中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

---

**國中組 數學科**

030408

# 三角形的剪裁

桃園縣立大崙國民中學

作者姓名：
國二 孫碧霙 國二 羅中佑

指導老師：
林志明

# 三角形的裁剪

## 一、研究動機

在某次的宴會上，鄭師傅心血來潮做了一個三角形的蛋糕，但我們卻遇到了困難—要如何切出相等的蛋糕分給每個人呢？這問題引起了我們的興趣。於是我們找了與三角形分割相關的資料，也奠定我們研究下去的決心。

## 二、研究目的：

探討各種三角形的分割情形。

## 三、研究內容：

㈠任意三角形可以分割成多少個相似三角形？

㈡任意三角形可以分割成多少個全等三角形？

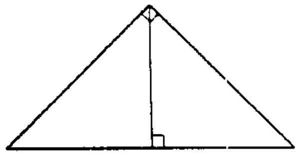
㈢ 1.正三角形可以分割成多少個全等之小正三角形？

2.正三角形可以切割成多少個大小相異之小正三角形？

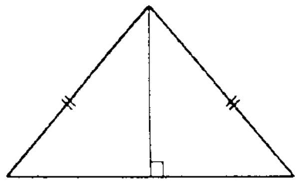
## 四、研究過程

### (一)三角形的相似分割

**討論一**：哪些△可分割成兩個相似的小△。



直角△



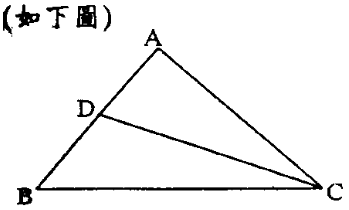
等腰△

**分析**：

1. 根據Rt△母子相似定理，一Rt△可切割成2個與原△相似之小△。
2. 任意等腰△，作頂點之角平分線，可將此等腰△分成兩個全等之△，但與原△不相似。
3. 其他任一△則不可能

理由：設△ABC不爲等腰△和Rt△，且可切割成兩個相似之小△，則新頂點必有一在$\overline{AB}$，$\overline{BC}$或$\overline{AC}$上，一與A，B，C三點中任一點重合。

(如下圖)




$\because \triangle ADC \sim \triangle BCD$，又$\angle ADC$爲$\triangle BCD$之一外角

$\therefore \angle ADC \neq \angle DBC$或$\angle DCB$

$\therefore \angle ADC = \angle BDC \rightarrow \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$

(1) $\angle A = \angle DCB$時則$\angle ACD = \angle B$

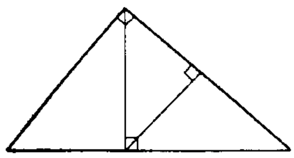
$\angle A + \angle DCB + \angle ACD + \angle B = 2(\angle ACD + DCB) = 2\angle C = 180^\circ$

$\therefore \angle C = 90^\circ \rightarrow \triangle ABC$爲Rt△

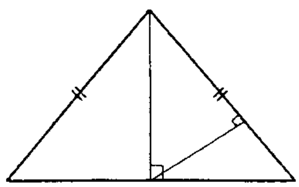
(2) $\angle A = \angle B$時 △ABC爲等腰△

與原題不符

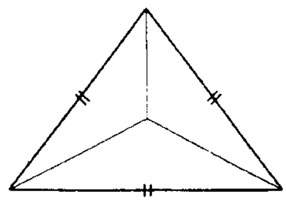
**討論二**：哪些△可分割成三個相似的小△。



直角△



等腰△



正△

**分析**：

(1)根據直角△母子相似定理，一Rt△可以分割成3個與原△相似之Rt△。

(2)任意等腰△，過頂點之角平分線，可將原△分割成兩個全等但與原△不相

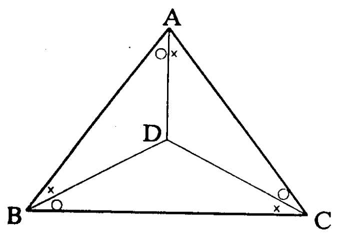
似之直角△，再根據母子相似定理，可將一Rt△再割成二個小Rt△。因此，等腰△可分割成三個相似之小△。

