中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030409

國家寶藏

高雄市立瑞豐國民中學

作者姓名：

國二 鄭旻佳 國二 張佑任

指導老師：

林虹慶 潘怡勳

中華民國第四十五屆全國中小學科學展覽

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：國家寶藏

關 鍵 詞：<u>費馬點</u>

編 號：

中華民國第四十五屆全國中小學科學展覽

作品說明書

國中組　數學科

高雄市立瑞豐國民中學

指導老師姓名

林虹慶、潘怡勳

作者姓名

鄭旻佳、張佑任

目錄

國　家　寶　藏

壹、 摘要

日常生活中，我們時常會遇到要**求距離和的問題**，如果只在 A、B 兩點間找一點 P 距離 A、B 最短，那麼大家都知道只要在兩點的連線段上任意一點皆可以，那如果是在$\triangle ABC$中找一點 P 距離此三點最短，又該如何找呢？這個問題，早在約三百多年前，費馬先生就已經提出來了，而這也就是有名的『**費馬點**』問題，多年來對於費馬點的證明很多，然大多只侷限在三角形三內角皆小於120°的三角形，這不禁讓我們懷疑，是否對於任意一個三角形，費馬點都存在呢？答案是肯定的！難能可貴的是，我們捨棄了一般人望之卻步的分析或高等代數的方法，而僅是利用了國中數學所學的幾何證明方法，便成功的找出了**有一內角大於或等於120°的三角形的費馬點，更進一步的推廣到了凸多邊形和立體圖形中的四面體**，我們誠摯地希望以此作品，讓更多對此問題感興趣的人，可以更親近，甚至擁抱數學，也讓大家瞭解原來數學也可以是很生活化而又平易近人的。

貳、 研究動機

江湖上盛傳明末清初，國姓爺鄭成功趕走荷蘭人收復台灣後，曾把一筆為數可觀，準備用來做為反清復明基金的金銀財寶，偷偷的從東南沿海運來台灣藏匿，但因為覬覦者眾，所以國姓爺從不對別人提起有這麼一大筆寶藏，只知道國姓爺畫有一張藏寶圖，流藏在民間的某一處，爾後，國姓爺不幸身亡後，關於藏寶圖的傳說雖然在民間偶有聽說，但卻從不曾有人親眼見過那一張藏寶圖，更遑論是堆積如山的國家寶藏了。

某日，外出耕田的鍾大獎無意間在田地裡發現了藏寶圖，但是寶藏並沒有直接畫在藏寶圖裡，而是必須解出圖中詩句才知道真正的寶藏所在，於是他絞盡腦汁想了三天三夜，終於破解了圖中詩句的意思，**原來寶藏就藏在距離瑞豐村、龍門山、鳳穴湖這三處的距離和最小的地方**，但是，問題又來了，鍾大獎並不知道如何找出距離和最小的地方，請問聰明的你（妳）可以幫他找出來嗎？

參、 研究目的

一、 找出三內角皆小於120°的三角形的費馬點。

二、 找出有一內角大於或等於120°的三角形的費馬點。

三、 推廣並尋找四邊形內部距各頂點距離和最小的一點。

四、 推廣並尋找凸多邊形內部距各頂點距離和最小的一點。

五、 推廣並尋找四面體內距各頂點距離和最小的一點。

肆、 研究設備及器材

圓規，直尺，電腦，電腦作圖軟體 GSP。

伍、 名詞解釋

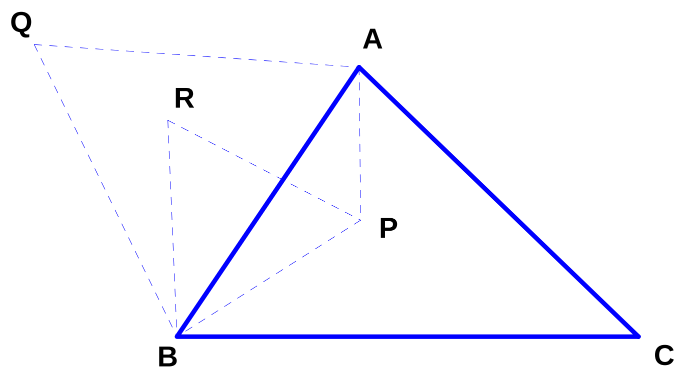
費馬點：費馬(Pierre de Fermat,1601-1665)是一位律師和法國政府的公務員，他利用閒暇的時間研究數學，他從未發表他的研究發現，但是他幾乎與同時代的所有歐洲的大數學家保持通信。有一天，他要回答一個收到的問題，如果一家公司要設立辦公室（P），讓這個辦公室到這三個城鎮(A,B,C)的距離總和為最短，而這個位置我們就叫做『**費馬點**』。

