中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

佳作

030407
層出不窮？！

桃園縣立內壢國民中學

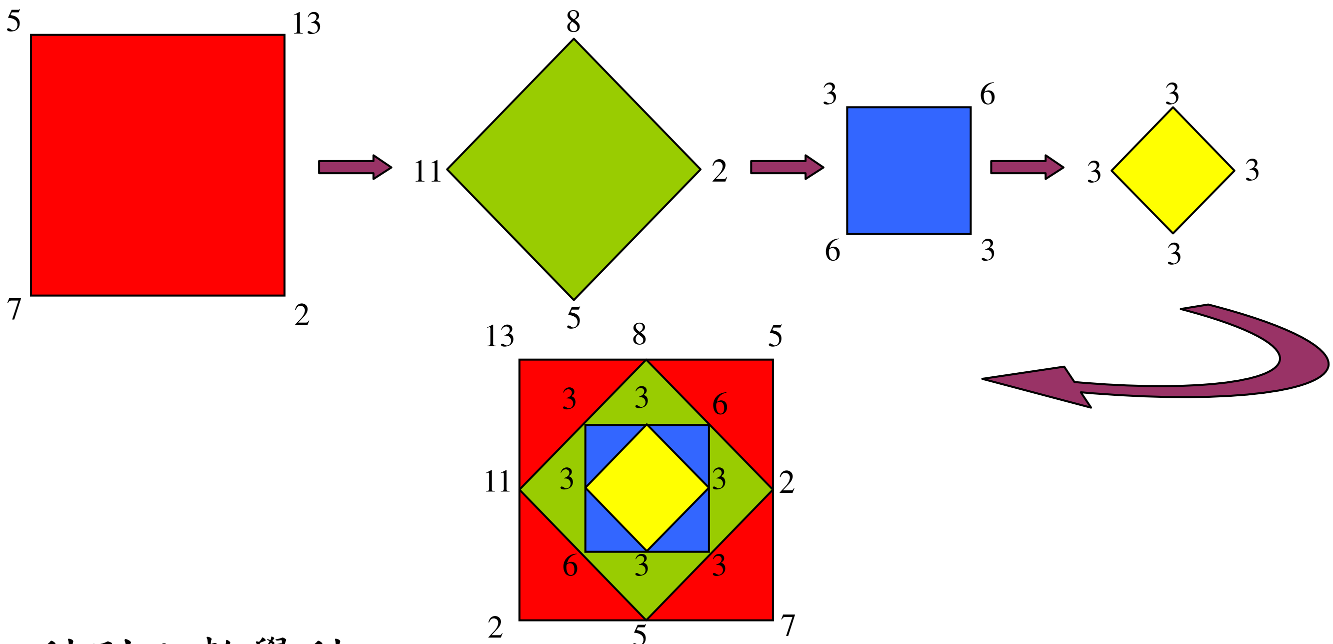
作者姓名：
國一 武良翰 國一 郭梵均 國一 黃亭捷
國一 袁盛博

指導老師：
陳世恩 蔡秀芬

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書

層出不窮？！



科別：數學科

組別：國中組

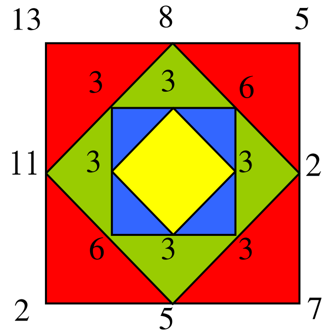
關鍵字：數字方塊、絕對值、最多幾層？

編號：

目錄

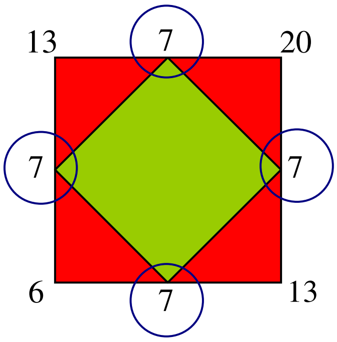
壹、摘要

『美麗的幾何圖形，與數字的運算，這之間居然有著奇妙的關係！你相信嗎？』93 年 9 月的科學研習期刊中的這句話吸引了我們的注意。只要在一個正方形的四個頂點處各寫下一個正整數，如 1、2、3、4、……然後算出相鄰兩角數字的差，寫在四條邊線的中點，再以四個中點畫一個新的正方形，繼續重複這個程序，最後一定會出現一個四個角數字都相同的正方形，如下圖。

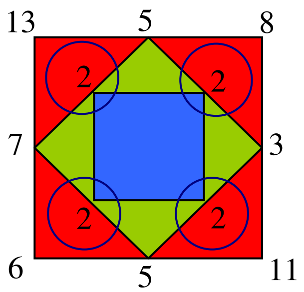


貳、研究動機

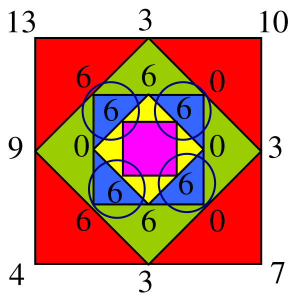
我們每個人各自試了幾組，發現任意給四個正整數，最後都會出現一層四個數字均相同的正方形，但是我們也同時發現這些數字方塊結束的層數有二層、三層、四層，甚至更多層，而且最後一層的數字也不會每一組都一樣，如下圖。我們覺得這個現象很有趣，裡面一定暗藏著某種性質與規則，而且我們很想知道如何設計一個可以推出很多層的數字方塊，所以我們決定要破解這個數字方塊的秘密。此外我們發現這些數字方塊與目前所學的數形關係有關聯性，於是我們請教老師以數形關係來研究的可行性，老師給了我們幾個方向並提示以奇偶關係及絕對值的性質來解決問題。



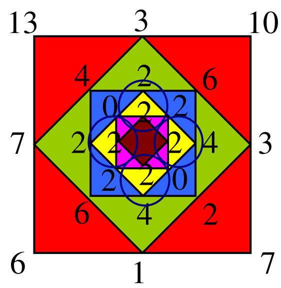
二層



三層



五層



六層

參、研究目的

一、 由內往外推的原則
二、 最後第二層的規則
三、 第一層四個數字有相同數字的情形
四、 第一層四個數字都不同的特殊數列情形
五、 任意四個正整數的所有情形

肆、研究設備與器材

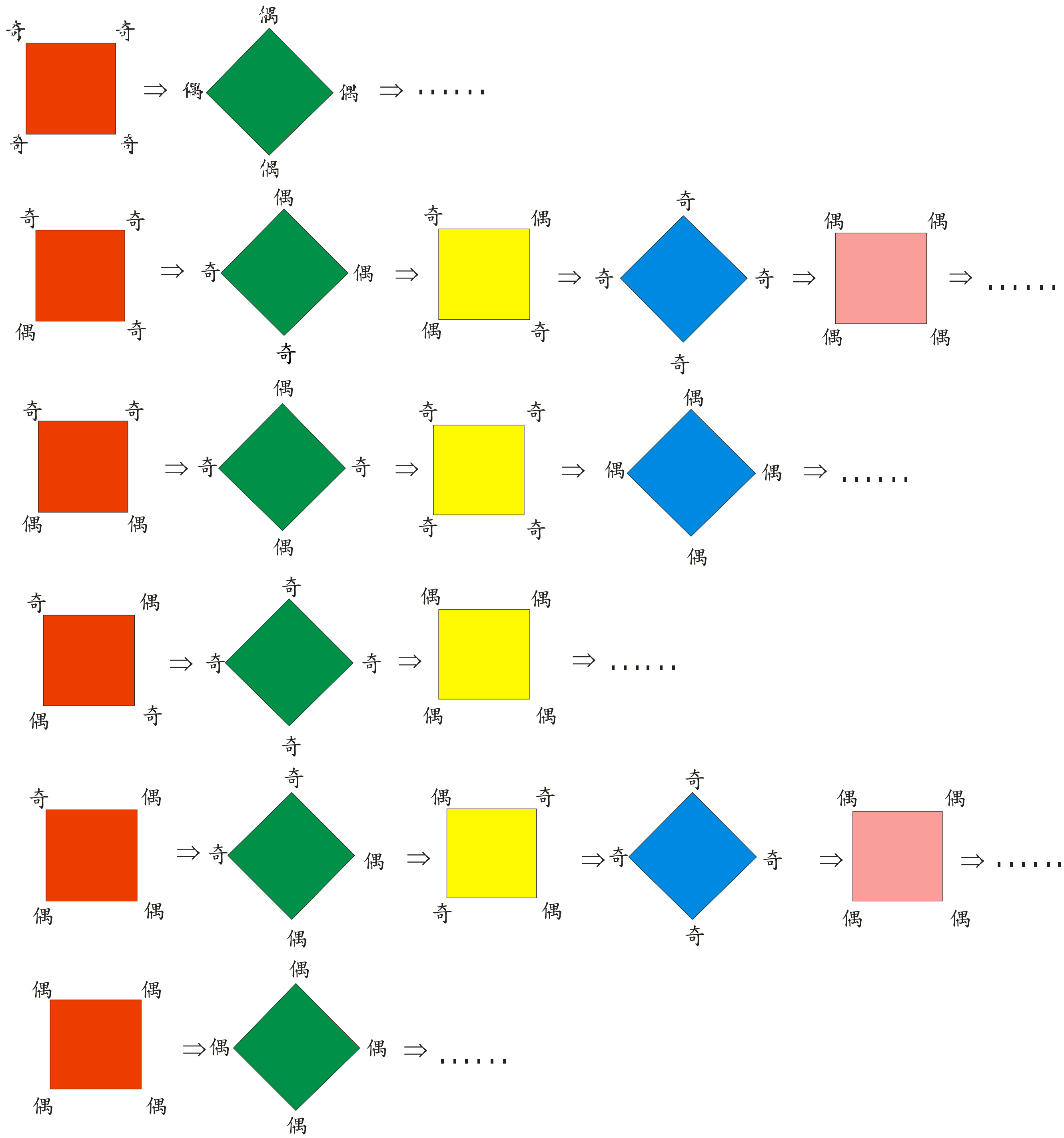
紙、筆、亂數表、Excel 軟體

伍、研究過程與方法

一、由內往外推的原則

首先，我們研究如果想造一個有很多層的數字方塊，應該要依據什麼原則？

（一）討論第一層四個數字的奇、偶關係，會有下列六種排列：



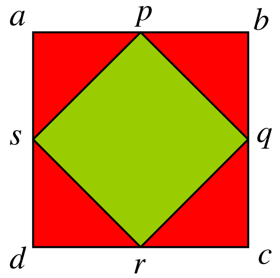
觀察上面我們發現數字方塊的奇偶關係必須遵循下列順序：

奇偶偶偶或奇奇奇偶⇒奇奇偶偶⇒偶奇偶奇⇒奇奇奇奇⇒偶偶偶偶⇒偶偶偶偶⇒●●●●

也就是說如果我們想做一個多層的數字方塊可以依循上面的規則由內往外推。

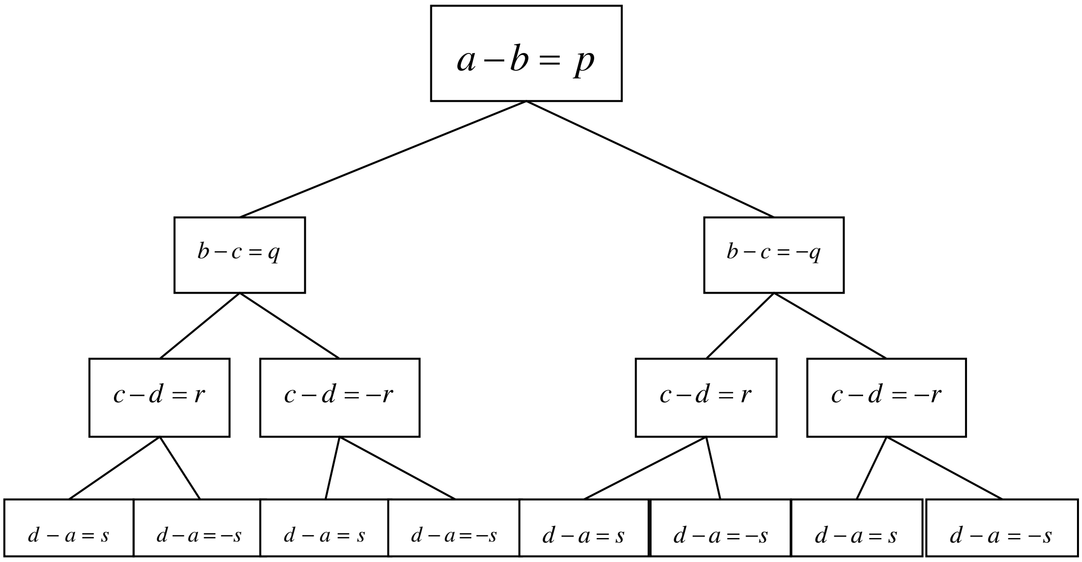
（二）連續兩層間的數字關係：

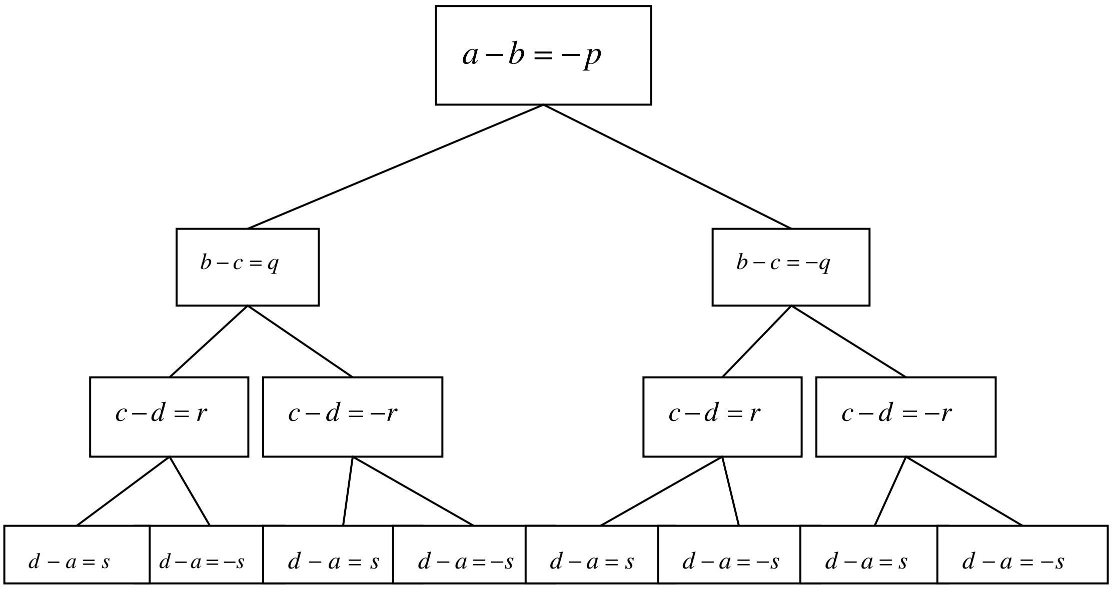
假設外層四個正整數為 a、b、c、d，下一層四個數為 p、q、r、s（此四數不同時為 0），如圖，則



根據運算規則會滿足 $|a-b|=p$、$|b-c|=q$、$|c-d|=r$ 且 $|d-a|=s$

上面四個絕對值，會發生 16 種可能，如下表。





這 16 種會因為四數不同時為 0，而只有 14 種滿足題意，如下表。

$$\begin{array}{r} a-b=p \\ b-c=q \\ c-d=r \\ +)\ \underline{d-a=s} \\ p+q+r+s=0(*) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=p \\ b-c=q \\ c-d=r \\ +)\ \underline{d-a=-s} \\ s=p+q+r \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=p \\ b-c=q \\ c-d=-r \\ +)\ \underline{d-a=s} \\ r=p+q+s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=p \\ b-c=q \\ c-d=-r \\ +)\ \underline{d-a=-s} \\ p-r=q-s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=p \\ b-c=-q \\ c-d=r \\ +)\ \underline{d-a=s} \\ q=p+r+s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=p \\ b-c=-q \\ c-d=r \\ +)\ \underline{d-a=-s} \\ p+r=q+s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=p \\ b-c=-q \\ c-d=-r \\ +)\ \underline{d-a=s} \\ p-r=q-s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=p \\ b-c=-q \\ c-d=-r \\ +)\ \underline{d-a=-s} \\ p=q+r+s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=-p \\ b-c=q \\ c-d=r \\ +)\ \underline{d-a=s} \\ p=q+r+s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=-p \\ b-c=q \\ c-d=r \\ +)\ \underline{d-a=-s} \\ p-r=q-s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=-p \\ b-c=q \\ c-d=-r \\ +)\ \underline{d-a=s} \\ p+r=q+s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=-p \\ b-c=q \\ c-d=-r \\ +)\ \underline{d-a=-s} \\ q=p+r+s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=-p \\ b-c=-q \\ c-d=r \\ +)\ \underline{d-a=s} \\ p-r=s-q \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=-p \\ b-c=-q \\ c-d=r \\ +)\ \underline{d-a=-s} \\ r=p+q+s \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=-p \\ b-c=-q \\ c-d=-r \\ +)\ \underline{d-a=s} \\ s=p+q+r \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b=-p \\ b-c=-q \\ c-d=-r \\ +)\ \underline{d-a=-s} \\ p+q+r+s=0(*) \end{array}$$