(3)一正△，三頂點與重心之三條連線，即可將此正△分割成三個全等但與原正△不相似之三角形。

(4)其他任一△不可能

理由：設△ABC爲異於上列三種△之△，則切成三個小相似△時，狀況有二：

①三個小△，有一公共頂點在內部，設交點爲D




則∵$\triangle ADB\sim\triangle BDC\sim\triangle CDA$

∴$\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=120°$

又∵△ABC不爲正△

∴$\angle BAD\neq\angle ABD$

且$\angle BAD=\angle DBC=\angle DCA$……(1)

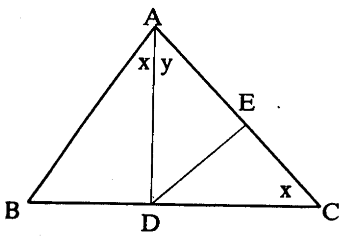
$\angle ABD=\angle DCB=\angle CAD$……(2)

(1)+(2)→$\angle A=\angle B=\angle C$

∴△ABC爲正△

與原題不符

②三個小△沒有公共頂點在內部，則其分割型態必如同下圖：




設$\angle BAD=x°$，$\angle DAC=y°$

則∵△ABC不爲等腰△∴$\angle C\neq\angle B$…①

又∵外角定理　∴$\angle C\neq\angle ADB$…②

∵△CDE與△ADB相似

∴$\angle C=\angle BAD=x°$

→$\angle ADB=\angle C+\angle DAC=x°+y°$

又△ADB與△ADE相似

∴△ADB之其一角必與∠DAE相等

→$\angle B=\angle DAE=y°$

又$\angle ADB+\angle BAD+\angle B=2(x°+y°)=180°$

∴$x°+y°=90°$→∠A爲直角

與原題不符。

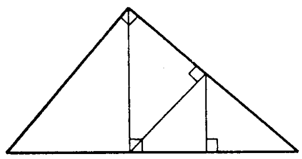
**討論三**：哪些△可以分成四個相似的小△。

**分析**：

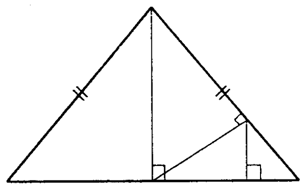
(1)直角△，根據母子相似定理，可以切成四個相似之小△。

(2)等腰△，由頂角作角平分線將其分爲二個小Rt△，再將其一Rt△分成三個Rt△即可。

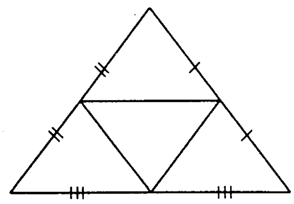
(3)正△，作各邊的中點連線即可分爲四個全等之小正△。



直角△

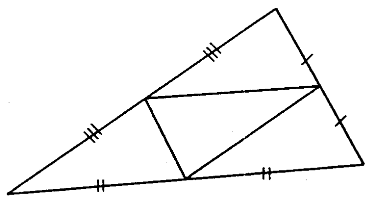


等腰△



正△

(4)任意△，作各邊的中點連線，即可。



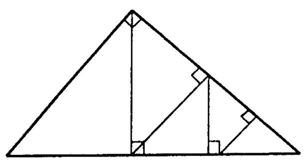
**討論四**：哪些△可以分成五個相似的小△。

**分析**：

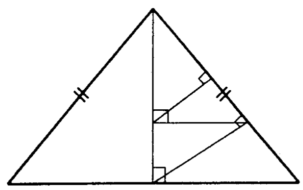
(1)直角△，根據母子相似定理，可以切成五個相似之小△。

(2)等腰△，由頂角作角平分線將其分爲二個小Rt△，再將其一Rt△分成四個Rt△即可。

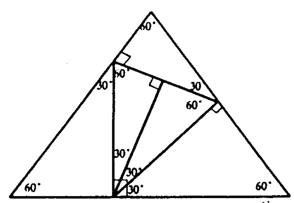
(3)正△，如圖(用30°－60°－90°之△割)