陸、 研究步驟

一、 **費馬點的證明**：在尋找過一些資料後，我們發現費馬點就具有這樣的特性，於是我們就先來看看費馬點的證明：

在$\triangle ABC$中找一點 P，使得 P 點到三頂點的距離和為最小。

證明



圖（一）

如上圖（一），在$\triangle ABC$中，P 為三角形內部一點，以$\overline{PB}$為一邊，

作正$\triangle PBR$；以$\overline{AB}$為一邊，作正$\triangle ABQ$，連接$\overline{QR}$（如圖）

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle QBR(SAS) \quad \Rightarrow \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{RQ}+\overline{PR}+\overline{PC}$

則當 Q，R，P，C 四點共線時，$\overline{RQ}+\overline{PR}+\overline{PC}$距離和最小，

即$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$最小　且此時$\angle BPC=180^0-\angle RPB=120^0$

$\angle APB=\angle QRB=180^0-\angle BRP=120^0 \quad \Rightarrow \angle APC=120^0$

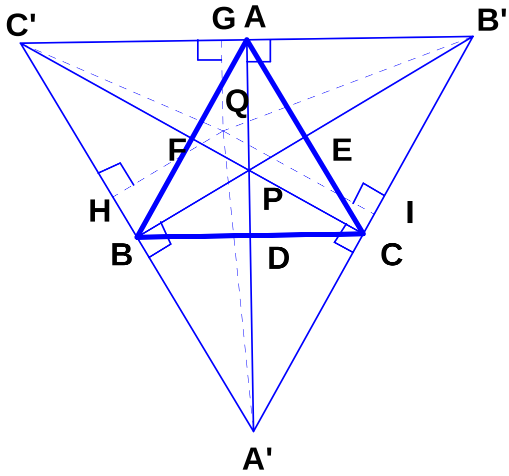
$\therefore$ **P 為到相鄰兩頂點連線夾角120^0的點**。　（得證）

二、　但是費馬點的證明方法只能侷限於三內角皆小於120^0的三角形，且若要推廣至多邊形也有困難，於是我們想出了自己的證明方法，可以順利的找出有一內角大於120^0的三角形的費馬點，且可以用來推廣至多邊形，首先我們由最基本的正三角形出發：

如下圖（二），$\triangle ABC$為正$\triangle$，其中 P 為三高$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$的交點，Q 為$\triangle ABC$內異於 P 的任一點。

求證：$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}<\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}$

證明



圖（二）

如上圖（二），過 A 作$\overleftrightarrow{B'C'}$平行$\overline{BC}$，過 B 作$\overleftrightarrow{C'A'}$平行$\overline{CA}$，

過 C 作$\overleftrightarrow{A'B'}$平行$\overline{AB}$，則亦得$\Delta A'B'C'$為正三角形

過 Q 作$\overline{QG} \perp \overline{B'C'}$，$\overline{QI} \perp \overline{A'B'}$，$\overline{QH} \perp \overline{C'A'}$

$\therefore \Delta A'B'C' = \Delta PA'B' + \Delta PB'C' + \Delta PC'A' = \Delta QA'B' + \Delta QB'C' + \Delta QC'A'$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\overline{PA} \times \overline{B'C'} + \frac{1}{2}\overline{PB} \times \overline{C'A'} + \frac{1}{2}\overline{PC} \times \overline{A'B'}$

$= \frac{1}{2}\overline{QG} \times \overline{B'C'} + \frac{1}{2}\overline{QH} \times \overline{C'A'} + \frac{1}{2}\overline{QI} \times \overline{A'B'}$

又$\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'A'}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\overline{A'B'}(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}) = \frac{1}{2}\overline{A'B'}(\overline{QG} + \overline{QH} + \overline{QI})$

$\Rightarrow \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{QG} + \overline{QH} + \overline{QI}$