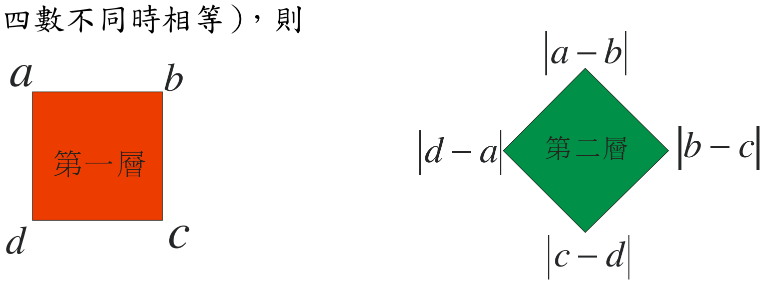
我們歸納這 14 種得到一個結論為數字方塊除了第一層之外，每一層的四個數字都會滿足下列其中一個或二個條件：

1. 最大數為其他三數的和
2. 對角線和相等
3. 對角線差相等

換句話說，如果往外擴展的數字方塊滿足上面其中一個條件就可以再往外擴，直到無法滿足為止。

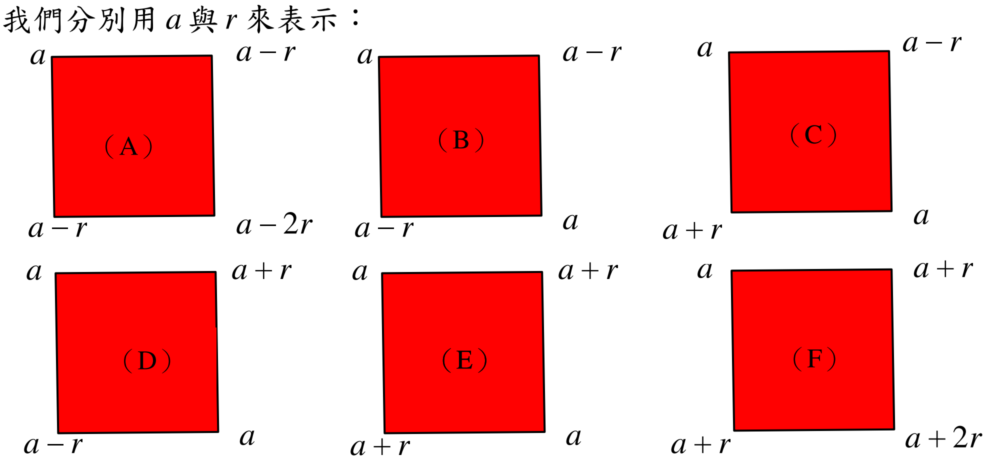
二、最後第二層的規則

我們現在要往外擴展數字方塊，先從只有二層的數字方塊開始，假設第一層四個正整數為 a、b、c、d（此四數不同時相等），則



因為假設此數字方塊只有二層，所以 $|a-b|=|b-c|=|c-d|=|d-a|=r \quad (r>0)$

根據上式，會發生 16 種可能（如附件一）。這 16 種會因為 $r>0$，而只剩下 6 種滿足題意。我們分別用 a 與 r 來表示：

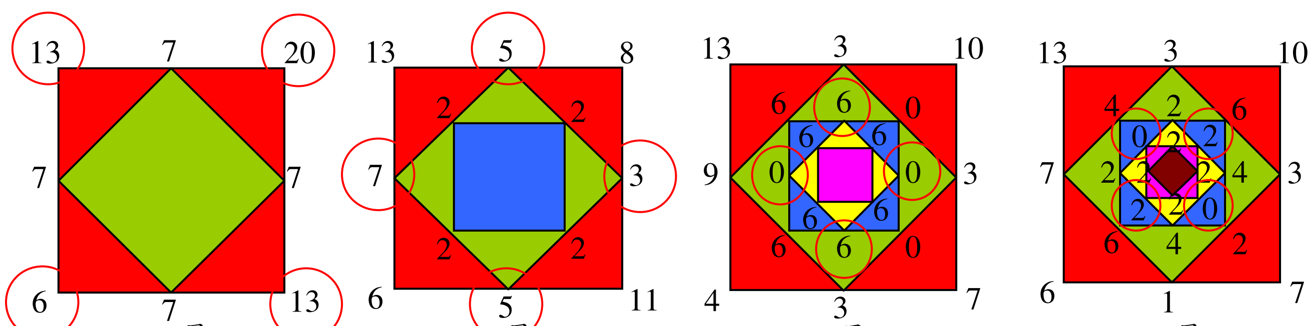


發現

A、C、D、F 屬於同一類 $\Rightarrow$ 一組對角線相同且兩組對角線和必須相等。

B、E 屬於同一類 $\Rightarrow$ 兩組對角線相同。

我們將得到的結論去觀察之前畫的數字方塊，發現三層以上的數字方塊在倒數第二層也會滿足上述的規則。

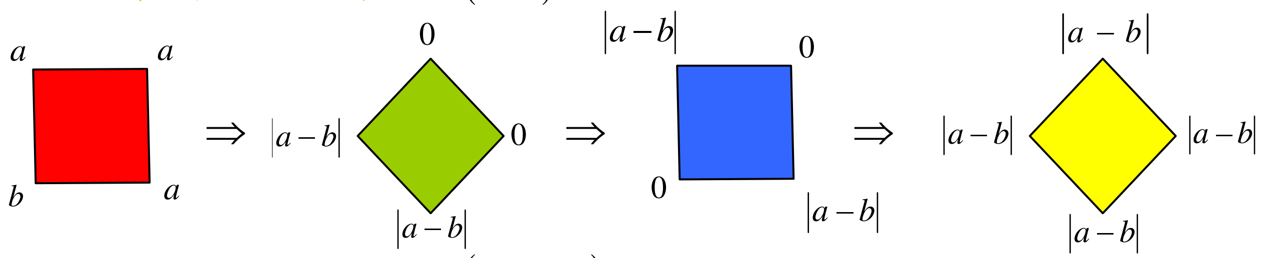


二層 三層 五層 六層

三、第一層四個數字有相同數字的情形

再來，我們如果要仿效前一個方法研究三層的數字方塊會有很多種可能，所以我們換個方向來研究，從第一層四個數字中出現相同數字的種類，共有 2 種，如下：

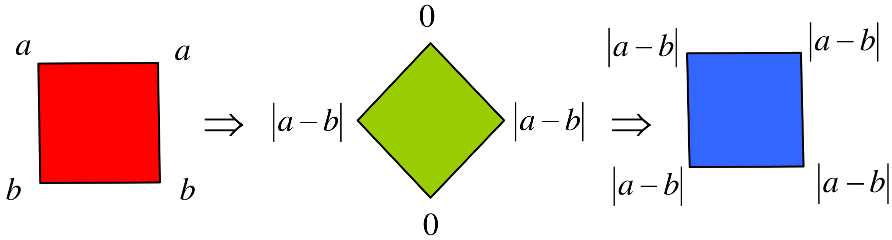
第一種：三個數字相同 $(a \neq b)$



（四層）

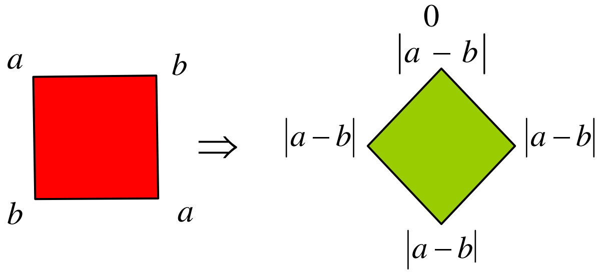
第二種：兩個數字相同 $(a \neq b \neq c)$

型一



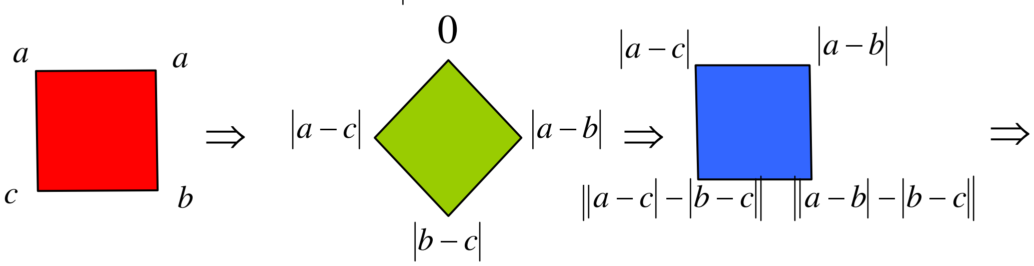
（三層）

型二



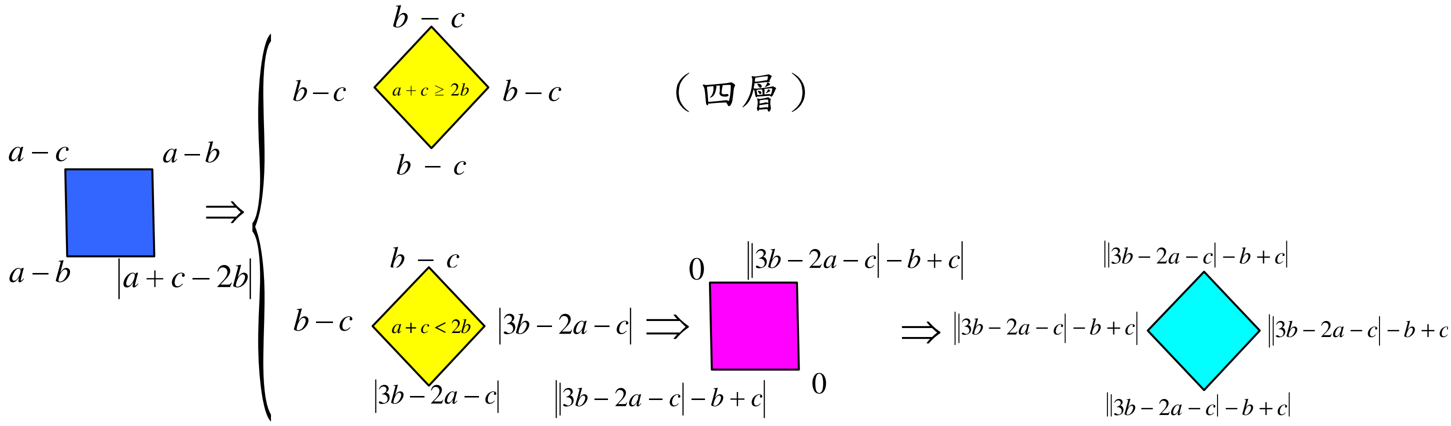
（二層）

型三



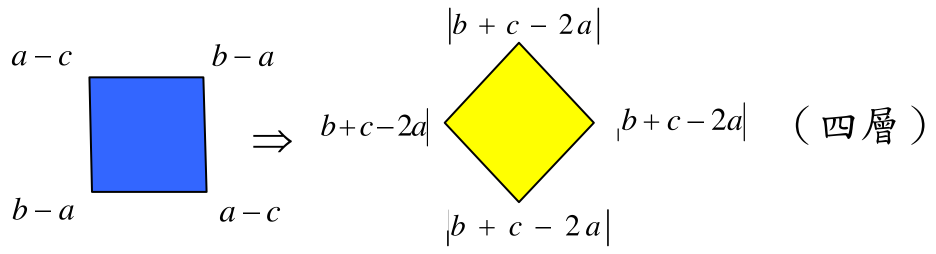
因為$|a-c|-|b-c|$與$|a-b|-|b-c|$的值有可能為正數、0 或負數，所以需要討論可能：(因為方塊四個數字可以旋轉和翻轉，所以b 、c的大小不會影響結論，為了方便討論，在此假設$b>c$）

如果a最大，此方塊可寫成如下

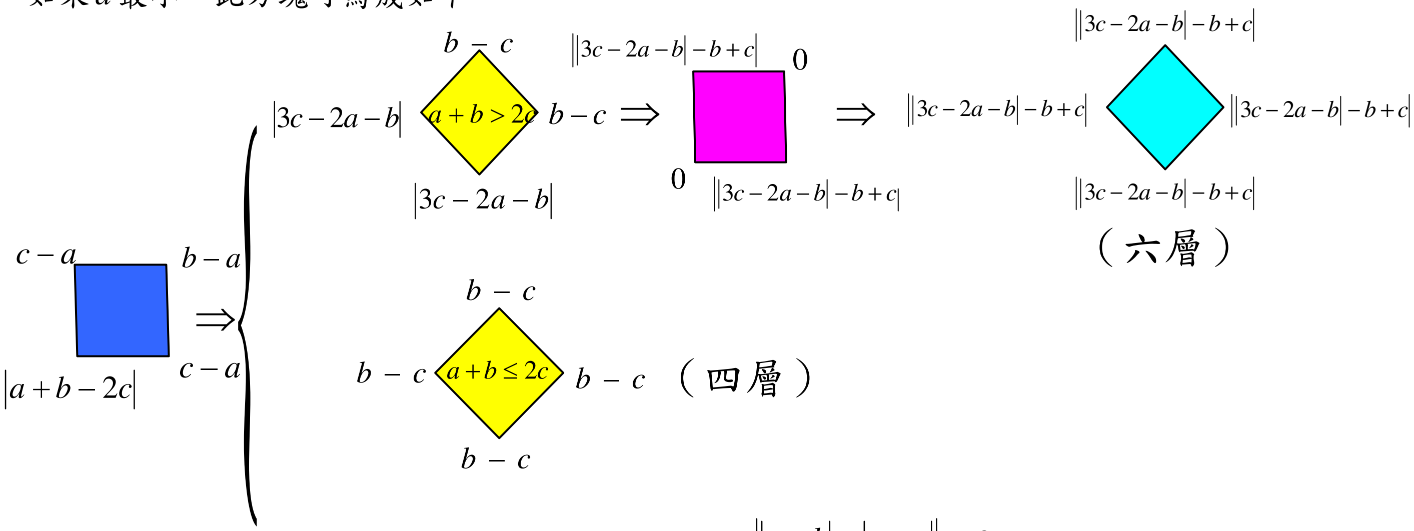


（六層）

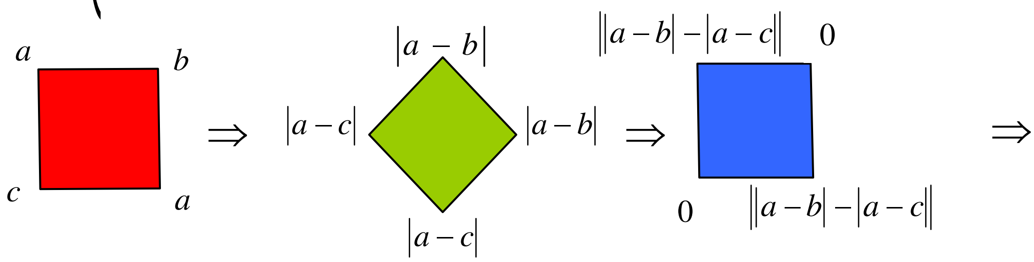
如果a介於b、c之間，此方塊可寫成如下



如果a最小，此方塊可寫成如下

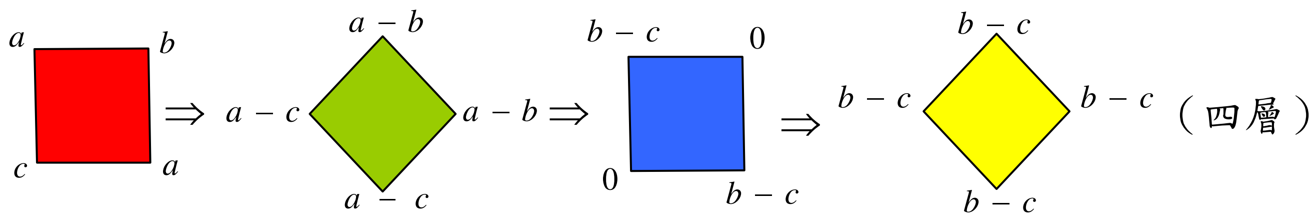


型四

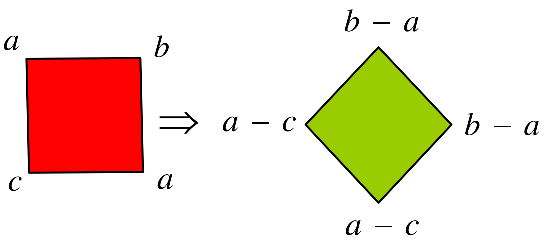


因為$|a-b|$和$|a-c|$的值不確定大小，所以需要討論可能：(因為方塊四個數字可以旋轉和翻轉，所以b、c的大小不會影響結論，為了方便討論，在此假設$b>c$)