直角△



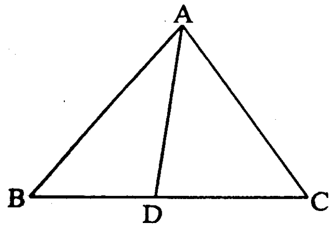
等腰△



正△

(4)任意△，△ABC爲異於上列三種三角形，有下列情況：

①有一條割線(設爲第一條)過△ABC之一頂點(△ABD不可能與△ACD相似)，接著只須再分割△ABD與△ACD




(ⅰ)△ABD分二塊，△ACD分三塊

→由前之結論知所分出之△不可能彼此相似

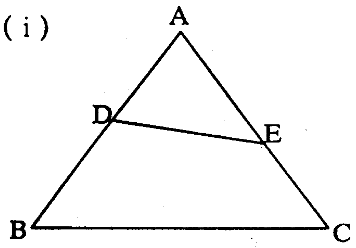
(ⅱ)△ABD不切，△ACD分四塊

則∵△ABD不與△ACD相似

∴此五塊△不可能彼此相似

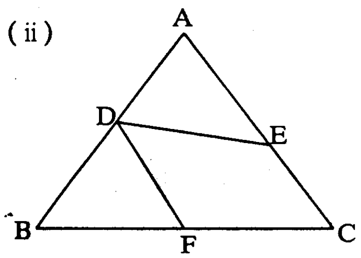
②沒有一條割線過△ABC之一頂點

(ⅰ)




第一條割線(如圖)爲$\overline{DE}$

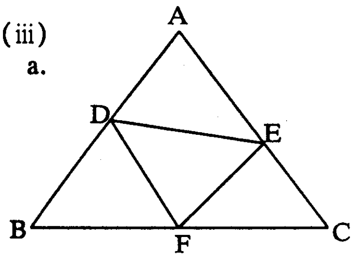
(ⅱ)



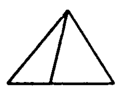

再由D作割線(不是$\overline{CD}$)與$\overline{BC}$交於F

(ⅲ)

a.



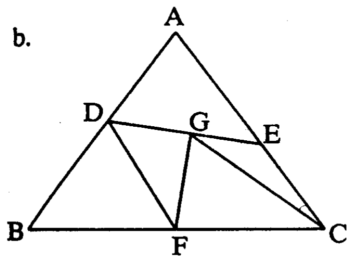

第一種情形：連$\overline{EF}$

∵在切割時，不能有  的三角形

(∵所切出之兩三角形不相似)

∴最後無法再切

b.