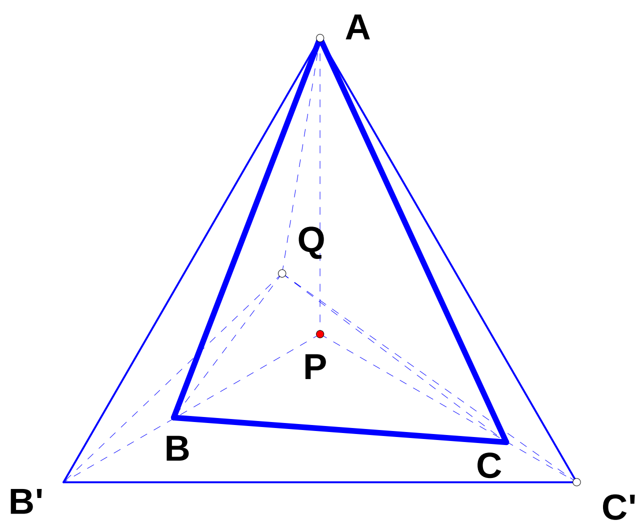
又$\overline{QA} > \overline{QG}$，$\overline{QB} > \overline{QH}$，$\overline{QC} > \overline{QI}$

$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC}$ （得證）

三、　承上，P 點恰為正三角形的重心、內心、外心、垂心、…，那麼如果在其他的三角形中又會是哪一點呢？在幾經嘗試後，發現是到**相鄰兩頂點間連線夾角** 120° **的點**。

> 如下圖（三），ΔABC 中，$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^0$，且 Q 為 ΔABC 內部異於 P 的一點：
>
> 求證：$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC}$

證明



圖（三）

如上圖（三），作正 $\Delta AB'C'$ 使 P 為 $\Delta AB'C'$ 的重心

承上之證明可知：$\overline{PA} + \overline{PB'} + \overline{PC'} < \overline{QA} + \overline{QB'} + \overline{QC'}$

又 $\overline{BB'} > \overline{QB'} - \overline{QB}$， $\overline{CC'} > \overline{QC'} - \overline{QC} \Rightarrow -\overline{BB'} - \overline{CC'} < \overline{QB} + \overline{QC} - \overline{QB'} - \overline{QC'}$

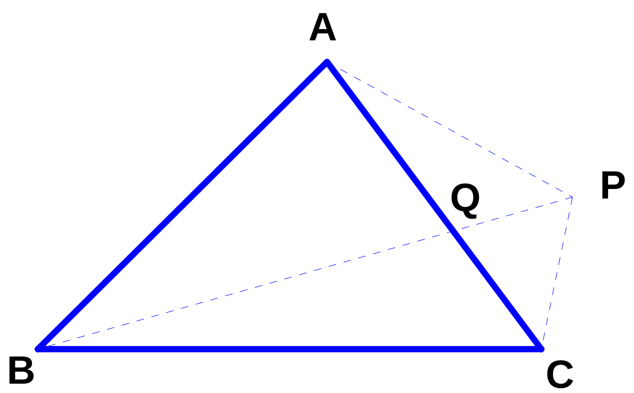
$\therefore \overline{PA} + \overline{PB'} + \overline{PC'} - \overline{BB'} - \overline{CC'} < \overline{QA} + \overline{QB'} + \overline{QC'} + \overline{QB} + \overline{QC} - \overline{QB'} - \overline{QC'}$

$\Rightarrow \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC}$　　故得證

四、　由以上證明所得的結果，這一點亦有可能是落在頂點上或三角形外部，意即若有一角等於120°，則此點會落在此角的頂點上，若有一角大於120°，則此點可能會跑到三角形的外部。但由以下證明，我們可知**此點必在三角形的內部或邊上**，不會跑到外部。

如下圖（四），P 為$\triangle ABC$外部任意一點，且$\overline{PB}$交$\overline{CA}$於 Q 點。 **求證：**$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}$

證明



圖（四）

如圖（四），$\overline{PA}+\overline{PC}>\overline{AC}=\overline{QA}+\overline{QC}$，$\overline{PB}>\overline{QB}$

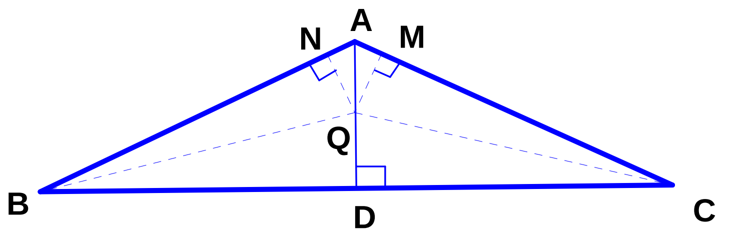
$\Rightarrow \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}$　　故得證