如果a最大，此方塊可寫成如下

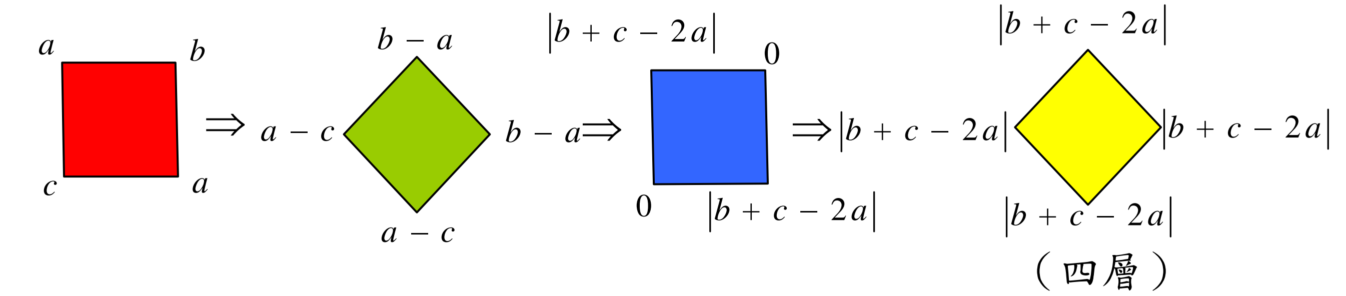


如果a介於b、c之間，此方塊可寫成如下

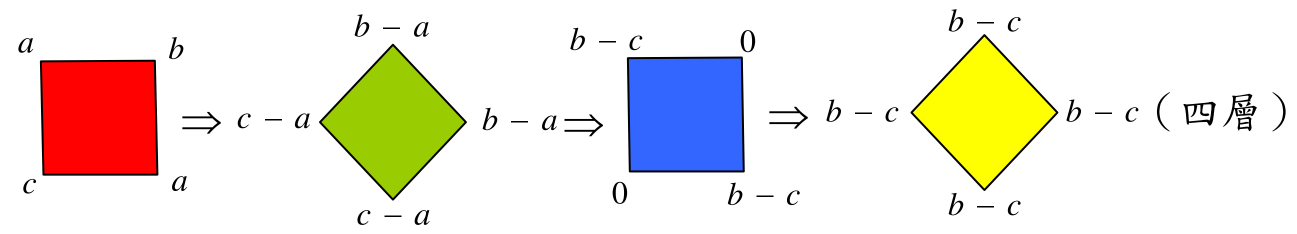


（如果 a-c=b-a，二層）

上面的方塊運算，如果$a-c=b-a$，層數就是二層，如果$a-c\neq b-a$，此方塊可繼續寫成如下：



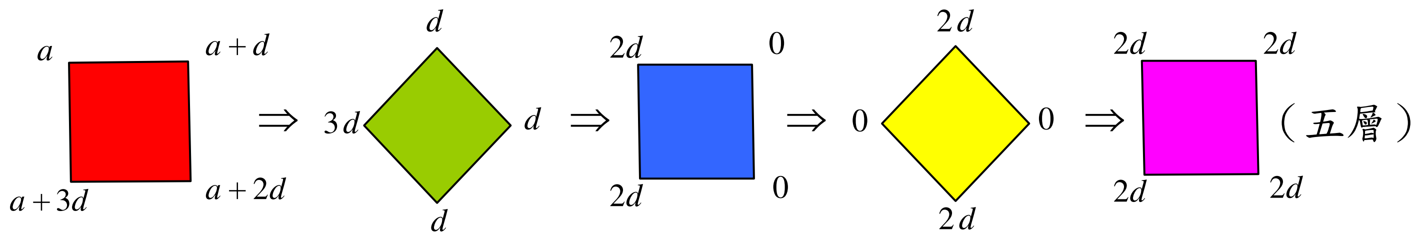
如果a最小，此方塊可寫成如下



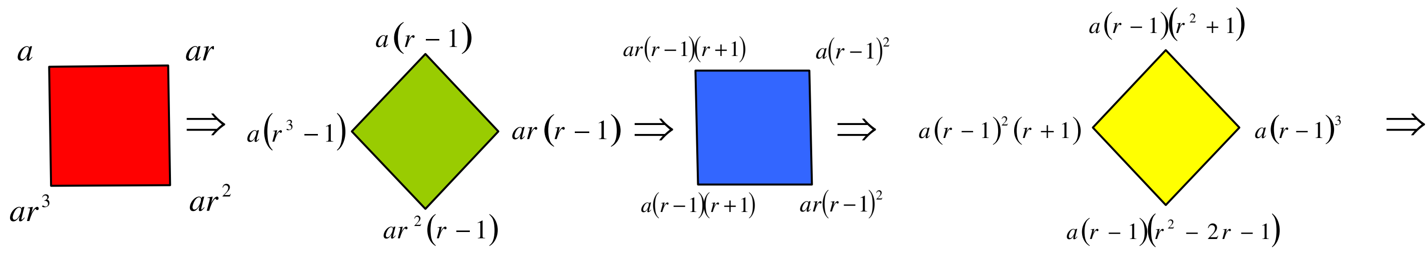
四、第一層四個數字都不同的特殊數列情形

在此我們討論四個數成等差數列和等比數列的情形：

（一）等差數列：假設此四數為a、$a+d$、$a+2d$、$a+3d$，並依順時針排列，則運算過程如下：



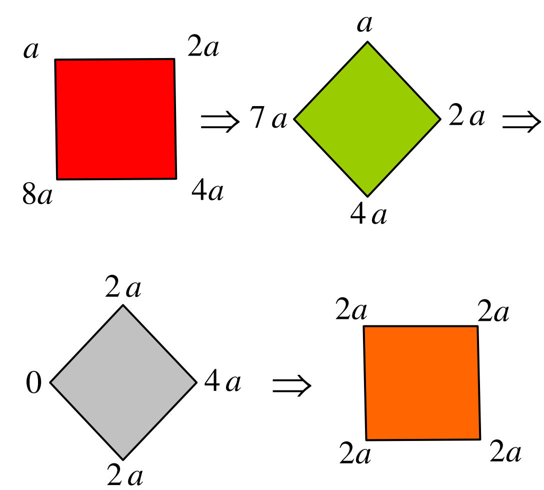
（二）等比數列：假設此四數為a、ar、ar^2、ar^3，並依順時針排列，則運算過程如下：



因為當$r=2$時，$r^2-2r-1=-1<0$

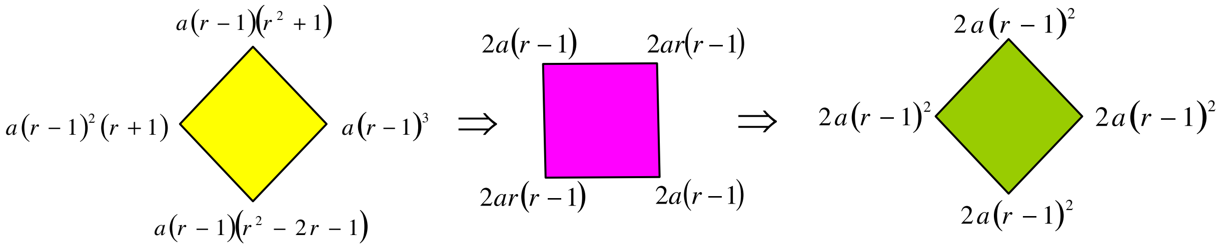
當$r>2$時，$r^2-2r-1>0$

所以當$r=2$時，此四數可以改寫成a、$2a$、$4a$、$8a$，則運算過程如下：



（七層）

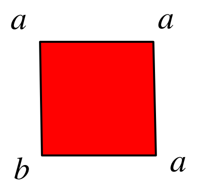
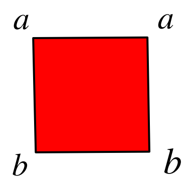
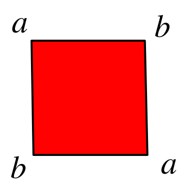
當 $r>2$ 時，則運算過程如下：

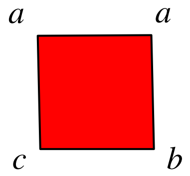
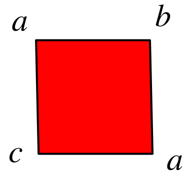
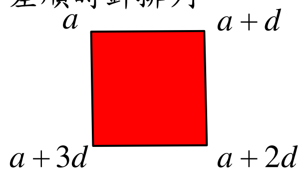
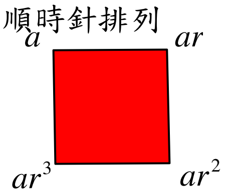


（六層）

陸、研究結果

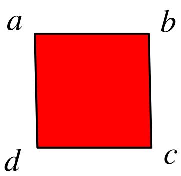
我們將上面的過程歸納出結果，整理如下表：(表一)

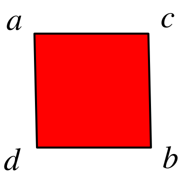
型式	層數	最後一層的數字
	四層	$\|a-b\|$
	三層	$\|a-b\|$
	二層	$\|a-b\|$

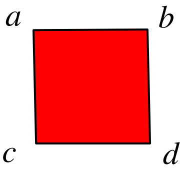
	如果 a 最大，且 $\begin{cases} a+c\ge 2b \Rightarrow 四層 \\ a+c<2b \Rightarrow 六層 \end{cases}$	$\begin{cases} \lvert b-c\rvert \\ \lvert\lvert 3b-2a-c\rvert -b+c\rvert \end{cases}$
	如果 a 介於 b 、c 之間 $\Rightarrow$ 四層	$\lvert b+c-2a\rvert$
	如果 a 最小，且 $\begin{cases} a+b>2c \Rightarrow 六層 \\ a+b\le 2c \Rightarrow 四層 \end{cases}$	$\begin{cases} \lvert\lvert 3c-2a-b\rvert -b+c\rvert \\ \lvert b-c\rvert \end{cases}$
	如果 $b+c=2a \Rightarrow$ 二層	$\lvert a-b\rvert$
	如果 $b+c\neq 2a \Rightarrow$ 四層	$\lvert\lvert a-b\rvert -\lvert a-c\rvert\rvert$
等差順時針排列 	五層	$2d$
等比順時針排列 	如果 $r=2 \Rightarrow$ 七層	$2a$
	如果 $r\neq 2 \Rightarrow$ 六層	$2a(r-1)^2$

柒、討論

雖然解決了上面幾個問題，但我們仍最想知道所有種類的數字方塊層數，也就是給任意一個數字方塊，我們便能依據推論出來的結果得知這個數字方塊有幾層。於是我們又著手繼續研究任意四個都不同的正整數所形成的數字方塊，歸納出以下的判別方式，並將研究過程整理於附件二：(表二)

型式	條件	層數
 $a>b>c>d$	$a+c>2b$ 、 $b+d>2c$ $\begin{cases} a+c+d\ge 3b\text{且}(a-d)>3(b-c) \\ a+c+d<3b\text{且}(a-d)>3(b-c)\begin{cases} a+d>2b\text{且}(a+2c)>3b\begin{cases}(a-c)\ge 2(b-d)\\(a-c)<2(b-d)\end{cases} \\ a+d>2b\text{且}(a+2c)=3b\begin{cases}b+2d\ge 3c\\ b+2d<3c\end{cases} \\ a+d>2b\text{且}(a+2c)<3b \\ a+d\le 2b\text{且}(a+2c)<3b\end{cases} \\ (a-d)=3(b-c)\begin{cases}b+2d\le 3c\\ b+2d>3c\end{cases} \\ a+c+d<3b\text{且}(a-d)<3(b-c)\begin{cases}a+d\le 2b\\ a+d>2b\end{cases}\end{cases}$	六層 七層 九層 七層 九層 八層（↑） 六層 六層 八層 六層 八層
	$a+c>2b$ 、 $b+d=2c$ 且 $\begin{cases}a+c+d\ge 3b\\ a+c+d<3b\end{cases}$	五層 七層
	$a+c>2b$ 、 $b+d<2c$ 且 $\begin{cases}\lvert a+c+d-3b\rvert+\lvert a+b+d-3c\rvert=2\lvert a+d-b-c\rvert \\ \text{其餘}\end{cases}$	五層 七層
	$a+c=2b$ 且 $b+d>2c$	五層
	$a+c=2b$ 且 $b+d=2c$	五層
	$a+c=2b$ 、 $b+d<2c$ 且 $\begin{cases}a+b+d\ge 3c\\ a+b+d<3c\end{cases}$	七層 五層
	$a+c<2b$ 且 $b+d>2c$	五層
	$a+c<2b$ 且 $b+d=2c$	五層
	$a+c<2b$ 、 $b+d<2c$ $\begin{cases} a+b+d>3c\text{且}(a-d)>3(b-c)\begin{cases} a+d\ge 2c\text{且}2b+d>3c \\ a+d<2c\text{且}2b+d>3c \\ a+d<2c\text{且}2b+d=3c\begin{cases}3b\ge 2a+c\\ 3b<2a+c\end{cases} \\ a+d<2c\text{且}2b+d<3c\begin{cases}2(a-c)\le(b-d)\\ 2(a-c)>(b-d)\end{cases}\end{cases} \\ a+b+d>3c\text{且}(a-d)=3(b-c)\begin{cases}3b\le 2a+c\\ 3b>2a+c\end{cases} \\ a+b+d>3c\text{且}(a-d)<3(b-c)\begin{cases}a+d\ge 2c\\ a+d<2c\end{cases} \\ a+b+d\le 3c\end{cases}$	七層 八層（↑） 七層 九層 七層 九層 六層 八層 六層 八層 六層

<table>
<tr><td rowspan="2">

$a > b > c > d$</td><td>$a+d=b+c$</td><td>三層</td></tr>
<tr><td>$a+d \neq b+c$</td><td>四層</td></tr>
<tr><td rowspan="5">

$a > b > c > d$</td><td>$a+d > 2b > 2c$</td><td>六層</td></tr>
<tr><td>$a+d = 2b > 2c$</td><td>四層</td></tr>
<tr><td>$2b > a+d > 2c \begin{cases} a+d=b+c \\ a+d \neq b+c \end{cases}$</td><td>三層
四層</td></tr>
<tr><td>$2b > a+d = 2c$</td><td>四層</td></tr>
<tr><td>$2b > 2c > a+d$</td><td>六層</td></tr>
</table>

我們也使用亂數表來製造數字方塊，驗證以上的推論。

捌、結論

一、若要由內往外推展多層數字方塊，必須依據下列原則：

（一）最裡層為四個相同的偶數。

（二）再往外一層必須滿足一組對角線相同且兩組對角線和必須相等或兩組對角線相同。

（三）再往外推的每層四個數都必須滿足最大數為其他三數的和或對角線和相等或對角線差相等。

（四）若要推展出越多層，就必須依照上式的規則，直到無法滿足三個條件中的任一個，即結束往外推展。

二、若任選給定一個四個正整數所形成的數字方塊都可以用上面（表一）和（表二）來判斷運算的總層數。

三、任選四個正整數所形成的數字方塊的總層數是有限的，而非無限。

四、數字方塊的四個正整數可推展到任意四個整數，因為不管第一層四個數為 0 或負整數，她的下一層都會出現四個正整數，於是便又可以依照（表一）和（表二）來判斷運算的總層數。

五、進一步想研究的問題：探討數字方塊的運算方法在其他正三角形、正五邊形、正六邊形、正七邊形、正八邊形…正多邊形上，是不是也一樣在計算到最後都會出現中點都是一樣數字的正多邊形。