連$\overline{FG}$，最後只能連$\overline{CG}$

則∠CGE＋∠ECG＝∠AED

∴△AED與△CEG不相似，故不合！

**討論五**：哪些△可以分成n個相似的小△(在此$n>5$，$n\in N$)。

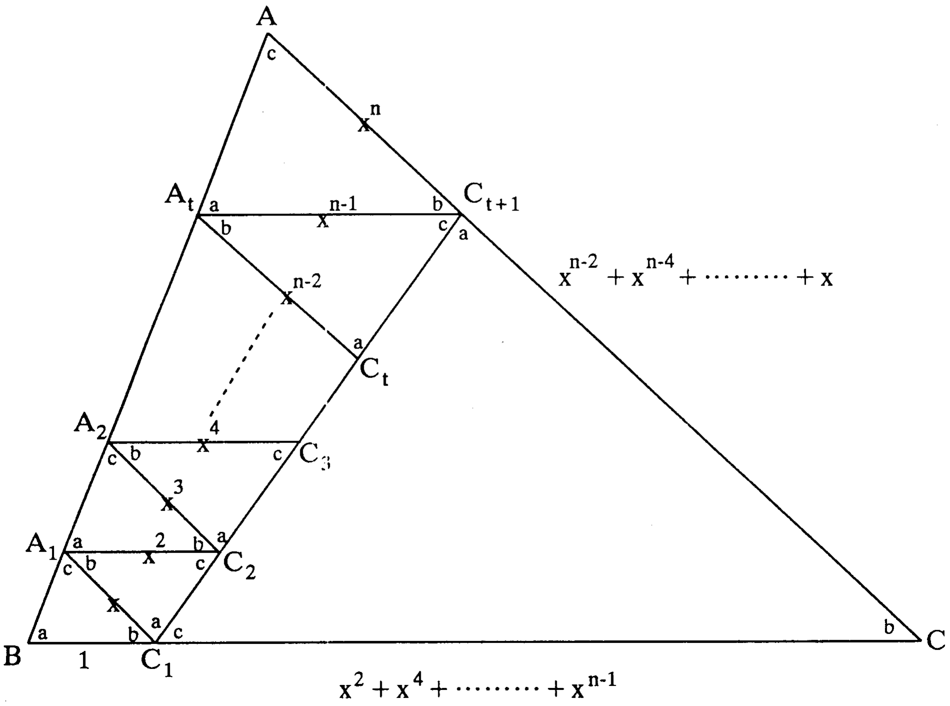
**分析**：

(1)接上題結果，直角△，等腰△，正△皆可援用直角△母子相似定理繼續分割到無窮。

(2)任意△(與上列三種△相異)可分爲偶數個與原△相似之小△，如圖：

n奇數

$t\in N$




$\overline{A_rC_r} \parallel \overline{AC}$，$\overline{A_rC_{r+1}} \parallel \overline{BC}$，　$r\in\{1,2,3\cdots\cdots t\}$

分爲奇數則不行，會碰到分成五個時的問題

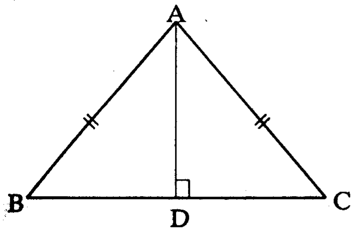
## (二) 三角形的全等分割

**討論**：一三角形可分割成n個全等的小三角形，試確定n所取之值。

**分析**：

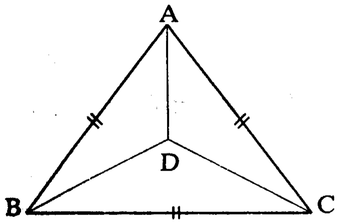
(1)將一△每邊a等分，過每一分點作其他二邊的平行線，可得$a^2$個全等△。因此當n取完全平方數時都可分成n個全等△。

(2)n＝2時，只有等腰△可分割成2個全等的小△。




$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，則△ABD≅△ACD

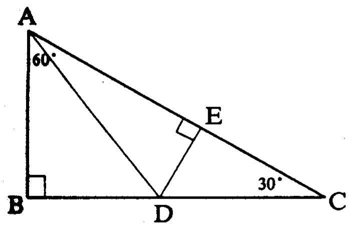
n＝3時，正△及30°－60°－90°的△可分割成3個全等的小△




$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$

D爲重心

則△ABD≅△BCD≅△ACD

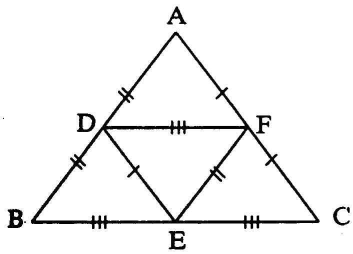



作∠A之角平分線交$\overline{BC}$於D

過D作$\overline{AC}$之垂線交於E

則△ABD≅△AED≅△CED

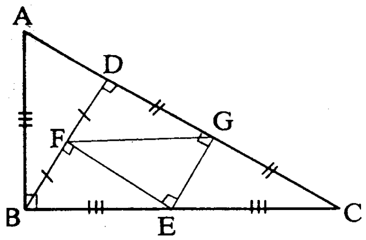
n＝4時，任意△可分割成4個全等的小△




作$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{AC}$三中點之連線

則△ADF≅△DBE≅△FEC≅△EFD

n＝5時，兩股比2：1的直角△可分割成5個全等的小△

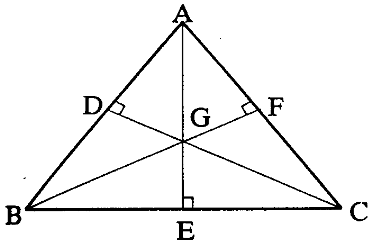



$\overline{BC}=2\overline{AB}$，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$，