五、　那麼，若有一角大於120°，情形會如何呢？我們假設**此點也在這個大於120°的角的頂點上**，並且先從特殊的情形一等腰三角形著手：

1. 如下圖（五），$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle A>120^0$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，Q 在 $\overline{AD}$ 上，但 Q≠A，

求證：$\overline{AB}+\overline{AC}<\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}$

證明



圖（五）

過 Q 作 $\overline{QM}\perp\overline{AC}$ 於 M，$\overline{QN}\perp\overline{AB}$ 於 N

$\because \angle QAC=\angle QAB=\frac{1}{2}\angle BAC>60^0$

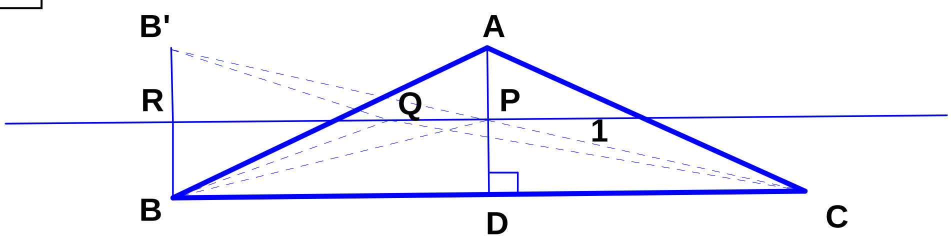
$\therefore \overline{AM}<\frac{1}{2}\overline{AQ}$，$\overline{AN}<\frac{1}{2}\overline{AQ}$，又 $\overline{CQ}>\overline{CM}$，$\overline{BQ}>\overline{BN}$

$\Rightarrow \overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}>\overline{AM}+\overline{AN}+\overline{CM}+\overline{BN}=\overline{AB}+\overline{AC}$ 故得證

2. 如下圖（六）$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle A>120^\circ$ $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，Q 為 ΔABC 內任一點，但 Q 不在 $\overline{AD}$ 上。

求證：$\overline{AB}+\overline{AC}<\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}$

證明



圖（六）

過 Q 作 $L // \overline{BC}$ 交 $\overline{AD}$ 於 P， 連接 $\overline{BP}, \overline{CP}$

由上一個證明可知 $\overline{AB}+\overline{AC}<\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$，

故只要 $\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}>\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$ 即可得證

作 B 關於 L 的對稱點 B'，連接 $\overline{B'P}, \overline{B'Q}, \overline{B'B}$ 交 L 於 R

由上圖（六），易得 $\Delta BPR \cong \Delta B'PR$， $\Delta BRQ \cong \Delta B'RQ(SAS)$

$\Rightarrow \angle B'PQ = \angle BPQ$

又 $\angle BPQ = \angle PBD = \angle PCD = \angle 1$ $\therefore \angle B'PQ = \angle 1$

$\Rightarrow B', P, C$ 三點共線

$\therefore \overline{B'Q}+\overline{CQ}>\overline{B'C}$

即 $\overline{BQ}+\overline{CQ}>\overline{BP}+\overline{CP}$ 又 $\overline{AQ}>\overline{AP}(\overline{AP}\perp\overline{PQ})$

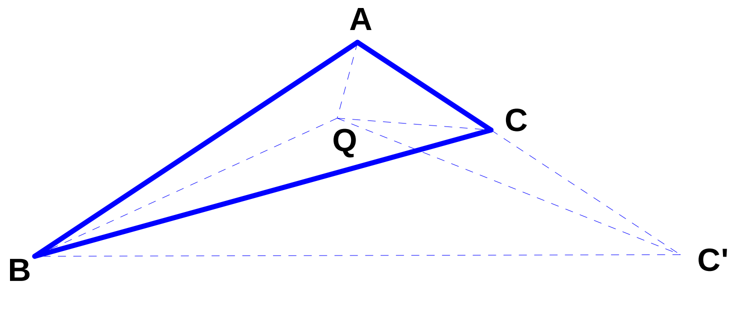
$\therefore \overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{C'Q}>\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$ （得證）

$\therefore \overline{AB}+\overline{AC}<\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}$

六、 由前面的證明可以知道在等腰三角形中這個假設是成立的，現在再試試看是否在任意三角形亦會成立。

如圖（七）ΔABC 中， $\angle A>120^\circ$， Q 為三角形內部一點，但 $Q \neq A$ 試證： $\overline{AB}+\overline{AC}<\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}$

