次的圖形 → 將摺二次後的圖形全部旋轉 90 度 → 就產生摺三次的圖形

（三） 將摺痕定義出「內」與「外」後，我們也證明不管是「對摺」或「摺三等分」，甚至於到「摺 n 等分」都有著規律性。

		數　列
對摺	一次	內
	二次	內內外
摺三等分	一次	內內
	二次	內內內外外內內內
摺四等分	一次	內內內
	二次	內內內內外外外內內內內內外外外
摺五等分	一次	內內內內
	二次	內內內內內外外外外內內內內內內外外外外內內內內內
⋮		
摺 n 等分	一次	n-1 個內
	二次	n-1 個內內 n-1 個外內 n-1 個內・・・

（四） 在對摺多次時，摺痕打開的角度不要小於 90 度；在摺三等分多次則不要小於 108 度，紙條將不會交疊在一起，圖形也會順時鐘方向旋轉。至於其他我們也整理如下表：

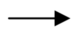
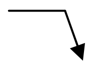
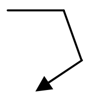
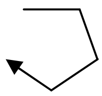
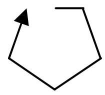
	紙條至少打開的角度
對摺	$(4-2)\times180^{\circ}\div4=90^{\circ}$（連續三個內）
摺三等分	$(5-2)\times180^{\circ}\div5=108^{\circ}$（連續四個內）
摺四等分	$(6-2)\times180^{\circ}\div6=120^{\circ}$（連續五個內）
摺五等分	$(7-2)\times180^{\circ}\div7$（連續六個內）
⋮	
摺 n 等分	$n\times180^{\circ}\div(n+2)$（連續 n+1 個內）

（五） 我們將「對摺」、「摺三等分」到「摺 n 等分」以數學模式整理如下：

假設「內」= 1，「外」= -1

		數列	數列的和	n 次後數列的和
對摺	一次	內	1	1
	二次	內內外	1	
摺三等分	一次	內內	2×1	$2\times n$
	二次	內內內外外內內內	2×2	
摺四等分	一次	內內內	3	3
	二次	內內內內外外外內內內內內外外外	3	
摺五等分	一次	內內內內	4×1	$4\times n$
	二次	內內內內內外外外外內內內內內內外外外外內內內內內	4×2	
⋮				
摺 n 等分	n 是奇數			$(n-1)\times n$
	n 是偶數			$n-1$

（六） 把紙條立起來後，紙條最後所指的方向，我們的結論如下：

	摺痕打開成 108 度角				
餘數	0	1	2	3	4
紙條最後所指的方向					

因為每一個內角等於 108 度構成了正 5 邊形，所以將數列的和除以 5 所得的餘數，就是紙條最後所指的方向。

（七） 我們整理出對摺、摺三等分、・・・・在 n 次後摺痕的總數。

	n 次後摺痕的總數
對摺	$(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1)\times1$
摺三等分	$(3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3^2+3+1)\times2$
摺四等分	$(4^{n-1}+4^{n-2}+\cdots+4^2+4+1)\times3$
摺五等分	$(5^{n-1}+5^{n-2}+\cdots+5^2+5+1)\times4$
⋮	
摺 n 等分	$(n^{n-1}+n^{n-2}+\cdots+n^2+n+1)\times(n-1)$

（八） 到目前為止我們所討論都是往上摺，因此我們再從另一個方向去思考就是「一上一下」，也得到下表：

		數　　列
摺二等分	摺一次（上）	內
	摺二次（下）	外內內
	摺三次（上）	內外外內內內外
摺三等分	摺一次（上）	內內
	摺二次（下）	外外內內內內外外
	摺三次（上）	內內外外外外內內內外外內內內內外外內內內外外外外內內
摺四等分	摺一次（上）	內內內
	摺二次（下）	外外外內內內內內外外外內內內內
	摺三次（上）	內內內外外外外外內內內外外外外內內內內內 外外外內內內內內外外外內內內內外外外外外 內內內外外外外內內內內內外外外內內內內內 外外外
⋮		
摺 n 等分	摺一次（上）	（n-1 個內）
	摺二次（下）	（n-1 個外）內（n-1 個內）內（n-1 個外）・・・
	摺三次（上）	（n-1 個內）外（n-1 個外）外（n-1 個內）・・・

從這個表可以讓我們了解到往上摺就是以「內」起頭；往下摺就是以「外」起頭且有規律地呈現。

（九） 未來展望：（1）摺三等分或是摺其他等分多次時，用 GSP 軟體來模擬顯得麻煩許多，列為下次研究、探討的對象。

（2）雖然能不藉助紙條或 GSP 軟體推出數列，但是要列出摺多次後的數列是有點麻煩，希望將來在數學課程中學習更多的知識並能用電腦程式自動產生數列，那就方便多了。

柒、 參考資料及其他

（一）Brian Bolt 著、王榮輝譯 數學遊樂園之舉一反三 牛頓出版公司 。

（二）台北市立建國高級中學四九屆三一四班全體同學 數學思考 九章出版社。

（三）GSP4.0 版 動態幾何操作手冊

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國中組 數學科

030410

從摺紙中談規律之美

臺中縣立大華國民中學

評語：

考慮在摺了多次以後的內外序列，是蠻有趣的問題，比較可惜的是，似乎未能掌握解決問題的核心關鍵，如果能由小例子看出正確的規律，作者會發現第二段的內外規則其實不適是第一段的反向，若能說明此一事實，討論將大為簡化。