E,F,G分別爲$\overline{BC}$，$\overline{BD}$，$\overline{CD}$之中點

則△ABD≅△BEF≅△FGD≅△GFE≅△ECG

n＝6時，正△可分割成6個全等的小△




△ABC爲正△，G爲重心

則△ADG≅△AFG≅△CFG≅△CEG≅△BEG≅△BDG

3)其實只要$n=a^2+b^2$，$n\in N$，~~都有~~直角三角形可分割成n個全等的小△

①作一Rt△兩股長之比爲a：b，則這△斜邊上的高將此Rt△分成兩個相似的Rt△面積比爲$a^2:b^2$。

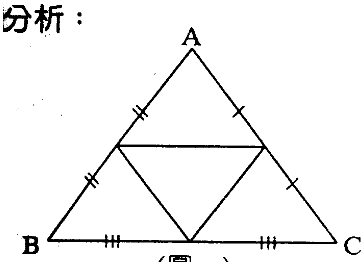
②將兩個小Rt△分別割成$a^2$，$b^2$個全等△，因此原Rt△可以分成$a^2+b^2$個全等△。

③若n可分成形如4t＋1的質數乘積，則n可以分解成$a^2+b^2$的型式。(費馬定理)　　$a^2+b^2\equiv 1 \pmod 4$ 有解

## (三) 三角形的相異分割

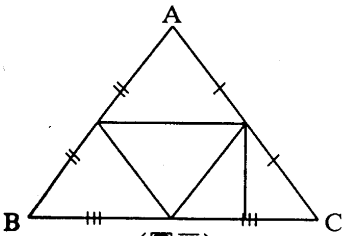
**討論一**：一個正△可分爲幾個小正△？(不限小正△大小)

**分析**：



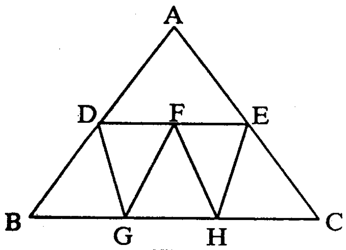
(圖一)

一個正△可以很直接地分成四個小正△(最少)
(圖一△ABC)



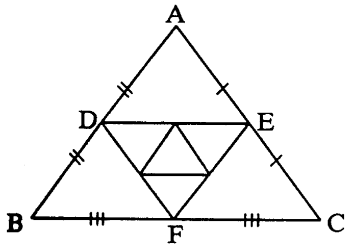
(圖二)

而欲切成五個小正△，須從四個小正△中挑一切成2個，而∵一正△不可以分成2個小正△
∴一正△不可能切成5個小正△
(如圖二)



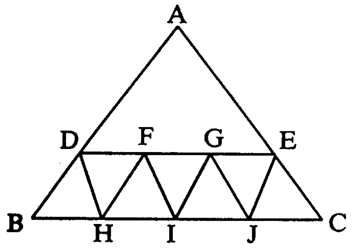
(圖三)

在$\overline{AB}$上取一點D使$\overline{AD}$：$\overline{DB}$＝2：1
在$\overline{AC}$上取一點E使$\overline{AE}$：$\overline{CE}$＝2：1
連$\overline{DE}$，取$\overline{DE}$中點F，取$\overline{BC}$三等分點G，H
連$\overline{DG}$，$\overline{GF}$，$\overline{FH}$，$\overline{HE}$，
則有△ADE，△BDG，△DGF，△GFH，
△FHE，△HEC，六個小正△(如圖三)



(圖四)

如圖四，再作△DEF各邊中點連線，
即有七個小正△



(圖五)

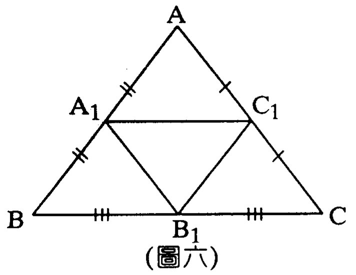
取$\overline{AD}$：$\overline{BD}$＝3：1，$\overline{AE}$：$\overline{CE}$＝3:1
F，G爲$\overline{DE}$三等分點
H，I，J爲$\overline{BC}$四等分點
如圖五，即有八個小正△
∵任一個正△可分成四個小正△，根據圖三、