玖、參考資料

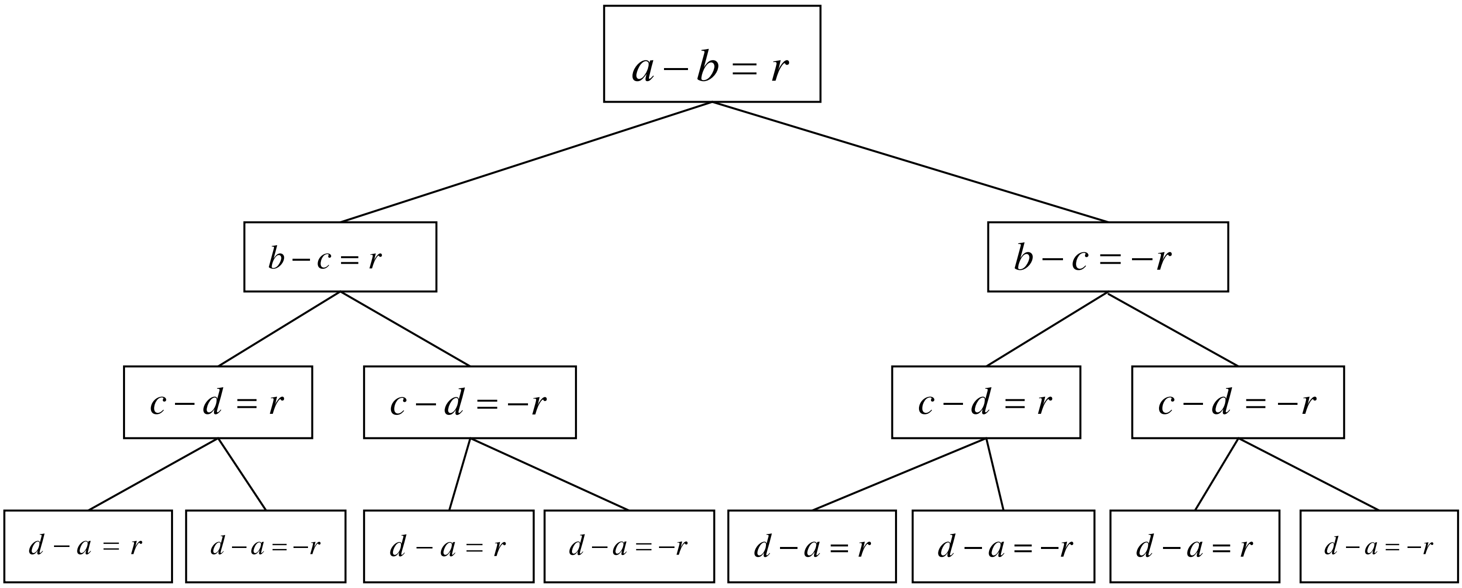
蔡淑英 93 年 9 月 數字方塊 科學研究 第 43 卷第五期 P.26

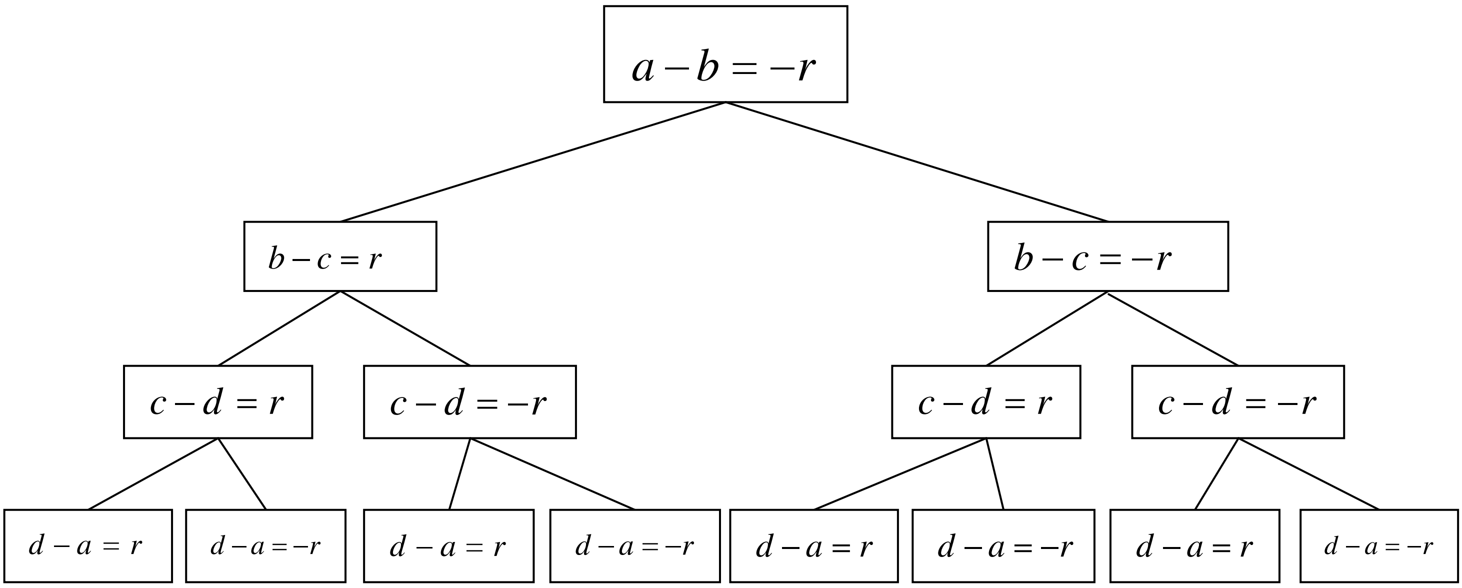
國中數學康軒版第一冊 1-1 數的大小與絕對值

國中數學康軒版第二冊 1-3 數形關係

葛老爹的推理遊戲 2 Martin Gardner 著 葉偉文譯 天下遠見出版社

附件一


$a-b=r$
$b-c=r$
$b-c=-r$
$c-d=r$
$c-d=-r$
$c-d=r$
$c-d=-r$
$d-a=r$
$d-a=-r$
$d-a=r$
$d-a=-r$
$d-a=r$
$d-a=-r$
$d-a=r$
$d-a=-r$


$a-b=-r$
$b-c=r$
$b-c=-r$
$c-d=r$
$c-d=-r$
$c-d=r$
$c-d=-r$
$d-a=r$
$d-a=-r$
$d-a=r$
$d-a=-r$
$d-a=r$
$d-a=-r$
$d-a=r$
$d-a=-r$

$$\begin{array}{rl} & a-b=r \\ & b-c=r \\ & c-d=r \\ +) & \underline{d-a=r} \\ & 0=4r(*) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=r \\ & b-c=r \\ & c-d=r \\ +) & \underline{d-a=-r} \\ & 0=2r(*) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=r \\ & b-c=r \\ & c-d=-r \\ +) & \underline{d-a=r} \\ & 0=2r(*) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=r \\ & b-c=r \\ & c-d=-r \\ +) & \underline{d-a=-r} \\ & 0=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=r \\ & b-c=-r \\ & c-d=r \\ +) & \underline{d-a=r} \\ & 0=2r(*) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=r \\ & b-c=-r \\ & c-d=r \\ +) & \underline{d-a=-r} \\ & 0=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=r \\ & b-c=-r \\ & c-d=-r \\ +) & \underline{d-a=r} \\ & 0=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=r \\ & b-c=-r \\ & c-d=-r \\ +) & \underline{d-a=-r} \\ & 0=-2r(*) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=-r \\ & b-c=r \\ & c-d=r \\ +) & \underline{d-a=r} \\ & 0=2r(*) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=-r \\ & b-c=r \\ & c-d=r \\ +) & \underline{d-a=-r} \\ & 0=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=-r \\ & b-c=r \\ & c-d=-r \\ +) & \underline{d-a=r} \\ & 0=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=-r \\ & b-c=r \\ & c-d=-r \\ +) & \underline{d-a=-r} \\ & 0=-2r(*) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=-r \\ & b-c=-r \\ & c-d=r \\ +) & \underline{d-a=r} \\ & 0=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=-r \\ & b-c=-r \\ & c-d=r \\ +) & \underline{d-a=-r} \\ & 0=-2r(*) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a-b=-r \\ & b-c=-r \\ & c-d=-r \\ +) & \underline{d-a=r} \\ & 0=-2r(*) \end{array}$$

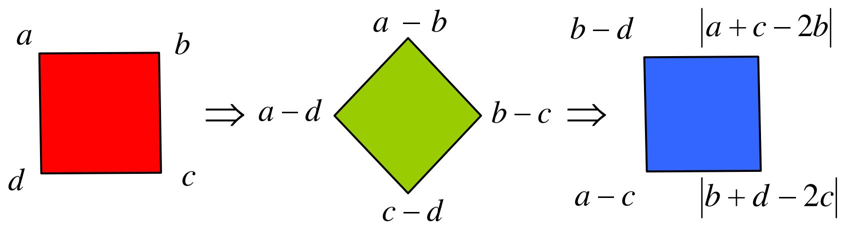
$$\begin{array}{rl} & a-b=-r \\ & b-c=-r \\ & c-d=-r \\ +) & \underline{d-a=-r} \\ & 0=-4r(*) \end{array}$$

附件二

四個正整數都不相同的數字方塊情形：

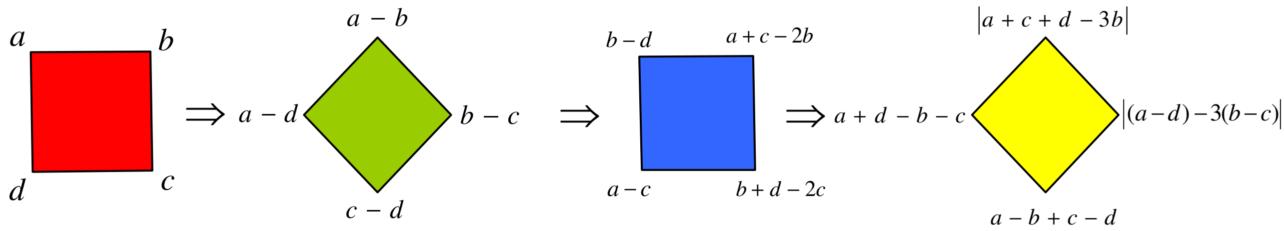
假設 $a > b > c > d$ ，則會有下列三種排列方式：

型一



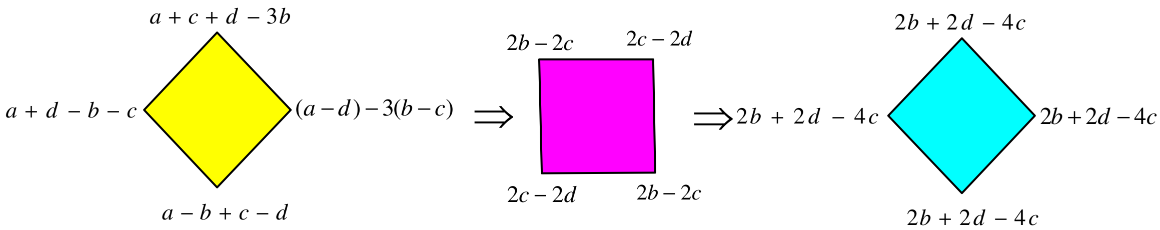
因為 $a+c-2b$ 與 $b+d-2c$ 的值不確定，所以討論下列 9 種情形：

（一）若 $a+c>2b$ 且 $b+d>2c$



繼續討論 $a+c+d-3b$ 與 $(a-d)-3(b-c)$ 的正、負號情形:

①如果 $a+c+d>3b$ 且 $(a-d)>3(b-c)$



（六層）

②如果 $a+c+d>3b$ 且 $(a-d)=3(b-c)$

因為 $a=3b-3c+d$

則 $a+c+d-3b=3b-3c+d+c+d-3b=-2c+2d<0$

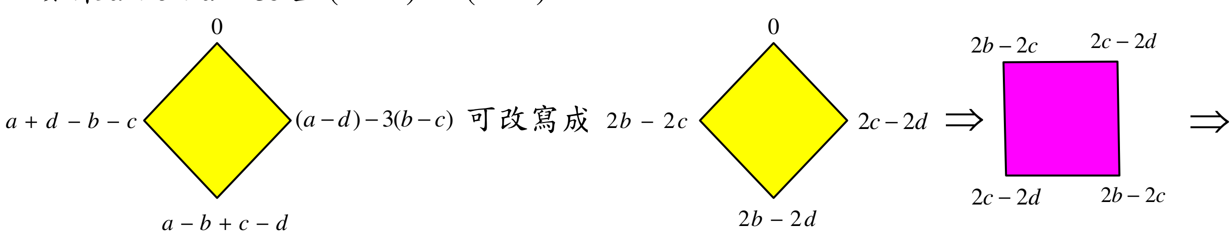
所以此情形不會發生

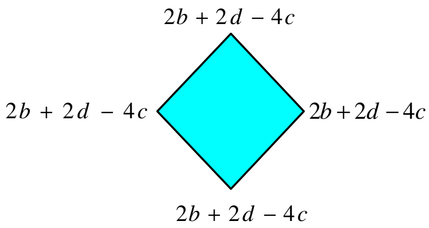
③如果 $a+c+d>3b$ 且 $(a-d)<3(b-c)$

$$\begin{array}{lr} & a+c+d>3b \\ +) & 3b-3c>a-d \\ \hline & 2d>2c \qquad (*) \end{array}$$

所以此情形也不會發生

④如果 $a+c+d=3b$ 且 $(a-d)>3(b-c)$





（六層）

⑤如果 $a+c+d=3b$ 且 $(a-d)=3(b-c)$

因為 $a=3b-c-d$

則 $a-d-3b+3c=3b-c-d-d-3b+3c=2c-2d>0$

所以此情形也不會發生

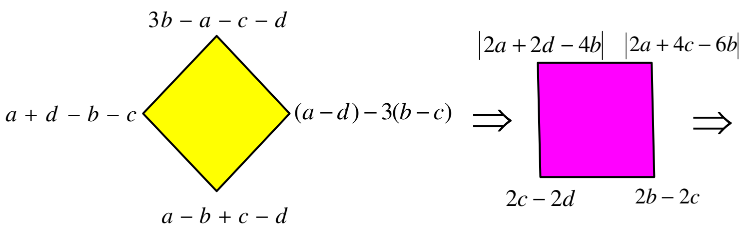
⑥如果 $a+c+d=3b$ 且 $(a-d)<3(b-c)$

因為 $a=3b-c-d$

則 $a-d-3b+3c=3b-c-d-d-3b+3c=2c-2d>0$

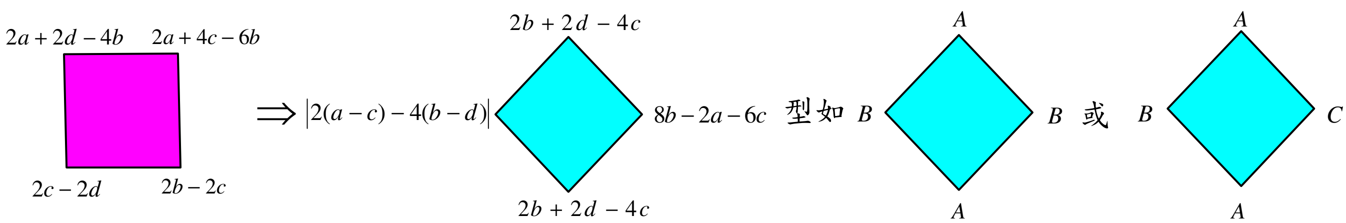
所以此情形也不會發生

⑦如果 $a+c+d<3b$ 且 $(a-d)>3(b-c)$



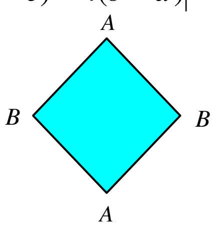
繼續討論 $2a+2d-4b$ 與 $2a+4c-6b$ 的情形：

❶如果 $2a+2d>4b$ 且 $2a+4c>6b$



$$\text{如果}\left|2(a-c)-4(b-d)\right|=8b-2a-6c\Rightarrow\begin{cases}2a-2c-4b+4d=8b-2a-6c\Rightarrow a+c+d=3b(*)\\-2a+2c+4b-4d=8b-2a-6c\Rightarrow b+d=2c(*)\end{cases}$$

所以不是



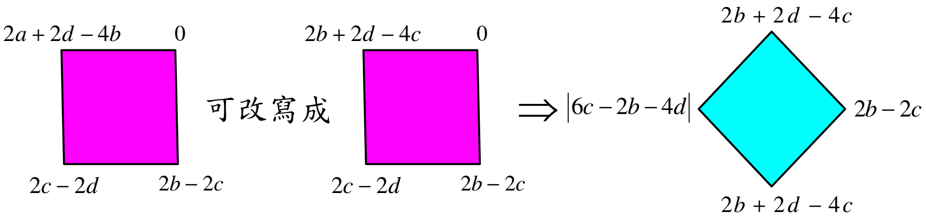
此類型。

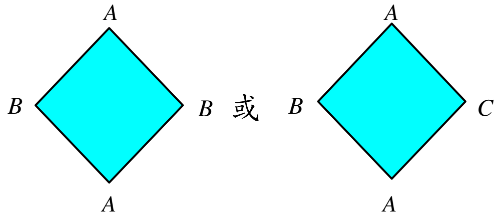
$$\text{如果}\left|2(a-c)-4(b-d)\right|+8b-2a-6c=2(2b+2d-4c)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a-2c-4b+4d+8b-2a-6c=4b+4d-8c\Rightarrow 0=0\\0+8b-2a-6c=4b+4d-8c\Rightarrow 2(a-c)=4(b-d)\\-2a+2c+4b-4d+8b-2a-6c=4b+4d-8c\Rightarrow 2(a-c)=4(b-d)(*)\end{cases}$$

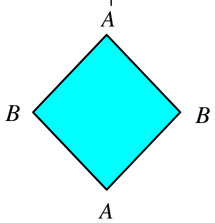
$$所以\begin{cases} 如果 a-c \ge 2(b-d) \Rightarrow 七層 \\ 如果 a-c < 2(b-d) \Rightarrow 九層 \end{cases}$$

❷如果 $2a+2d>4b$ 且 $2a+4c=6b$



型如 

$$如果 |6c-2b-4d| = 2b-2c \Rightarrow \begin{cases} 6c-2b-4d = 2b-2c \Rightarrow b+d=2c(*) \\ -6c+2b+4d = 2b-2c \Rightarrow c=d(*) \end{cases}$$