證明



圖（七）

不妨設$\overline{AC} < \overline{AB}$，延長$\overline{AC}$至$C'$使$\overline{AB} = \overline{AC'}$，連接$\overline{C'Q}$

承上$\overline{AB} + \overline{AC'} < \overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{C'Q}$

又$\overline{CC'} > \overline{C'Q} - \overline{CQ} \Rightarrow -\overline{CC'} < -(\overline{C'Q} - \overline{CQ})$

$\therefore \overline{AB} + \overline{AC'} - \overline{CC'} < \overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ'} - \overline{CQ'} + \overline{CQ}$

$\Rightarrow \overline{AB} + \overline{AC} < \overline{AQ} + \overline{BQ} + \overline{CQ}$ 故得證

柒、 研究結果

由以上的證明，可以知道**若三角形的三內角皆小於120°，則這點落在與相鄰兩頂點連線夾角120°的點上，若有一個角等於或大於120°，那麼這一點會在這個角的頂點上**。所以，現在我們可以確定，原來寶藏就藏在瑞豐村裡喔！

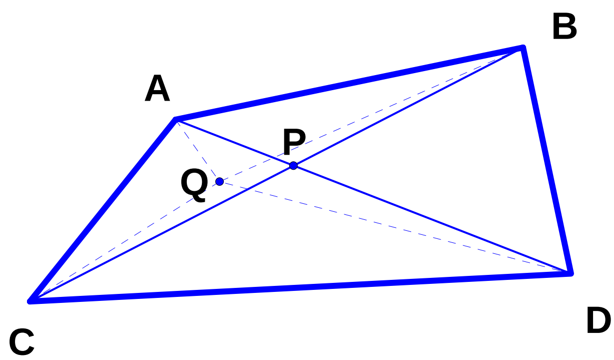
捌、 推廣

一、 四邊形：四邊形的情況很單純，我們由以下的證明可以知道，四邊形對角線的交點 P，即為到各頂點距離和最小的一點。

如下圖（八），四邊形 ABCD 中，P 為對角線的交點，Q 為內部異於 P 的任一點。

求證：$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}<\overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}+\overline{DQ}$

證明



圖（八）

如上圖（八），$\overline{AQ}+\overline{DQ}>\overline{AD}$，$\overline{BQ}+\overline{CQ}>\overline{BC}$，

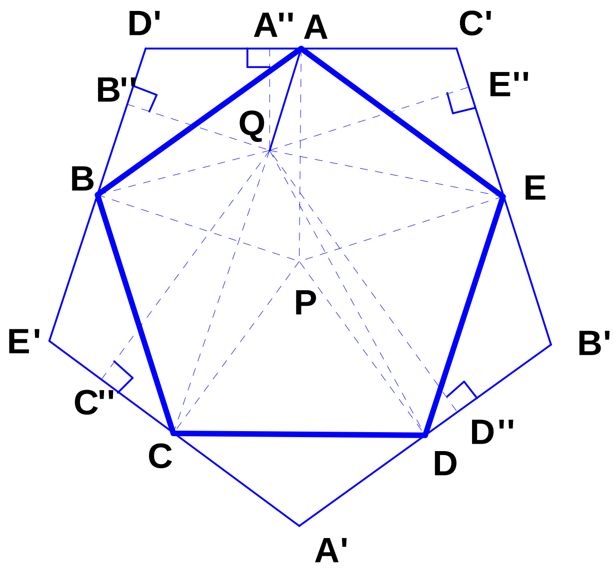
$\Rightarrow \overline{AQ}+\overline{BQ}+\overline{CQ}+\overline{DQ}>\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}$ （得證）

二、 正凸奇數邊形：我們發現在凸奇數邊形中若可以找到一點與相鄰兩頂點連線夾角為 $\dfrac{360}{\text{邊數}}$，則這點即為所求。我們首先從正凸奇數邊形來探討，在討論中，我們選擇五邊形為代表，其他圖形亦可用相同的方法得證。

如下圖（九），ABCDE 為正五邊形，P 為外接圓圓心，Q 為正五邊形內異於 P 的任一點

求證： $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}+\overline{QE}>\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PE}$

證明



圖（九）

如上圖（九），作正五邊形 $A'B'C'D'E'$ 使其包含正五邊形 $ABCDE$，

過 Q 作 $\overline{QA''}\perp\overline{C'D'},\overline{QB''}\perp\overline{D'E'},\overline{QC''}\perp\overline{E'A'},\overline{QD''}\perp\overline{A'B'},\overline{QE''}\perp\overline{B'C'}$

