中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030405

尋找金三角

新竹縣立湖口高級中學

作者姓名：

國二 許家維 國二 陳勇志 國一 徐宏鎰

國一 吳柏均

指導老師：

鄒新全 簡世豪

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作 品 說 明 書

科　　別:數學科

組　　別:國中組

作品名稱: 尋找金三角

編　　號:

尋找金三角

一、摘要

在方格紙上的方格點是否可連成正三角形是一道蠻有趣的問題;這個問題牽扯到有理數與無理數的關係, 藉由兩種正三角形面積的算式, 可以很清楚看出矛盾之處, 並從代數中驗証幾何性質, 幾何上的直觀不見得代表其正確性, 更須以客觀精準的數據來輔助；除此之外，將正三角形條件放寬, 以代數的基礎逐一探討其可能的情況。

二、研究動機

在課堂上,數學老師正在上商高定理時,出了一道題,其題意為:在方格紙上,是否可找出三個方格點連成正三角形。起初我們認為找出來三角形應該是正三角形,並將圖形拿給老師看,但是老師說要驗證是否為真的正三角形,並提示我們用面積算法求證,因此我們利用反證法,假設方格點(正整數)可連成正三角形,因此面積為有理數;但是正三角形面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 為無理數,顯然是矛盾;所以方格點是無法連成正三角形。但是我們還不甘心,於是將條件放寬,只在平行線與不平行線中,試圖尋找正三角形,,並決定以這作為我們科展題材,以下是我們的研究過程:

三、研究目的

(一)討論方格點是否可連成正三角形？

(二)從三條平行線上(各取一點)尋找正三角形。

(三)從二條平行線及一條截線上(各取一點)尋找正三角形。。

(四)從三條線兩兩互不平行中(各取一點)尋找正三角形。

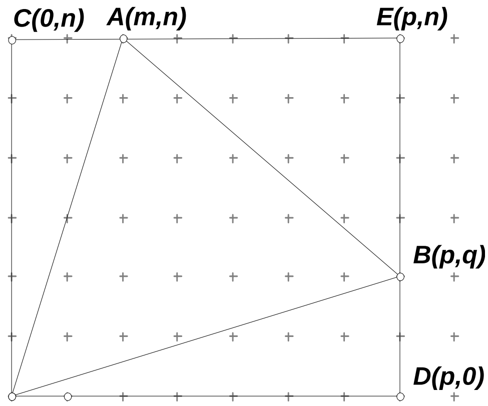
(五)從圓.扇形.橢圓.拋物線上尋找正三角形。

(六)推廣:從四條平行線、五條平行線、六條平行線中(各取一點)求得正方形、正五邊形、正六邊形。

四、研究器材

圓規、直尺、繪圖軟體 GSP.計算紙、方格紙。

五、研究過程與討論



圖(1)

（一）方格點是否可連成正三角形

【說明】

1.如右圖(1),在方格點中任取三點 A、B、O 所連成三角形,其中 m,n,p,q 均為正整數並假設所連成 ΔABO 為正三角形

2. 正三角形 ABO 面積為

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(m^2+n^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(p^2+q^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[(m-p)^2+(n-q)^2\right]$$

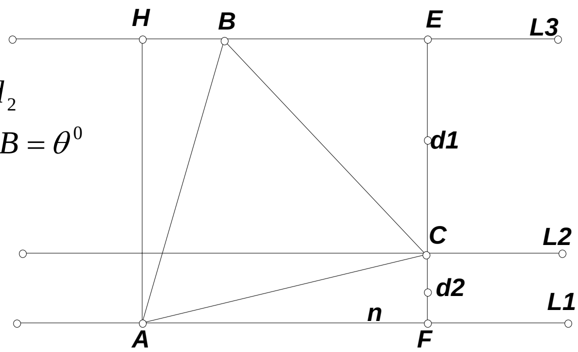
所以正三角形 ABO 面積為無理數

3.若從另一觀點來表示 ABO 面積,以矩形 ODEC 面積減去三個直角三角形面積:

正三角形 ABO 面積為 $p\times n-\frac{p\times q}{2}-\frac{m\times n}{2}-\frac{(p-m)\times(n-q)}{2}$ 為有理數

4. 根據 2.3 推論,可發現矛盾,因此方格點是無法連成正三角形。

（二)從三條平行線上,各取一點尋找正三角形



圖(2)

1【說明】

(1)如右圖(2), $L_1 // L_2 // L_3$,且間距為 d_1 、 d_2 ($d_1 > d_2$),假設 ΔABC 為正三角形令 $\angle HAB=\theta^0$,則 $\angle CAF=30-\theta$, $\angle EBC=30+\theta$,且邊長均為 a

(2)引用三角函數關係得到下列式子:

$$\begin{cases} a\times\sin(30+\theta)=d_1 ---(1) \\ a\times\sin(30-\theta)=d_2 ---(2) \\ a\times\cos\theta=d_1+d_2 ---(3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\times(\sin 30\cos\theta+\cos 30\sin\theta)=d_1 ----(1) \\ a\times(\sin 30\cos\theta-\cos 30\sin\theta)=d_2 ----(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (1)\text{-}(2)=2a\cos 30\sin\theta=d_1-d_2 \Rightarrow \sqrt{3}a\sin\theta=d_1-d_2$$

$$\Rightarrow \quad a\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}(d_1-d_2)----(4)$$