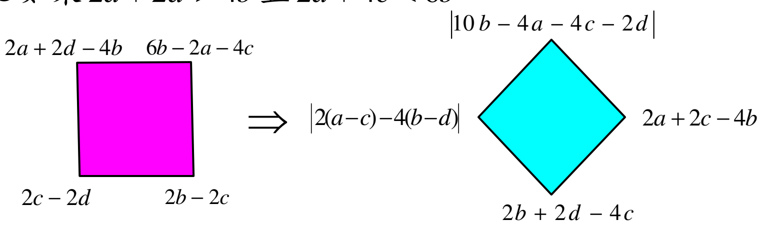
所以不是  此類型。

$$如果 |6c-2b-4d| + 2b-2c = 2(2b+2d-4c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6c-2b-4d+2b-2c = 4b+4d-8c \Rightarrow 6c = 2b+4d(*) \\ 0+2b-2c = 4b+4d-8c \Rightarrow 6c = 2b+4d \\ -6c+2b+4d+2b-2c = 4b+4d-8c \Rightarrow 0=0 \end{cases}$$

$$所以\begin{cases} 如果 b+2d \ge 3c \Rightarrow 七層 \\ 如果 b+2d < 3c \Rightarrow 九層 \end{cases}$$

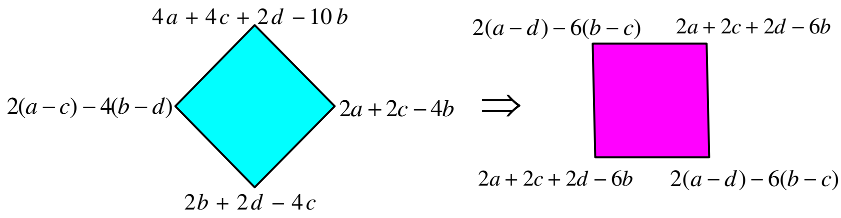
❸如果 $2a+2d>4b$ 且 $2a+4c<6b$



因為 $2b-2c>2c-2d>6b-2a-4c$ 且 $2b-2c>2a+2d-4b$

所以繼續討論下列五種情形：

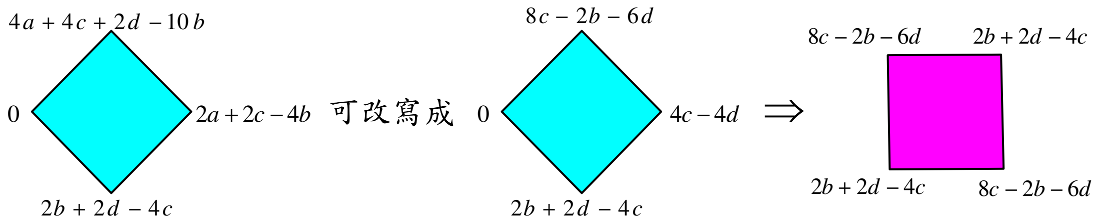
（Ⅰ）如果 $2a+2d-4b>2c-2d>6b-2a-4c$



因為 $2(a-d)-6(b-c)\neq 2a+2c+2d-6b$

所以此方塊會結束在第八層。

（Ⅱ）如果 $2a+2d-4b=2c-2d>6b-2a-4c$

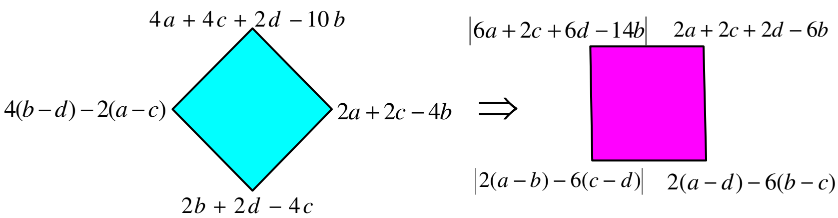


因為 $8c-2b-6d\neq 2b+2d-4c$

$(\because 8c-2b-6d=2b+2d-4c\Rightarrow b+2d=3c$ 與 $2b-2d=a-c\Rightarrow 3b=a+2c(*))$

所以此方塊會結束在第八層。

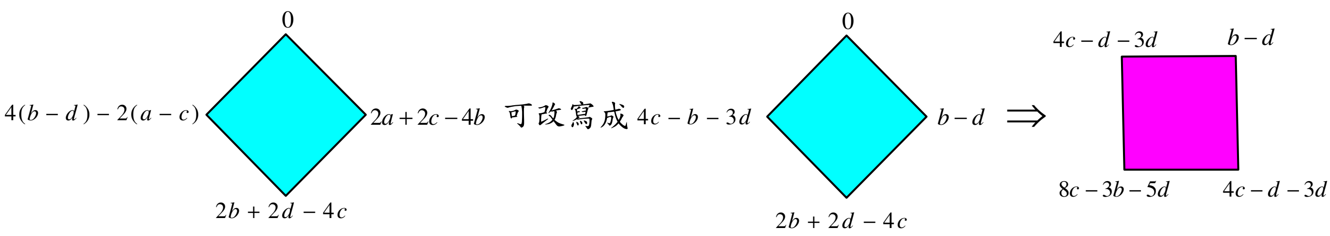
（Ⅲ）如果 $2c-2d>2a+2d-4b>6b-2a-4c$



因為 $2a+2c+2d-6b\neq 2(a-d)-6(b-c)$

所以此方塊會繼續第八層。

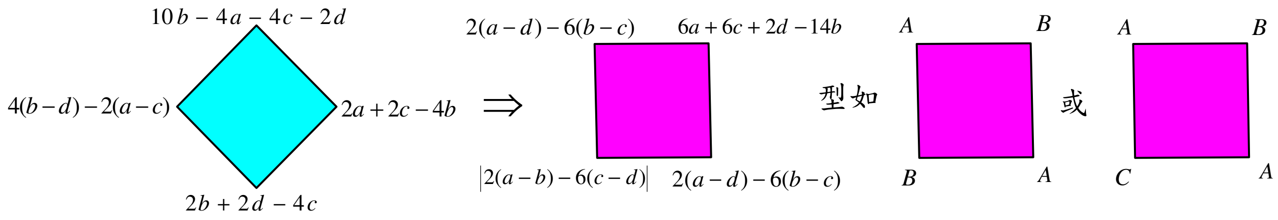
（Ⅳ）如果 $2c-2d>2a+2d-4b=6b-2a-4c$



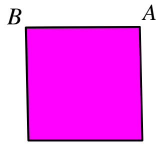
因為 $b-d+8c-3b-5d=2(4c-b-3d)$

所以此方塊會結束在第八層。

（V）如果 $2c-2d>6b-2a-4c>2a+2d-4b$



$$\text{如果}6a+6c+2d-14b=|2(a-b)-6(c-d)|\Rightarrow\begin{cases}6a+6c+2d-14b=2(a-b)-6(c-d)\Rightarrow a-d=3(b-c)(*)\\6a+6c+2d-14b=-2(a-b)+6(c-d)\Rightarrow a+d=2b(*)\end{cases}$$

所以不是  此類型。

$$\text{如果}6a+6c+2d-14b+|2(a-b)-6(c-d)|=4(a-d)-12(b-c)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6a+6c+2d-14b+2a-2b-6c+6d=4a-4d-12b+12c\Rightarrow(a-b)=3(c-d)(*)\\6a+6c+2d-14b=4a-4d-12b+12d\Rightarrow(a-b)=3(c-d)\\6a+6c+2d-14b-2a+2b+6c-6d=4a-4d-12b+12c\Rightarrow0=0\end{cases}$$

$$\text{所以}\begin{cases}\text{如果}(a-b)\le3(c-d)\Rightarrow\text{八層}\\\text{如果}(a-b)>3(c-d)\Rightarrow\text{十層}\end{cases}$$

❹如果 $2a+2d=4b$ 且 $2a+4c>6b$

因為 $2a=4b-2d$

則 $2a+4c-6b=4b-2d+4c-6b=-2b-2d+4c<0$

所以此情形不會發生

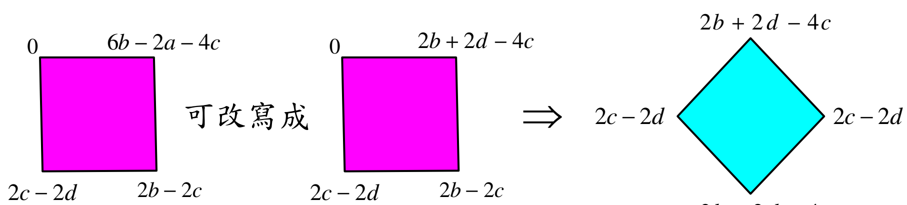
❺如果 $2a+2d=4b$ 且 $2a+4c=6b$

因為 $2a=4b-2d$

則 $2a+4c-6b=4b-2d+4c-6b=-2b-2d+4c<0$

所以此情形不會發生

❻如果 $2a+2d=4b$ 且 $2a+4c<6b$



因為 $2b+2d-4c\ne2c-2d$

$(\because 2b+2d-4c=2c-2d\Rightarrow b+2d=3c\text{與}2b=a+d\Rightarrow a-d=3(b-c)(*))$

所以此方塊會結束在第七層。

❼如果 $2a+2d<4b$ 且 $2a+4c>6b$

$$\begin{array}{rl} & 4b>2a+2d \\ +) & 2a+4c>6b \\ \hline & 4c>2b+2d \qquad (*) \end{array}$$

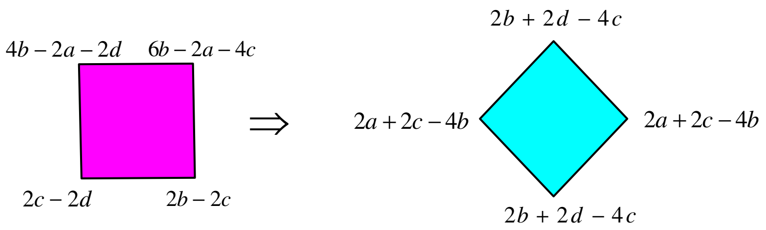
所以此情形也不會發生

❽如果 $2a+2d<4b$ 且 $2a+4c=6b$

$$\begin{array}{rl} & 4b>2a+2d \\ +) & 2a+4c=6b \\ \hline & 4c>2b+2d \qquad (*) \end{array}$$

所以此情形也不會發生

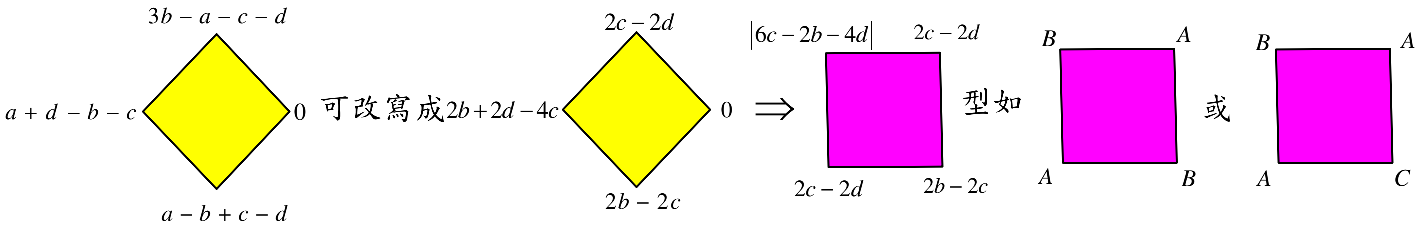
❾如果 $2a+2d<4b$ 且 $2a+4c<6b$



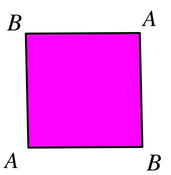
因為 $2b+2d-4c \neq 2a+2c-4b$

所以此方塊會結束在第七層。

⑧如果 $a+c+d<3b$ 且 $(a-d)=3(b-c)$



如果 $|6c-2b-4d|=2b-2c \Rightarrow \begin{cases} 6c-2b-4d=2b-2c \Rightarrow b+d=2c(*) \\ -6c+2b+4d=2b-2c \Rightarrow c=d(*) \end{cases}$

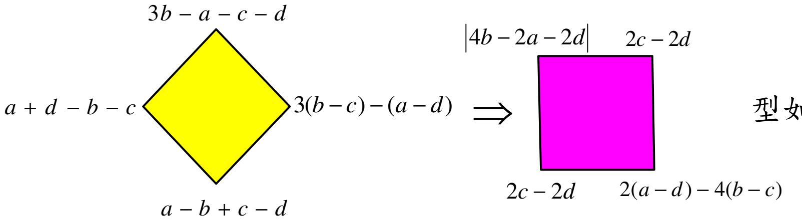
所以不是  此類型。

如果 $|6c-2b-4d|+2b-2c=2(2c-2d)$

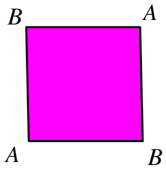
$$\Rightarrow \begin{cases} 6c-2b-4d+2b-2c=4c-4d \Rightarrow 0=0 \\ 0+2b-2c=4c-4d \Rightarrow 6c=2b+4d \\ -6c+2b+4d+2b-2c=4c-4d \Rightarrow 6c=2b+4d(*) \end{cases}$$

$$\text{所以}\begin{cases}\text{如果} b+2d \le 3c \Rightarrow \text{六層} \\ \text{如果} b+2d > 3c \Rightarrow \text{八層}\end{cases}$$

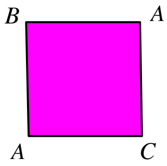
⑨如果 $a+c+d<3b$ 且 $(a-d)<3(b-c)$



型如

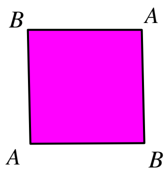


或



$$\text{如果}|4b-2a-2d| = 2(a-d)-4(b-c) \Rightarrow \begin{cases} 4b-2a-2d = 2a-2d-4b+4c \Rightarrow a+c=2b(*) \\ -4b+2a+2d = 2a-2d-4b+4c \Rightarrow c=d(*)\end{cases}$$

所以不是



此類型。

$$\text{如果}|4b-2a-2d| + 2(a-d)-4(b-c) = 2(2c-2d)$$

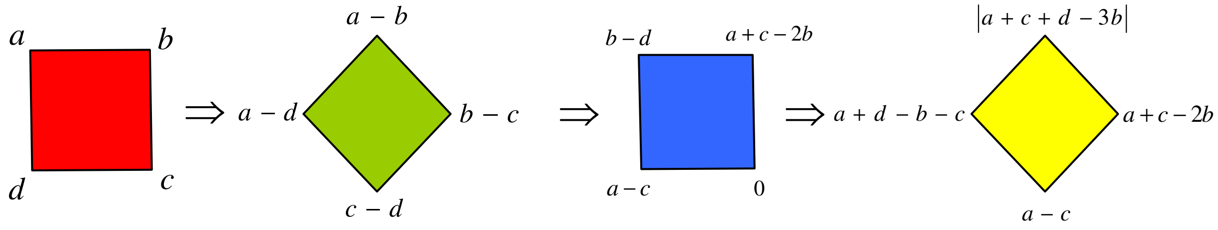
$$\Rightarrow \begin{cases} 4b-2a-2a+2a-2a-4b+4c = 4c-4d \Rightarrow 0=0 \\ 0+2a-2d-4b+4c = 4c-4d \Rightarrow 4b = 2a+2d \\ -4b+2a+2d+2a-2d-4b+4d = 4c-4d \Rightarrow 4b=2a+2d(*)\end{cases}$$

$$\text{所以}\begin{cases}\text{如果} a+d \le 2b \Rightarrow \text{六層} \\ \text{如果} a+d > 2b \Rightarrow \text{八層}\end{cases}$$

結論：若 $a+c>2b$ 且 $b+d>2c$

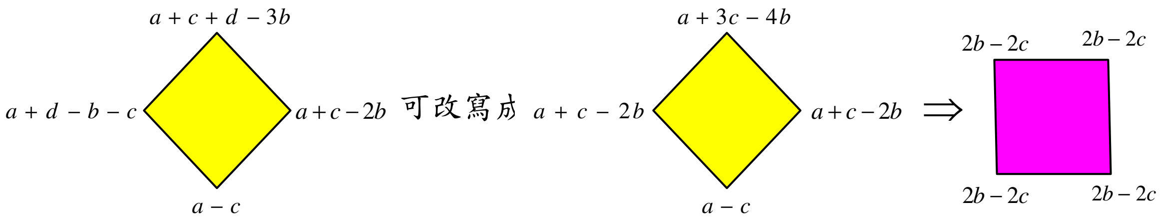
$$\begin{cases} a+c+d \ge 3b \text{且} (a-d) > 3(b-c) \Rightarrow \text{六層} \\ a+c+d < 3b \text{且} (a-d) > 3(b-c) \begin{cases} a+d > 2b \text{且} (a+2c) > 3b \begin{cases} (a-c) \ge 2(b-d) \Rightarrow \text{七層} \\ (a-c) < 2(b-d) \Rightarrow \text{九層}\end{cases} \\ a+d > 2b \text{且} (a+2c) = 3b \begin{cases} b+2d \ge 3c \Rightarrow \text{七層} \\ b+2d \Leftarrow\Rightarrow \text{九層}\end{cases} \\ a+d > 2b \text{且} (a+2c) < 3b \Rightarrow \text{八層（}\uparrow\text{）} \\ a+d \le 2b \text{且} (a+2c) < 3b \Rightarrow \text{六層}\end{cases} \\ a-d = 3(b-c) \begin{cases} b+2d \le 3c \Rightarrow \text{六層} \\ b+2d > 3c \Rightarrow \text{八層}\end{cases} \\ a+c+d < 3b \text{且} (a-d) < 3(b-c) \begin{cases} a+d \le 2b \Rightarrow \text{六層} \\ a+d > 2b \Rightarrow \text{八層}\end{cases}\end{cases}$$