$\because ABCDE$ 為正五邊形

$\therefore \angle APB=\angle BPC=\angle CPD=\angle DPE=\angle EPA=72^{\circ}$

$\overline{PA}\perp\overline{C'D'},\overline{PB}\perp\overline{D'E'},\overline{PC}\perp\overline{E'A'},\overline{PD}\perp\overline{A'B'},\overline{PE}\perp\overline{B'C'}$

則 $A'B'C'D'E'$ 的面積,可分為五個小三角形相加

$\Delta PC'D'+\Delta PD'E'+\Delta PE'A'+\Delta PA'B'+\Delta PB'C'$

$=A'B'C'D'E'$ 的面積

$=\Delta QC'D'+\Delta QD'E'+\Delta QE'A'+\Delta QA'B'+\Delta QB'C'$

$$\therefore \frac{1}{2}\overline{PA}\times\overline{C'D'}+\frac{1}{2}\overline{PB}\times\overline{D'E'}+\frac{1}{2}\overline{PC}\times\overline{E'A'}+\frac{1}{2}\overline{PD}\times\overline{A'B'}+\frac{1}{2}\overline{PE}\times\overline{B'C'}$$

$$=\frac{1}{2}\overline{QA''}\times\overline{C'D'}+\frac{1}{2}\overline{QB''}\times\overline{D'E'}+\frac{1}{2}\overline{QC''}\times\overline{E'A'}+\frac{1}{2}\overline{QD''}\times\overline{A'B'}+\frac{1}{2}\overline{QE''}\times\overline{B'C'}$$

$\because$ 正五邊形的各邊長皆相等

$\therefore \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PE}=\overline{QA''}+\overline{QB''}+\overline{QC''}+\overline{QD''}+\overline{QE''}$

又 $\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}+\overline{QE}>\overline{QA''}+\overline{QB''}+\overline{QC''}+\overline{QD''}+\overline{QE''}$

$\Rightarrow \overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}+\overline{QE}>\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PE}$

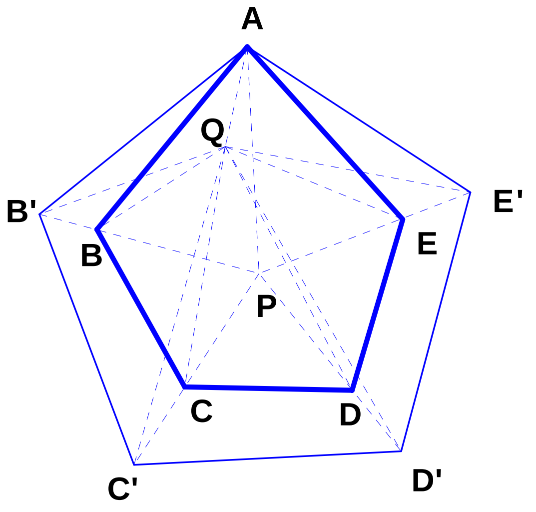
故得證

三、 凸奇數邊形：我們現在知道在正凸奇數邊形裡面，我們的假設是正確的，現在再將其推廣到一般的凸奇數邊形。

如下圖（十），五邊形 $ABCDE$ 中，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD=\angle DPE=\angle EPA=72^\circ$，$Q$ 為五邊形內部異於 P 的任一點

求證：$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PE}<\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}+\overline{QE}$

證明



圖（十）

如上圖（十）作正五邊形 $AB'C'D'E'$，連接 $\overline{QB'},\overline{QC'},\overline{QD'},\overline{QE'}$

則 $\overline{PA}+\overline{PB'}+\overline{PC'}+\overline{PD'}+\overline{PE'}<\overline{QA}+\overline{QB'}+\overline{QC'}+\overline{QD'}+\overline{QE'}$.....(1)

又 $\overline{BB'}>\overline{B'Q}-\overline{BQ}\Rightarrow -\overline{BB'}<-\overline{B'Q}+\overline{BQ}$.....(2)

同理 $-\overline{CC'}<-\overline{C'Q}+\overline{CQ}$.....(3)

$-\overline{DD'}<-\overline{D'Q}+\overline{DQ}$.....(4)

$-\overline{EE'}<-\overline{E'Q}+\overline{EQ}$.....(5)