$\Rightarrow$ 將(3)式與(4)式平方和為

$$a^2=\frac{1}{3}(d_1-d_2)^2+(d_1+d_2)^2=((d_1-d_2)\tan 30)^2+(d_1+d_2)^2$$

$\Rightarrow$ 將(4)式除(3)式為 $\sqrt{3}\tan\theta=\dfrac{d_1-d_2}{d_1+d_2}$ $\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{d_1-d_2}{\sqrt{3}\left(d_1+d_2\right)}$

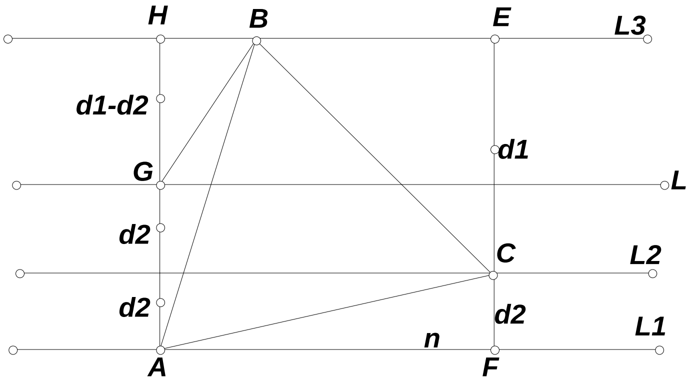
2【作圖】如圖(3)

(1) 作一平行線 L,使得

$d\left(L,L_2\right)=d\left(L_2,L_1\right)=d_2$

則 $d\left(L,L_3\right)=d_1-d_2$ 且

L 交 $\overline{AH}$ 於 G 點。



(2) 再以 G 為圓心,作直角 ΔHGB

($\angle HGB=30^0$),則 $\overline{HB}=\overline{HG}\tan 30^0=\left(d_1-d_2\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

圖(3)

(3) 連接 $\overline{AB}$,則 $\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2=\left[\left(d_1-d_2\right)\tan 30^0\right]^2+\left(d_1+d_2\right)^2$

(4) 再以 A 為圓心,$\overline{AB}$ 為半徑畫弧交 L_2 於 C 點;所以 ΔABC 為一正三角形。

3【性質】若三條平行線 $L_1 // L_2 // L_3$,且間距為 d_1、d_2 $(d_1\geq d_2)$,

(1) 正三角形邊長 $a=\sqrt{\left[\left(d_1-d_2\right)\tan 30^0\right]^2+\left(d_1+d_2\right)^2}$

(2) 轉角 θ ($\angle HAB=\theta$): $\tan\theta=\dfrac{d_1-d_2}{\sqrt{3}\left(d_1+d_2\right)}$

(3) 正三角形面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left[\dfrac{\left(d_1-d_2\right)^2}{3}+\left(d_1+d_2\right)^2\right]$

(4) 外圍矩形 AFEH 周長為:

$\overline{AH}=\overline{EF}=d_1+d_2$; $\overline{HE}=\overline{AF}\Rightarrow\overline{AF}^2=a^2-d_2{}^2$

$$\overline{AF}^2=\frac{(d_1-d_2)^2}{3}+\left(d_1+d_2\right)^2-d_2{}^2=\frac{1}{3}\left(4d_1{}^2+4d_1d_2+d_2{}^2\right)=\frac{1}{3}\left(2d_1+d_2\right)^2$$

所以 $\overline{AF}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(2d_1+d_2\right)=\left(2d_1+d_2\right)\tan 30^0$

因此,周長為

$$2\times\left(\overline{AF}+\overline{EF}\right)=2\times\left[\left(2d_1+d_2\right)\tan 30^0+\left(d_1+d_2\right)\right]=\left(2+4\tan 30^0\right)d_1+\left(2+2\tan 30^0\right)d_2$$

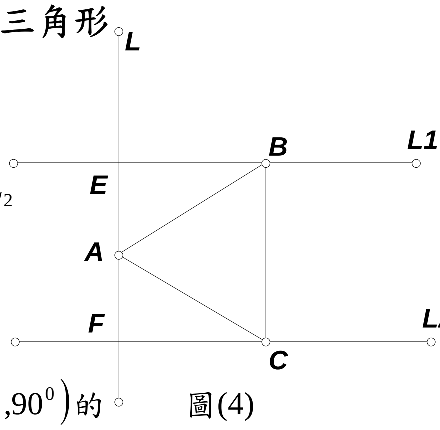
(5) 外圍矩形 AFEH 面積為: $\overline{AF}\times\overline{EF}=\left(d_1+d_2\right)\times\left(2d_1+d_2\right)\tan 30^0$

(三)從二條平行線,及一條截線上各取一點尋找正三角形

1【說明】$L\perp L_1$ ，$L\perp L_2$ ，$L_1 // L_2$ (L 為 L_1,L_2 之截線)