（二）若 $a+c>2b$ 且 $b+d=2c$



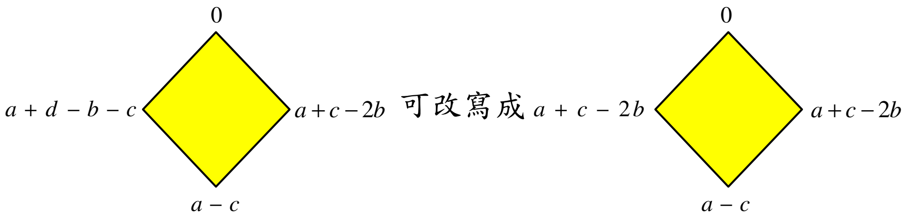
繼續討論 $a+c+d-3b$ 的正、負號情形：

①如果 $a+c+d>3b$



（五層）

②如果 $a+c+d=3b$

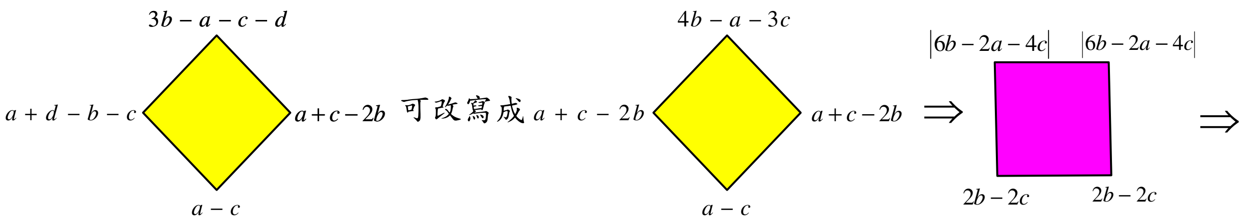


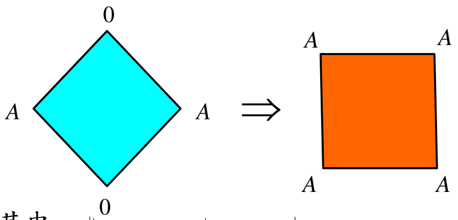
因為 $b+d=2c$ 且 $(a+c+d)=3b \Rightarrow a+3c=4b$

因此 $a-c+0=2(a+c-2b)$

所以此方塊會結束在第五層。

③如果 $a+c+d<3b$





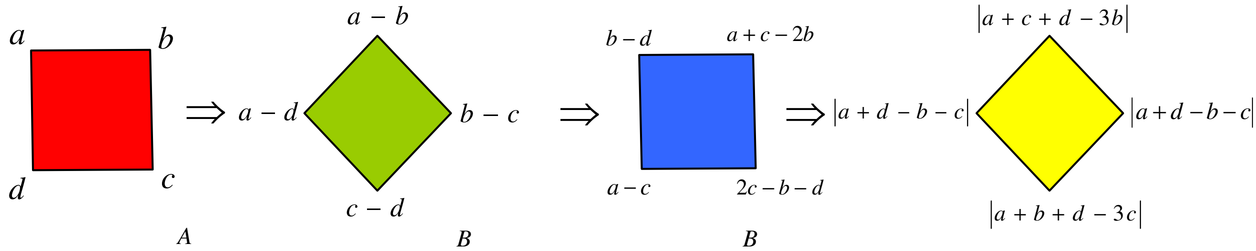
（六層）

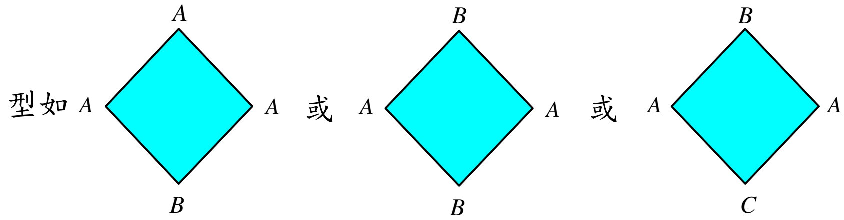
其中 $A=\left|\,|6b-2a-4c|-2b+2c\right|$

結論： 若 $a+c>2b$ 且 $b+d=2c$

$$\begin{cases} \text{如果} a+c+d \ge 3b \Rightarrow \text{五層} \\ \text{如果} a+c+d < 3b \Rightarrow \text{七層} \end{cases}$$

（三）若 $a+c>2b$ 且 $b+d<2c$





所以檢查下列式子：$\begin{cases} |a+c+d-3b| = |a+d-b-c| \neq |a+b+d-3c| \\ |a+c+d-3b| = |a+b+d-3c| \neq |a+d-b-c| \\ |a+c+d-3b| + |a+b+d-3c| = 2|a+d-b-c| \\ |a+c+d-3b| + |a+b+d-3c| \neq 2|a+d-b-c| \end{cases}$

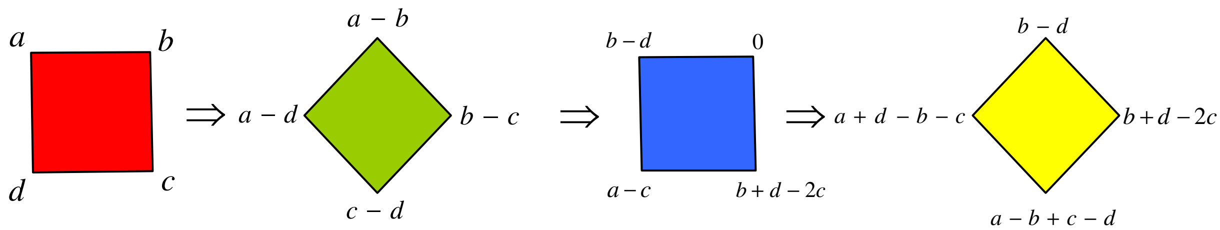
其中 $|a+c+d-3b| = |a+b+d-3c| \neq |a+d-b-c|$ 此種情形不會發生，因為

$$\begin{cases} \text{如果} a+c+d-3b = a+b+d-3c \Rightarrow b = c(*) \\ \text{如果} a+c+d-3b = -a-b-d+3c \Rightarrow a+d = b+c(*) \end{cases}$$

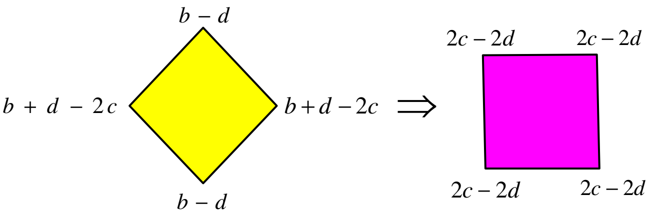
結論：若 $a+c>2b$ 且 $b+d<2c$

$$\begin{cases} \text{如果} |a+c+d-3b| = |a+d-b-c| \neq |a+b+d-3c| \Rightarrow \text{七層} \\ \text{如果} |a+c+d-3b| + |a+b+d-3c| = 2|a+d-b-c| \Rightarrow \text{五層} \\ \text{如果} |a+c+d-3b| + |a+b+d-3c| \neq 2|a+d-b-c| \Rightarrow \text{七層} \end{cases}$$

（四）若 $a+c=2b$ 且 $b+d>2c$



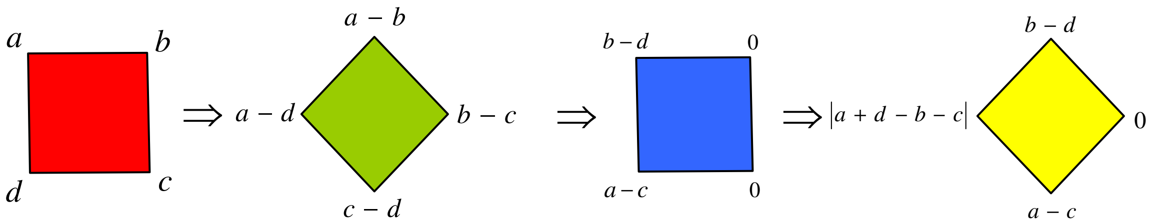
可改寫成



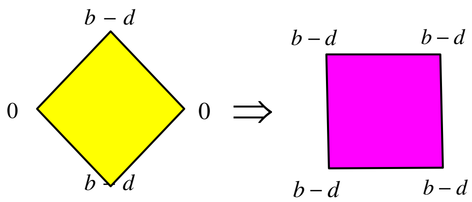
（五層）

結論：若 $a+c=2b$ 且 $b+d>2c \Rightarrow$ 五層

（五）若 $a+c=2b$ 且 $b+d=2c$



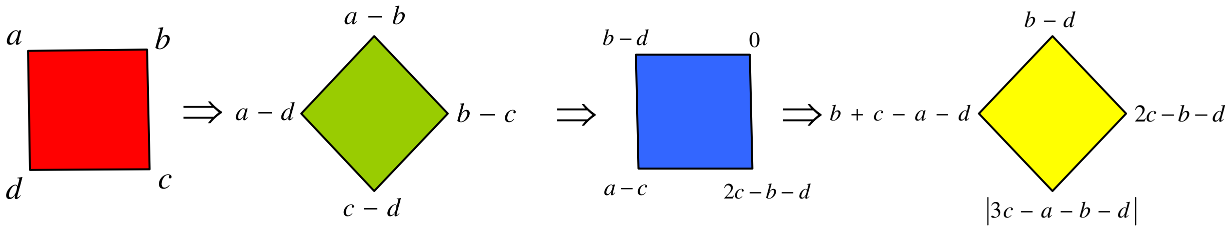
可改寫成



（五層）

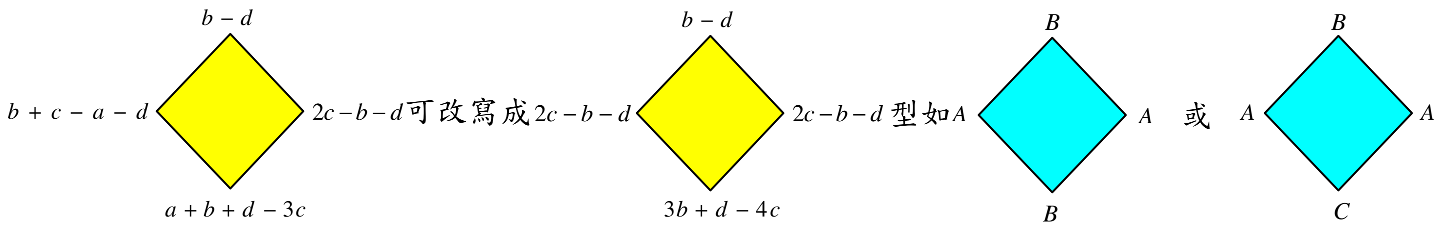
結論：若 $a+c=2b$ 且 $b+d=2c \Rightarrow$ 五層

（六）若 $a+c=2b$ 且 $b+d<2c$



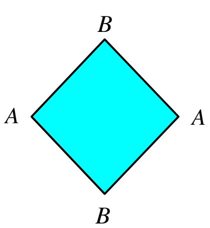
繼續討論 $a+b+d-3c$ 的正、負號情形:

①如果 $a+b+d>3c$



如果 $3b+d-4c=b-d \Rightarrow b+d=2c(*)$

所以不是



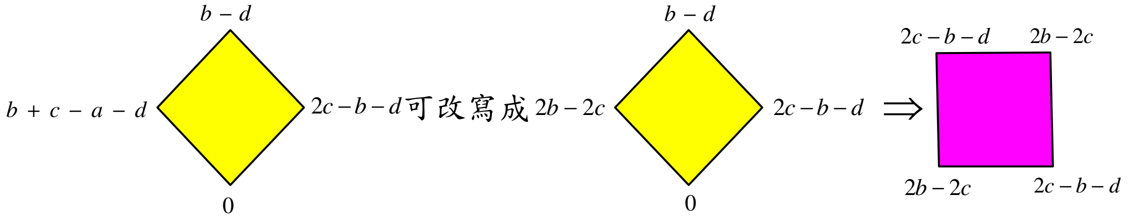
此類型。

又如果 $3b+d-4c+b-d=2(2c-b-d) \Rightarrow 3b+d-4c=0(*)$

所以 $(3b+d-4c)+(b-d) \neq 2(2c-b-d)$

因此會有七層。

②如果 $a+b+d=3c$

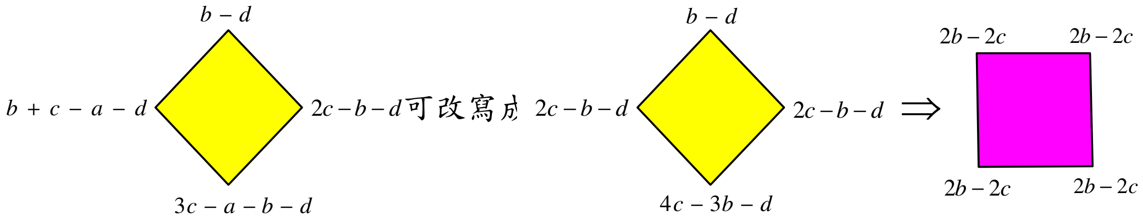


因為 $a+b+d=3c$ 且 $a+c=2b \Rightarrow 3b+d=4c$

也就是 $2c-b-d=2b-2c$

所以此方塊會結束在第五層。

③如果 $a+c+d<3b$

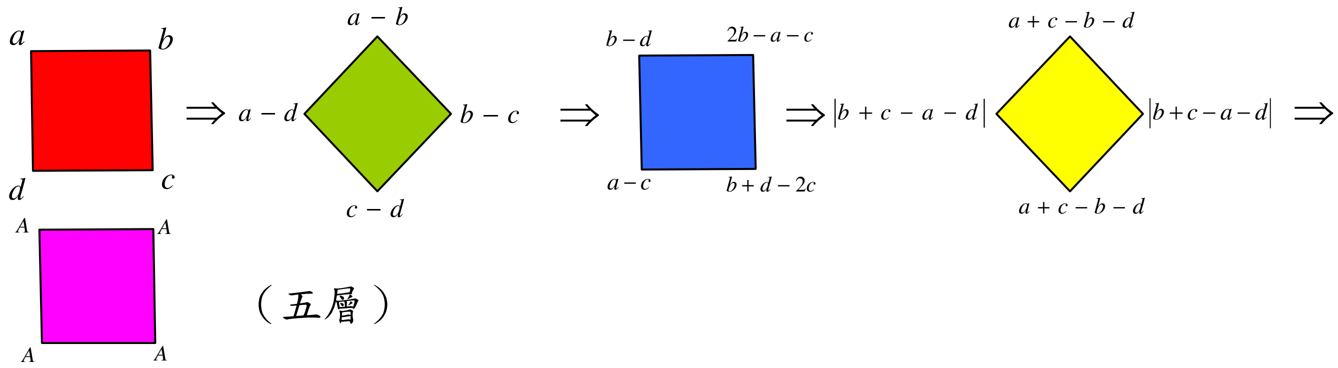


（五層）

結論：若 $a+c=2b$ 且 $b+d<2c$

$$\begin{cases} \text{如果} a+b+d \le 3c \Rightarrow \text{五層} \\ \text{如果} a+b+d > 3c \Rightarrow \text{七層} \end{cases}$$