四、五和遞迴定義知一大正△，只要小正△個數＞8，都可依此類推分割之。

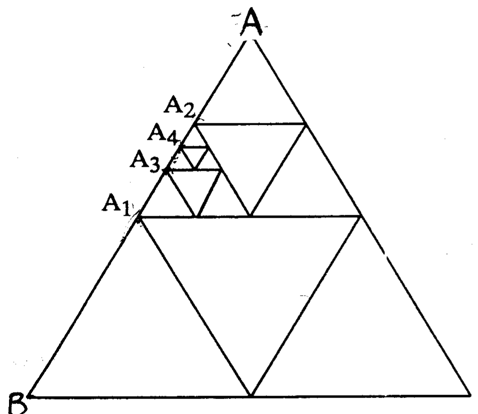
∴一正△不可分割成2、3、5個小正△

**討論二**：一個大正△可否以小正△完全分割之？(先不考慮小正△大小)

**分析**：答案是肯定的。可以。如圖六，只需作各邊中點連線即可。




(圖六)




(圖七)

如果在圖六中，$\overline{AA_1}$上取中點$A_2$作正△，在$\overline{A_1A_2}$上取中點$A_3$作正△，在$\overline{A_2A_3}$上取中點$A_4$作正△，如此一直無限畫下去。則

$$\overline{BA_n}=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\cdots\cdots\quad n\to\infty$$

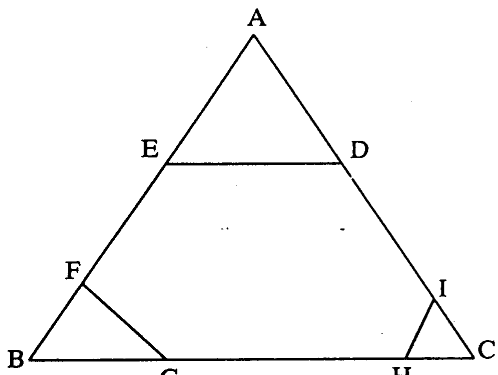
$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\to\frac{2}{3}\ \text{收斂}$$

其中令正△的邊長為2

∴如果不限定小正△大小，大正△可以a個小正△分割之。(a≠2，3，5)

**討論三**：一個大正△可否以大小皆異的小正△分割之？

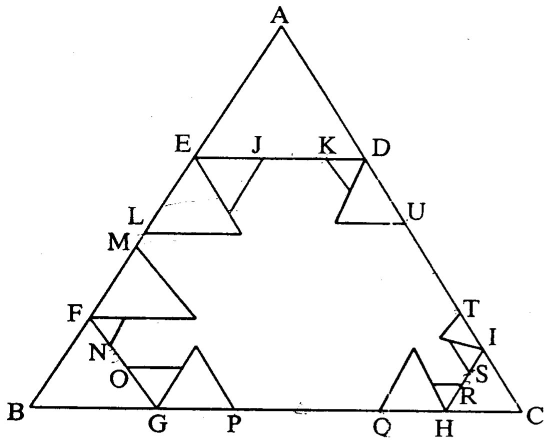
**分析**：步驟一




(圖八)

如圖三，若正△ABC可以大小皆異之小正△分割之，則必有三小正△與頂點A，B，C嵌合。(如圖八△ADE，△BFG，△CHI)

步驟二：在△ABC中會剩餘一六邊形D E F G H I再以不同大小之正△將六邊形的六個120° 內角補滿(如圖九)，則最差的情況下，六邊形六邊會剩下$\overline{JK}$，$\overline{LM}$，$\overline{NO}$，$\overline{PQ}$，$\overline{RS}$，$\overline{TU}$六線段(最好情況是指六邊形邊長已以不同大小之正△拼成，中間無線段剩餘，只有『點』)再將此六線段用正△去拼直到最好情況爲止。



(圖九)