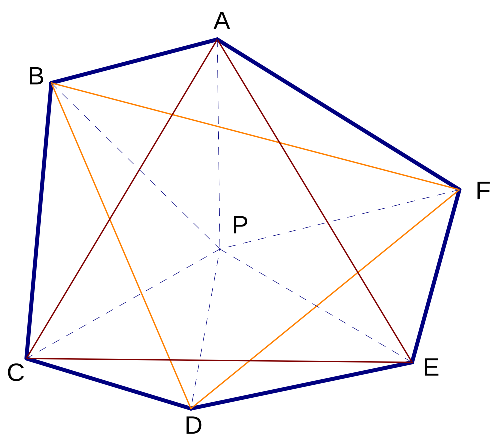
(1)+(2)+(3)+(4)+(5)

$\Rightarrow \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PE}+<\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}+\overline{QE}$

故得證

四、 正凸偶數邊形：我們發現一般的偶數邊形，除了四邊形以外，對角線並不能交於一點，所以不能用面積合併的方式來找出 P 點。但是，我們發現邊數為 3 的倍數的偶數邊形可以以另一種方法來找 P 點。

五、 六邊形：我們想到可以把六邊形視為兩個三角形的疊合，若此兩三角形到相鄰兩頂點夾角為120°的點重合，那麼這一點即為到六邊形頂點距離和最小的點。另外我們從下圖（十一）也可以發現，以P點為中心，固定其中一三角形，而旋轉另一三角形的時候，無論如何，P點與任三連續頂點中兩個不相鄰頂點連線夾角相同，也就是$\angle APC=\angle CPE=\angle EPA=120^{0}$，$\angle BPD=\angle DPF=\angle FPB=120^{0}$。



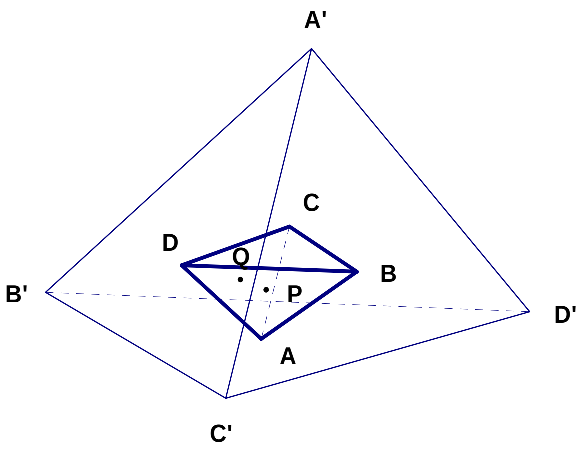
圖（十一）

六、 3m 邊形：而由這一討論，我們再試試更多三角形的疊合，可以知道凡 3m(m 為正整數)邊形都可以由此一方法來尋找

七、　**正四面體**：到目前為止我們一直都在平面上討論，現在我們試著在空間中討論此一問題，首先，我們從最基本的正四面體開始探討。

說明

如下圖（十二），我們可以在正四面體 ABCD 外部再作一個大的正四面體 $A'B'C'D'$，使得 A、B、C、D 分別落在正$\Delta B'C'D'$、正$\Delta A'C'D'$、正$\Delta A'B'D'$、正$\Delta A'B'C'$的重心，而 **P 為正四面體 ABCD 的外接球球心**，Q 則為正四面體 ABCD 內部異於 P 的一點，則正四面體$A'B'C'D'$可以分別以 P 點和 Q 點分割成四個小的四面體，如此，我們再利用體積合併的方法，即可證出 **P 點為四面體內部距離各頂點的距離和最小的一點**。

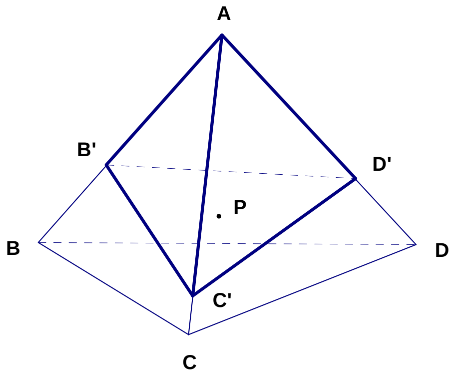


圖（十二）

八、　**四面體**：承上的說明，我們知道 **P 為正四面體的球心，且 P 點到任兩個頂點的連線夾角的餘弦值恰為$\frac{-1}{3}$**，那如果是一般的四面體又該如何找 P 點呢？我們同樣假設四面體內部距離各頂點距離和最小的一點為 P 點，**亦即到任兩個頂點的連線夾角的餘弦值為$\frac{-1}{3}$的點**。