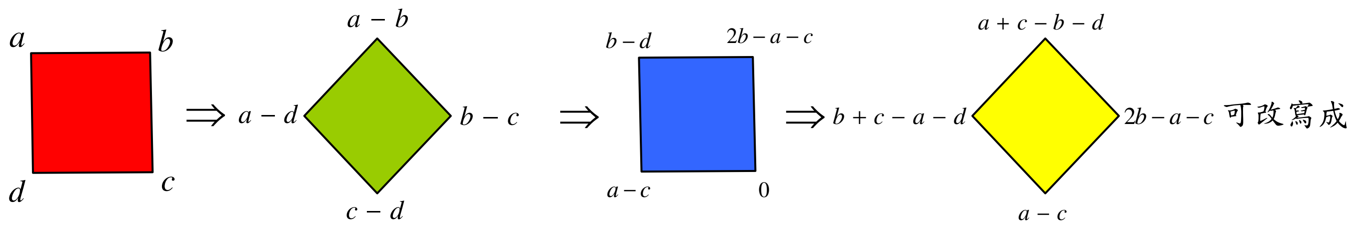
（七）若 $a+c<2b$ 且 $b+d>2c$

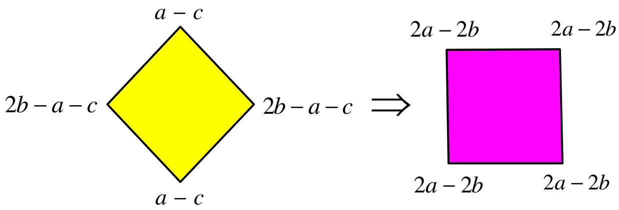


其中 $A=\left||(a+c-b-d)-|b+c-a-d|\right|$

結論：若 $a+c<2b$ 且 $b+d>2c \Rightarrow$ *五層*

（八）若 $a+c<2b$ 且 $b+d=2c$

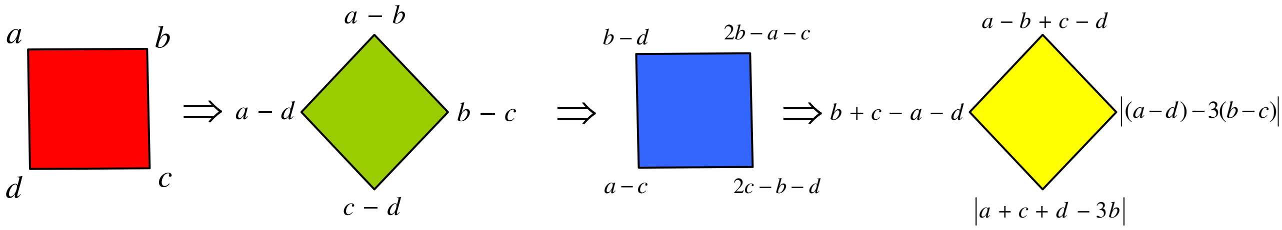




（五層）

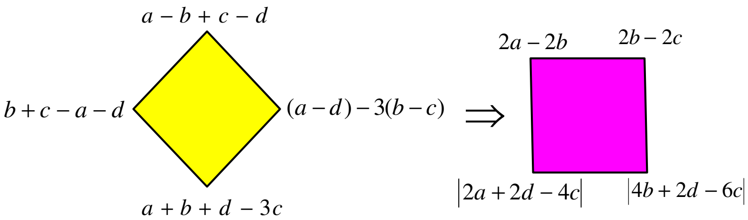
結論：若 $a+c<2b$ 且 $b+d=2c \Rightarrow$ *五層*

（九）若 $a+c<2b$ 且 $b+d<2c$



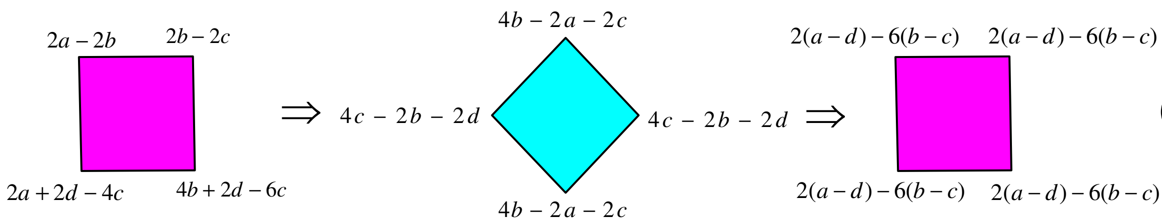
繼續討論 $a+b+d-3c$ 與 $(a-d)-3(b-c)$ 的正、負號情形：

①如果 $a+b+d>3c$ 且 $(a-d)>3(b-c)$



繼續討論 $2a+2d-4c$ 與 $4b+2d-6c$ 的正、負號情形：

❶如果 $2a+2d>4c$ 且 $4b+2d>6c$



（七層）

❷如果 $2a+2d>4c$ 且 $4b+2d=6c$

因為 $2d=6c-4b$

則 $2a+2d-4c=2a+6c-4b-4c=2a+2c-4b<0(*)$

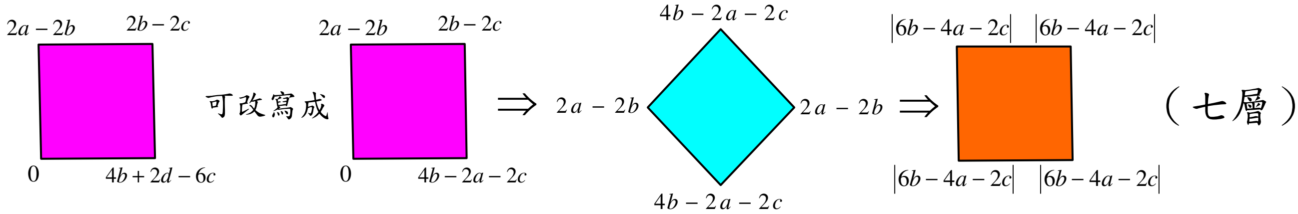
所以此情形不會發生

❸如果 $2a+2d>4c$ 且 $4b+2d<6c$

$$\begin{array}{lr} & 2a+2d>4c \\ +) & 6c>4b+2d \\ \hline & a+c>2b \quad (*) \end{array}$$

所以此情形也不會發生

❹如果 $2a+2d=4c$ 且 $4b+2d>6c$



❺如果 $2a+2d=4c$ 且 $4b+2d=6c$

因為 $2d=4c-2a$

則 $4b+2d-6c=4b+4c-2a-6c=4b-2a-2c>0(*)$

所以此情形也不會發生

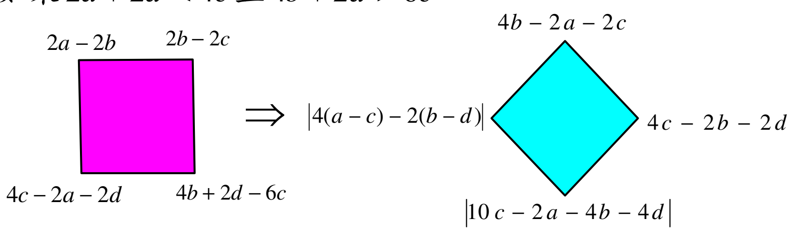
❻如果 $2a+2d=4c$ 且 $4b+2d<6c$

因為 $2d=4c-2a$

則 $4b+2d-6c=4b+4c-2a-6c=4b-2a-2c>0(*)$

所以此情形也不會發生

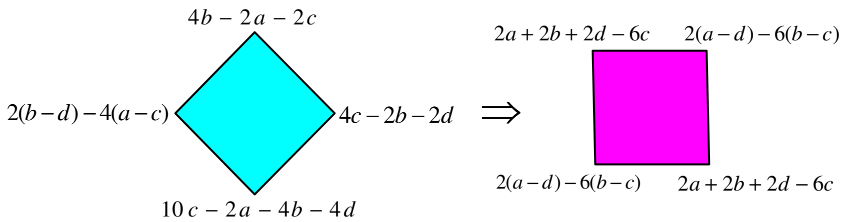
❼如果 $2a+2d<4c$ 且 $4b+2d>6c$



因為 $2b-2c>2a-2b>4b+2d-6c$ 且 $2b-2c>4c-2a-2d$

所以繼續討論下列五種情形：

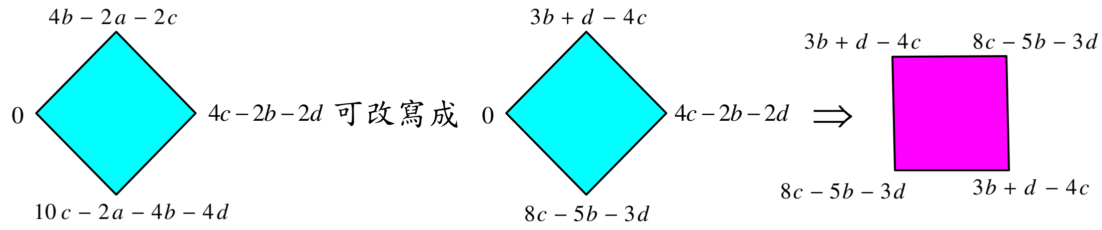
（Ⅰ）如果 $4c-2a-2d>2a-2b>4b+2d-6c$



因為 $2(a-d)-6(b-c)\neq 2a+2b+2d-6c$

所以此方塊會結束在第八層。

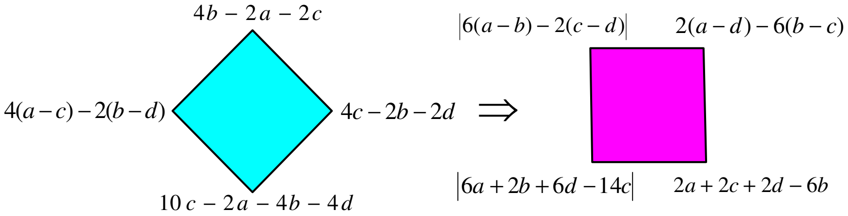
（Ⅱ）如果 $4c-2a-2d=2a-2b>4b+2d-6c$



因為 $3b+d-4c\neq 8c-5b-3d$

所以此方塊會結束在第八層。

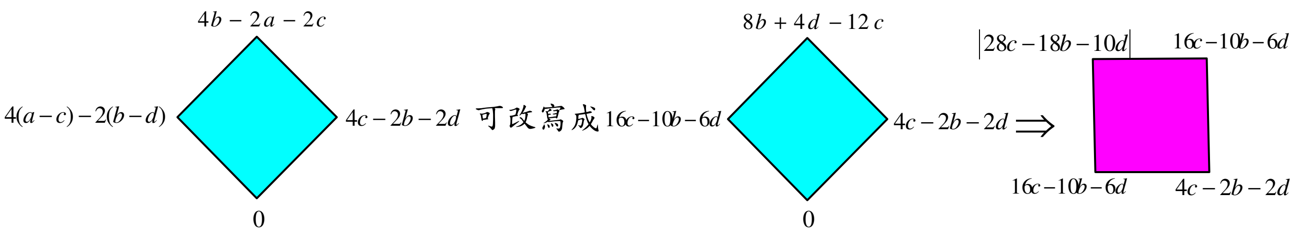
（Ⅲ）如果 $2a-2b>4c-2a-2d>4b+2d-6c$

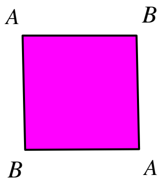
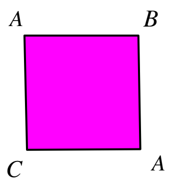


因為 $2a+2b+2d-6c\neq 2(a-d)-6(b-c)$

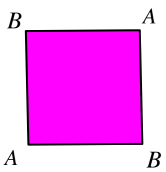
所以此方塊會繼續第八層。

（Ⅳ）如果 $2a-2b>4c-2a-2d=4b+2d-6c$



型如  或 

$$\text{如果}|28c-18b-10d|=4c-2b-2d\Rightarrow\begin{cases}28c-18b-10d=4c-2b-2d\Rightarrow 2b+d=3c(*)\\-28c+18b+10d=4c-2a-2d\Rightarrow 5b+3d=8c(*)\end{cases}$$

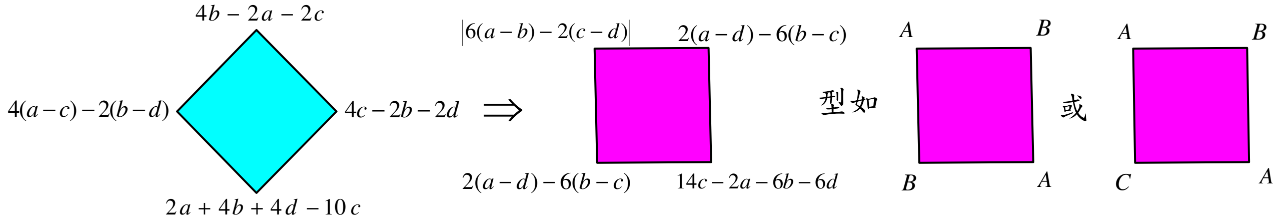
所以不是  此類型。

$$\text{如果}|28c-18b-10d|+4c-2a-2d=2(16c-10b-6d)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}28c-18b-10d+4c-2a-2d=32c-20b-12d\Rightarrow 0=0\\4c-2a-2d=32c-20b-12d\Rightarrow 18b+10d=28c\\-28c+18b+10d+4c-2a-2d=32c-20b-12d\Rightarrow 18b+10d=28c(*)\end{cases}$$

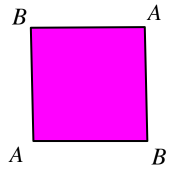
$$\text{所以}\begin{cases}\text{如果}9b+5d\leq 14c\Rightarrow\text{八層}\\\text{如果}9b+5d>14c\Rightarrow\text{十層}\end{cases}$$

（Ⅴ）如果 $2a-2b>4b+2d-6c>4c-2a-2d$



如果 $|6(a-b)-2(c-d)|=14c-2a-6b-6d$

$$\Rightarrow\begin{cases}6(a-b)-2(c-d)=14c-2a-6b-6d\Rightarrow a+d=2c(*)\\6(a-b)-2(c-d)=14c-2a-6b-6d\Rightarrow(a-d)=3(b-c)(*)\end{cases}$$

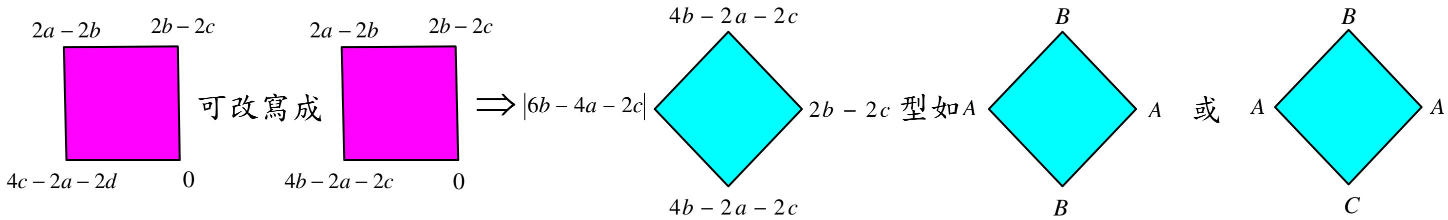
所以不是  此類型。

如果 $|6(a-b)-2(c-d)|+14c-2a-6b-6d=4(a-d)-12(b-c)$

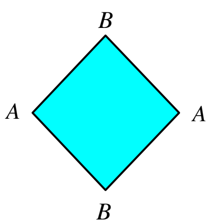
$$\Rightarrow\begin{cases}6(a-b)-2(c-d)+14c-2a-6b-6d=4a-4d-12b+12c\Rightarrow 0=0\\14c-2a-6b-6d=4a-4d-12b+12d\Rightarrow 6(a-b)=2(c-d)\\-6(a-b)+2(c-d)+14c-2a-6b-6d=4a-4d-12b+12c\Rightarrow 6(a-b)=2(c-d)(*)\end{cases}$$

$$\text{所以}\begin{cases}\text{如果}3(a-b)\geq(c-d)\Rightarrow\text{八層}\\\text{如果}3(a-b)<(c-d)\Rightarrow\text{十層}\end{cases}$$

❽如果 $2a+2d<4c$ 且 $4b+2d=6c$



如果 $|6b-4a-2c|=2b-2c\Rightarrow\begin{cases}6b-4a-2c=2b-2c\Rightarrow a=b(*)\\-6b+4a+2c=2b-2c\Rightarrow a+c=2b(*)\end{cases}$

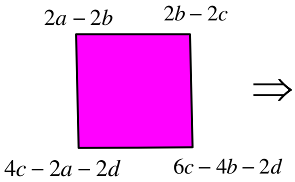
所以不是  此類型。

如果 $|6b-4a-2c|+2b-2c=2(4b-2a-2c)$

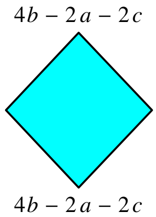
$$\Rightarrow\begin{cases}6b-4a-2c+2b-2c=8b-4a-4c\Rightarrow 0=0\\0+2b-2c=8b-4a-4c\Rightarrow 6b=4a+2c\\-6b+4a+2c+2b-2c=8b-4a-4c\Rightarrow 6b=4a+2c(*)\end{cases}$$

$$所以\begin{cases}如果3b \ge 2a+c \Rightarrow 七層\\ 如果3b < 2a+c \Rightarrow 九層\end{cases}$$

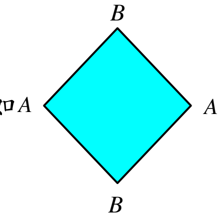
❾如果 $2a+2d<4c$ 且 $4b+2d<6c$



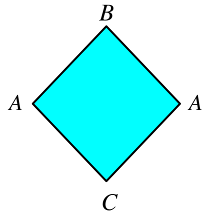
$\Rightarrow |4(a-c)-2(b-d)|$



$6b+2d-8c$ 型如

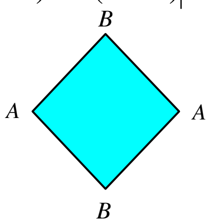


或



$$如果|4(a-c)-2(b-d)| = 6b+2d-8c \Rightarrow \begin{cases}4a-4c-2b+2d = 6b+2d-8c \Rightarrow a+c=2b(*)\\ -4a+4c+2b-2d = 6b+2d-8c \Rightarrow a+b+d=3c(*)\end{cases}$$