先作到這裡，我們先討論完全分割時的情形，設完全分割後所使用之小正△邊長分別爲$a_1$，$a_2$，$a_3$……$a_n$，大正△邊長爲$\ell$，
則必滿足：

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots\cdots a_n^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$$

$$\therefore\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots\cdots + a_n^2 = \ell^2 \rightarrow (1)$$

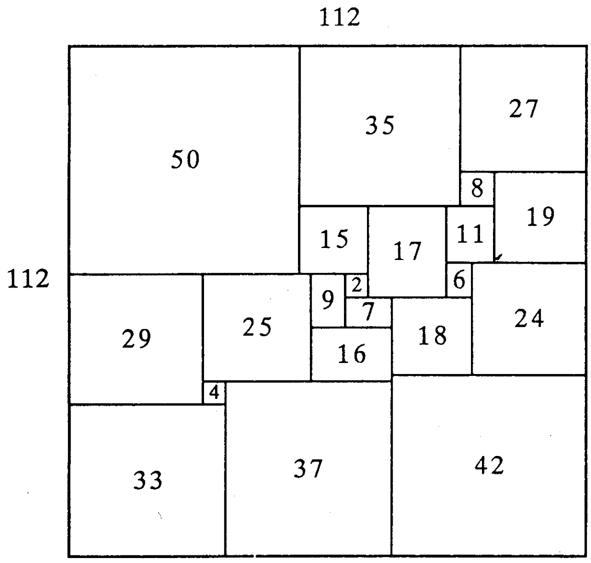
由(1)式，我們先以邊長$a_1$，$a_2$，……$a_n$之正方形看看是否能排成一完全正方形，邊長爲$\ell$。

在數學上這個大正方形稱之爲完全正方形，要作出一個完全正方形可不是一件容易的事。

- 1930年蘇俄數學家魯金認爲這種完全正方形不存在。
- 1939年sprague造出第一個完全正方形，它是由55個小正方形組成，邊長爲4205單位。
- 1939年英國劍橋大學四個學生Brooks, Smith, Stone, Tutteru. 就曾經沈迷於此問題，花了一段很長的時間，最後在理論的指導下，找出了由28個小正方形組成的完全正方形，邊長爲1015單位。
- 1948年Wilvocks造出一個由24個小正方形組成的完全正方形，邊長爲175單位。至目前爲止已經出爐2000多個24階完全正方形。
- 1967年Wilvocks造出一個由25個及26個小正方形組成的完全正方形。

・1976年荷蘭的數學家Duijvestijn更在電子計算機的幫助下，又發現了一個由21個小正方形組成的完全正方形，邊長爲112單位。並且證明，它是由最少數目的小正方形組成的完全正方形。

由資料記載知一完全正方形目前最少以21個正方形分割(見附圖)，最多以55個正方形分割。




(附圖)