說明

如下圖（十三），在四面體 ABCD 的外部再作一個正四面體$A'B'C'D'$，**P 點為四面體 ABCD 內部到任兩頂點連線夾角餘弦值為$\frac{-1}{3}$的點**，承上面的說明再配合「兩邊和大於第三邊」，我們可以知道 P 點即為所球的點。

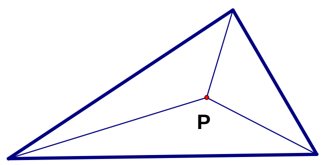


圖（十三）

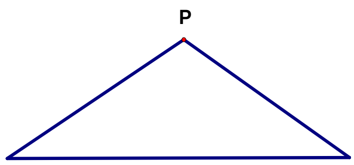
玖、 結論

針對『多邊形及四面體內部，到各頂點距離和最小的點』此一主題，由前面種種討論，可以得出以下的結論：

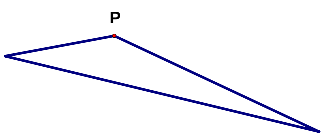
一、 三角形：三角形中，若三內角皆小於120°，那麼這一點落在與相鄰二頂點連線夾角120°的點上如下圖（十四），若有一角等於120°，那麼這一點會在這個角的頂點上如下圖（十五），若有一角大於120°，那麼這一點一樣會在這個角的頂點上如下圖（十六）。



圖（十四）

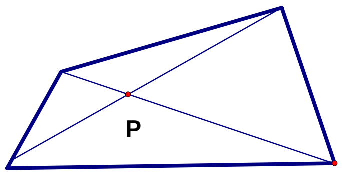


圖（十五）



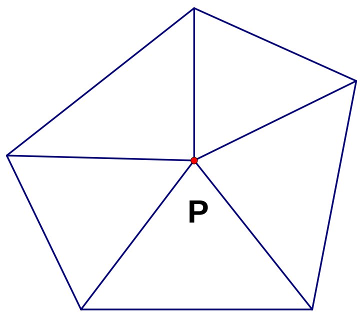
圖（十六）

二、　**四邊形：**四邊形對角線的交點，即為所求的點，如下圖（十七）。



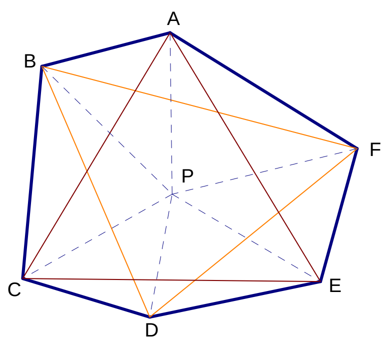
圖（十七）

三、　**凸奇數邊形：**凸奇數邊形中與任意相鄰兩頂點連線夾角為 $\frac{360^{\circ}}{\text{邊數}}$ 的點，即為所求，如下圖（十八）。



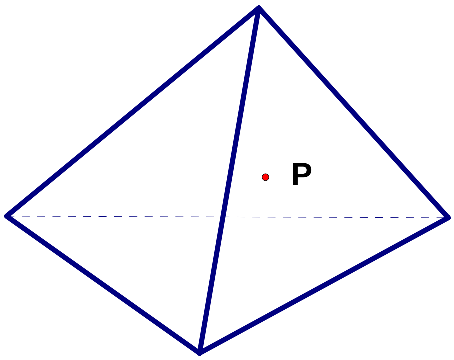
圖（十八）

四、　**六邊形等 3m 邊形：**我們可以把六邊形等 3m 邊形視為 m 個三角形疊合起來，並讓每一個三角形的費馬點重合於同一點 P，如此 P 點即為所求，如下圖（十九）。



圖（十九）

五、 **四面體**：四面體中與任意相鄰兩頂點連線夾角餘弦值為$\frac{-1}{3}$的點，即為所求，如下圖（二十）。



圖（二十）

壹拾、 參考資料

一、任勇(民 82)。理解與應用-三角形內的特殊點。**數學圈雜誌**，38，61-68

二、國中數學第五冊（康軒版） 第一章 三角形的基本性質 P6-P44

三、國中數學第五冊（康軒版） 第二章 平行四邊形 P60-P92

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國中組 數學科

030409

國家寶藏

高雄市立瑞豐國民中學

評語：

用另一觀點討論費馬點的位置，想法不錯，唯文獻探討欠深入。