所以不是



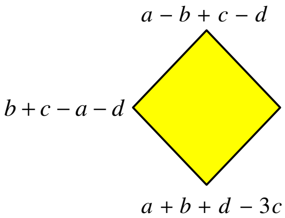
此類型。

$$如果|4(a-c)-2(b-d)|+6b+2d-8c = 2(4b-2a-2c)$$

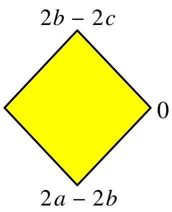
$$\Rightarrow \begin{cases}4a-4c-2b+2d+6b+2d-8c = 8b-4a-4c \Rightarrow 4(a-c)=2(b-d)(*)\\ 0+6b+2d-8c = 8b-4a-4c \Rightarrow 4(a-c)=2(b-d)\\ -4a+4c+2b-2d+6b+2d-8c = 8b-4a-4c \Rightarrow 0=0\end{cases}$$

$$所以\begin{cases}如果2(a-c) \le b-d \Rightarrow 七層\\ 如果2(a-c) > b-d \Rightarrow 九層\end{cases}$$

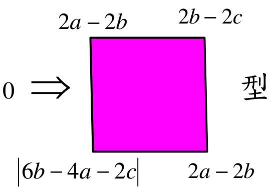
②如果 $a+b+d>3c$ 且 $(a-d)=3(b-c)$



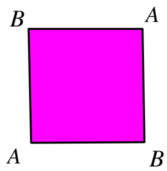
可改寫成 $4b-2a-2c$



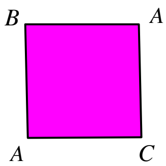
$\Rightarrow$



型如

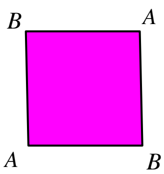


或



$$如果|6b-4a-2c| = 2b-2c \Rightarrow \begin{cases}6b-4a-2c = 2b-2c \Rightarrow a=b(*)\\ -6b+4a+2c = 2b-2c \Rightarrow a+c=2b(*)\end{cases}$$

所以不是



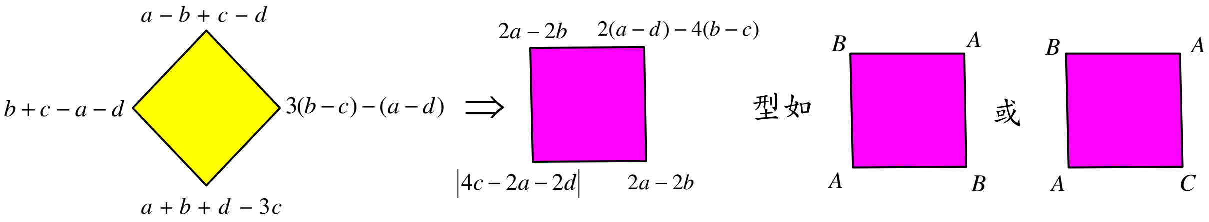
此類型。

$$如果|6b-4a-2c|+2b-2c = 2(2a-2b)$$

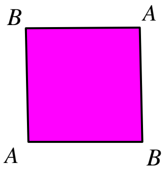
$$\Rightarrow \begin{cases}6b-4a-2c+2b-2c = 4a-4b \Rightarrow 6b=4a+2c(*)\\ 0+2b-2c = 4a-4b \Rightarrow 6b=4a+2c\\ -6b+4a+2c+2b-2c = 4a-4b \Rightarrow 0=0\end{cases}$$

$$所以\begin{cases}如果2a+c \ge 3b \Rightarrow 六層 \\ 如果2a+c < 3b \Rightarrow 八層\end{cases}$$

③如果 $a+b+d>3c$ 且 $(a-d)<3(b-c)$



$$如果2(a-d)-4(b-c)=|4c-2a-2d| \Rightarrow \begin{cases}2(a-d)-4(b-c)=4c-2a-2d \Rightarrow a=b(*) \\ 2(a-d)-4(b-c)=-4c+2a+2d \Rightarrow b+d=2c(*)\end{cases}$$

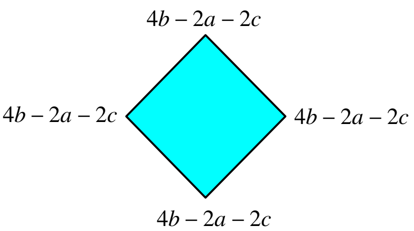
所以不是  此類型。

$$如果2(a-d)-4(b-c)+|4c-2a-2d|=2(2a-2b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2(a-d)-4(b-c)+4c-2a-2d=2(2a-2b) \Rightarrow a+d=2c(*) \\ 2(a-d)-4(b-c)=2(2a-2b) \Rightarrow a+d=2c \\ 2(a-d)-4(b-c)-4c+2a+2d=2(2a-2b) \Rightarrow 0=0\end{cases}$$

$$所以\begin{cases}如果a+d \ge 2c \Rightarrow 六層 \\ 如果a+d < 2c \Rightarrow 八層\end{cases}$$

④如果 $a+b+d=3c$ 且 $(a-d)>3(b-c)$



（六層）

⑤如果 $a+b+d=3c$ 且 $(a-d)=3(b-c)$

因為 $d=3c-a-b$

則 $a-d-3b+3c=a-3c+a+b-3b+3c=2a-2b>0(*)$

所以此情形也不會發生

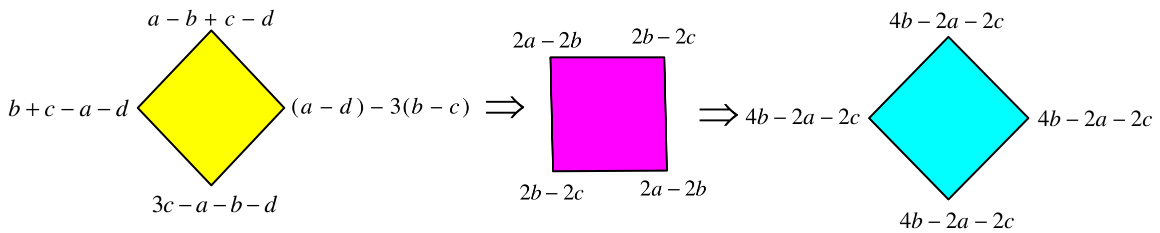
⑥如果 $a+b+d=3c$ 且 $(a-d)<3(b-c)$

因為 $d=3c-a-b$

則 $a-d-3b+3c=a-3c+a+b-3b+3c=2a-2b>0(*)$

所以此情形也不會發生

⑦如果 $a+b+d<3c$ 且 $(a-d)>3(b-c)$



（六層）

⑧如果 $a+b+d<3c$ 且 $(a-d)=3(b-c)$

因為 $d=a-3b+3c$

則 $a+b+d-3c=a+b+a-3b+3c-3c=2a-2b>0(*)$

所以此情形也不會發生

⑨如果 $a+b+d<3c$ 且 $(a-d)<3(b-c)$

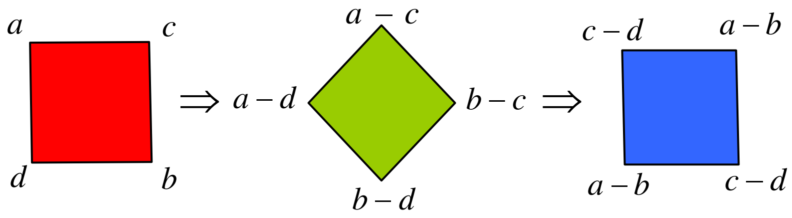
$$\begin{array}{rr} & a+b+d<3c \\ +) & a-d<3b-3c \\ \hline & 2a<2b \quad (*) \end{array}$$

所以此情形也不會發生

結論：若 $a+c<2b$ 且 $b+d<2c$

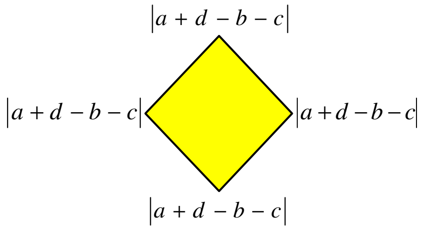
$$\begin{cases} a+b+d>3c\text{且}(a-d)>3(b-c)\begin{cases} a+d\ge 2c\text{且}2b+d>3c \Rightarrow \text{七層} \\ a+d<2c\text{且}2b+d>3c \Rightarrow \text{八層（↑）} \\ a+d<2c\text{且}2b+d=3c\begin{cases} 3b\ge 2a+c \Rightarrow \text{七層} \\ 3b<2a+c \Rightarrow \text{九層} \end{cases} \\ a+d<2c\text{且}2b+d<3c\begin{cases} 2(a-c)\le(b-d) \Rightarrow \text{七層} \\ 2(a-c)>(b-d) \Rightarrow \text{九層} \end{cases} \end{cases} \\ a+b+d>3c\text{且}(a-d)=3(b-c)\begin{cases} 3b\le 2a+c \Rightarrow \text{六層} \\ 3b>2a+c \Rightarrow \text{八層} \end{cases} \\ a+b+d>3c\text{且}(a-d)<3(b-c)\begin{cases} a+d\ge 2c \Rightarrow \text{六層} \\ a+d<2c \Rightarrow \text{八層} \end{cases} \\ a+b+d\le 3c \Rightarrow \text{六層} \end{cases}$$

型二



若 $a-b=c-d$ 即 $a+d=b+c \Rightarrow$ *三層*

若 $a-b \neq c-d$ ，第三層方塊可繼續運算如下：

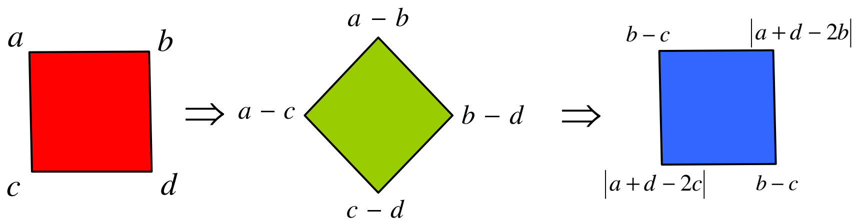


（四層）

結論：

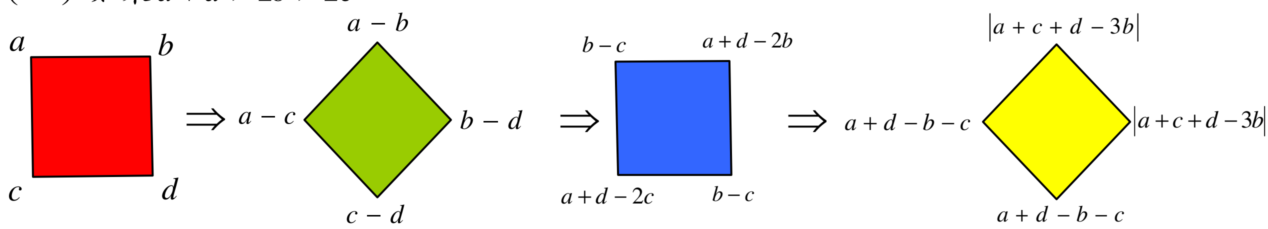
$$\begin{cases} \text{如果} a+d=b+c \Rightarrow \text{三層} \\ \text{如果} a+d \neq b+c \Rightarrow \text{四層} \end{cases}$$

型三



繼續討論 $a+d-2b$ 與 $a+d-2c$ 的正、負號情形：

（一）如果 $a+d>2b>2c$

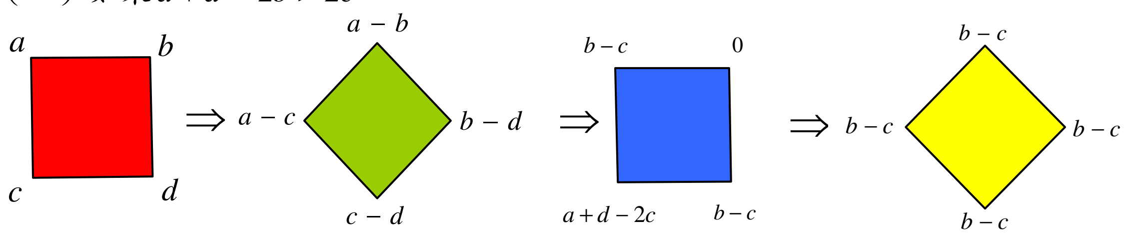


如果 $|a+c+d-3b|=a+d-b-c \Rightarrow \begin{cases} a+c+d-3b=a+d-b-c \Rightarrow b=c(*) \\ -a-c-d+3b=a+d-b-c \Rightarrow a+d=2b(*) \end{cases}$

所以 $|a+c+d-3b| \neq a+d-b-c$

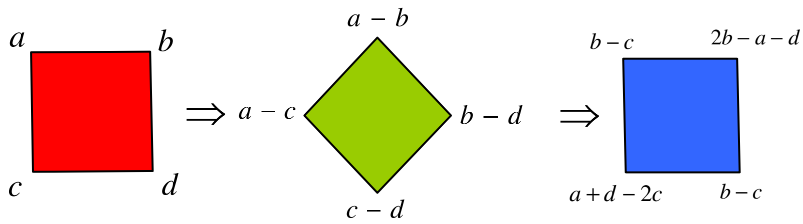
因此此數字方塊會繼續運算至第六層結束。

（二）如果 $a+d=2b>2c$



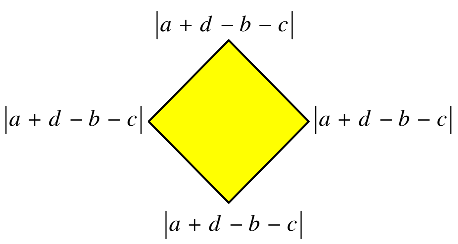
（四層）

（三）如果 $2b>a+d>2c$



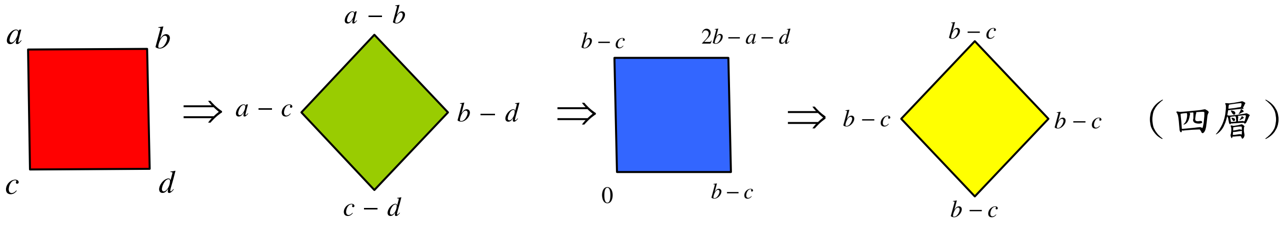
如果 $b-c=2b-a-c$ 即 $a+d=b+c \Rightarrow$ *三層*

如果 $b-c \neq 2b-a-c$，第三層方塊可繼續運算如下：

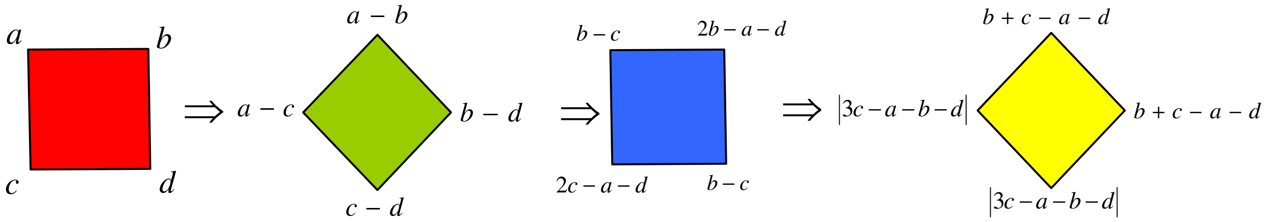


（四層）

（四）如果 $2b > a + d = 2c$



（五）如果 $2b > 2c > a + d$



如果 $|3c-a-b-d| = b+c-a-d \Rightarrow \begin{cases} 3c-a-b-d = b+c-a-d \Rightarrow b = c(*) \\ -3c+a+b+d = b+c-a-d \Rightarrow a+d = 2c(*) \end{cases}$

所以 $|3c-a-b-d| \neq b+c-a-d$

因此此數字方塊會繼續運算至第六層結束。

結論：

$$\begin{cases} a+d > 2b > 2c \Rightarrow \text{六層} \\ a+d = 2b > 2c \Rightarrow \text{四層} \\ 2b > a+d > 2c \begin{cases} a+d = b+c \Rightarrow \text{三層} \\ a+d \neq b+c \Rightarrow \text{四層} \end{cases} \\ 2b > a+d = 2c \Rightarrow \text{四層} \\ 2b > 2c > a+d \Rightarrow \text{六層} \end{cases}$$

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

國中組 數學科

佳作

030407
層出不窮？！

桃園縣立內壢國民中學

評語：
能由周遭刊物找出研究題材，想法不錯，但若能作更深入的探討較佳。