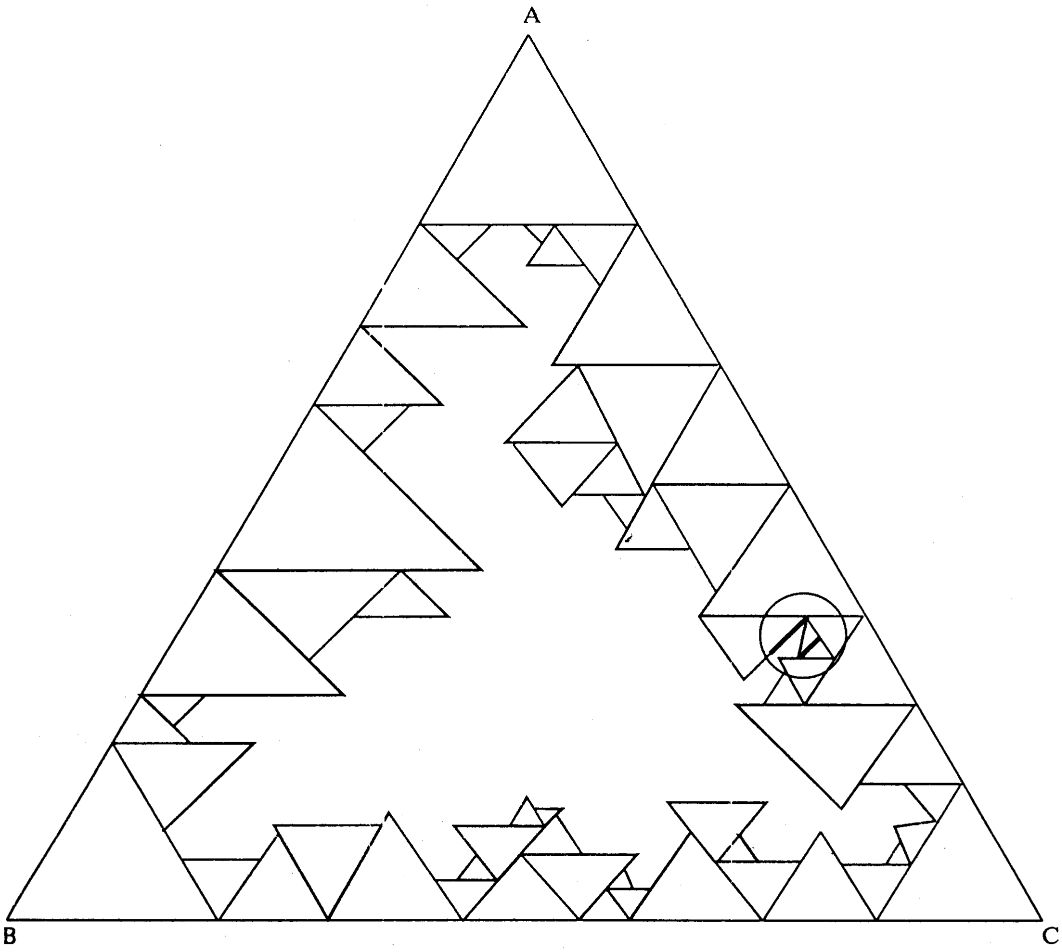
而由步驟二知將六邊形D E F G H I邊長補滿後，中間必定還有夾角120°線段，所以可再繼續切割至最佳狀況。

此時所用之正△個數爲：

**3+12+36+…………=∞此級數發散且必大於55(請參考圖九)**

(而實際上，計算的理論結果以實際方式來排也不符)

∴先推測不可能



(圖十)

如圖十中(圈起來的部分)，補到最後存在一平行四邊形，而此平行四邊形再經切割即有二相等之正△。

∴不可能有完全正△

→一個大正△不可以大小皆異的小正△分割之。

## 五、結論：

1.三角形的相似分割：

(1) Rt△，任意等腰△可割成2個相似的小△。

(2) Rt△，任意等腰△，正△可割成3個相似的小△

(3) 任意△皆可割成4個相似的小△。

(4) Rt△，任意等腰△，正△皆可割成5個相似的小△。

(5) Rt△，任意等腰△，正△皆可割成n個相似小△($n>5$，$n\in N$)。

2.三角形的全等切割：(割成n個)

(1) $n=2$時，只有等腰△可分割成2個全等小△。

(2) $n=3$時，正△及30°－60°－90°的△可分割成3個全等的小△。

(3) $n=4$時，任意△可分割成4個全等小△。

(4) $n=5$時，兩股比2：1的Rt△可分割成5個全等小△。

(5) $n=6$時，正△可分割成6個全等小△。

(6) $n=a^2+b^2$，$n\in N$，Rt△兩股比a:b可分割成n個全等小△。

3.三角形的相異分割：

(1)一正△不可以分成二、三、五個小正△。

(2)一正△可以a個小正△完全分割之(此時小正△不限大小，$a\neq 2，3，5$)。

(3)一正△不可以用大小相異之正△完全分割之。即沒有完全正三角形存在。

## 六、參考文獻：

(1)國民中學選修數學第五冊，國立編譯館。

(2)數學思考，九章出版社。

(3)生活中的中學數學，九章出版社。

(4)數學的魅力，凡異出版社。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

## 國中組 數學科

030408

三角形的剪裁

桃園縣立大崙國民中學

評語：

對分割成全等的小三角形作了完整分析，唯未能對正三角形的分割作較深入的探討。