(1)【A 點在間距中點】

①如右圖(4)所示若 L_1,L_2 之間距為 d ,A 恰好在 L_1,L_2 間距之中點,則以 A 為圓心, $\overline{EF}=d$ 為半徑劃弧交 L_1,L_2 於 B、C 兩點,則 ΔABC 為正三角形。



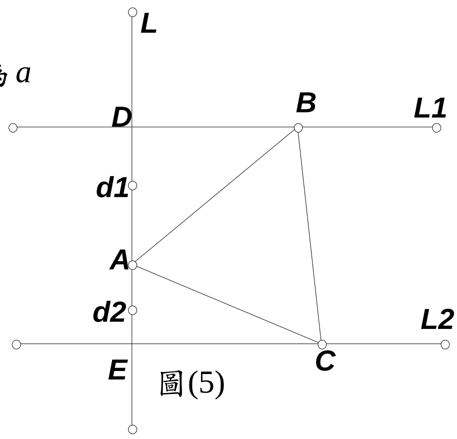
圖(4)

②因 $\overline{AB}=\overline{EF}=d$,且 $\overline{AE}=\dfrac{d}{2}$,所以 ΔAEB 為 $\left(30^0,60^0,90^0\right)$ 的直角三角形;同理, ΔAFC 亦為為 $\left(30^0,60^0,90^0\right)$ 的直角三角形故 $\angle BAC=60^0$,所以 ΔABC 為正三角形。

(2)【A 點不在間距中點】假設 ΔABC 為正三角形邊長為 a

①如右圖(5)所示, $\overline{AD}=d_1,\overline{AE}=d_2$ $\left(d_1>d_2\right)$

,令 $\angle DAB=\theta^0,\angle EAC=120-\theta^0$



圖(5)

②引用三角函數關係得到下列式子:

$$\begin{cases} a\cos\theta=d_1 ----------(1) \\ a\cos(120-\theta)=d_2 -----(2) \\ a\cos(\theta-60)=d_1+d_2 ---(3) \end{cases}$$

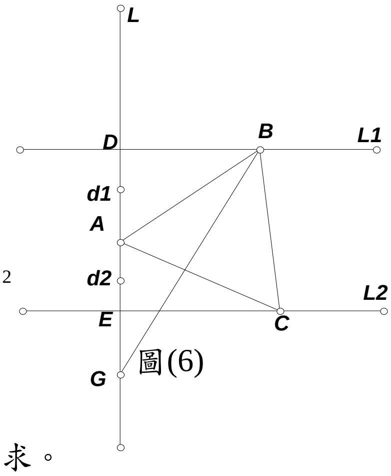
$$\Rightarrow \begin{cases} a\cos\theta=d_1 ------------------(1) \\ a\left(\cos 120^0\cos\theta+\sin 120^0\sin\theta\right)=d_2 ----(2) \\ a\left(\cos\theta c0s60^0+\sin\theta\sin 60^0\right)=d_1+d_2 ---(3) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (2)式+(3)式得 $\sqrt{3}a\sin\theta=d_1+2d_2\Rightarrow a\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(d_1+2_2\right)$--------(4)

$\Rightarrow$ (1)式與(4)式平方和為 $a^2=d_1{}^2+\dfrac{1}{3}\left(d_1+2d_2\right)^2=d_1{}^2+\left[\left(d_1+2d_2\right)\tan 30^0\right]^2$

$\Rightarrow$ (4)式除(1)式得 $\tan\theta=\dfrac{d_1+2d_2}{\sqrt{3}d_1}$

2.【作圖】如右圖(6)所示



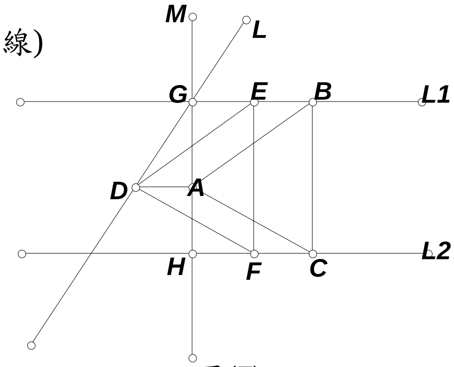
圖(6)

(1)作 A 點對稱 L_2 於 G 點,則 $\overline{AE}=\overline{EG}=d_2$,所以 $\overline{GD}=d_1+2d_2$

(2)作 $\angle DGB=30^0$,則 $\overline{DB}=(d_1+2d_2)\tan 30^0$

(3)連接 $\overline{AB}$,以 A 為圓心,$\overline{AB}$ 為半徑畫弧交 L_2 於 C 點,即為所求。

3【說明】L 不垂直 L_1,L_2 且 $L_1 // L_2$ (L 為 L_1,L_2 之截線)



圖(7)

(1)【A 點在 $\overline{GH}$ 中點】如右圖(7)所示

①若線截 L 交 L_1 於 G 點,則作 M 垂直 L_1,L_2

因此,取 $\overline{GH}$ 之中點 A,並仿照上述方法做出

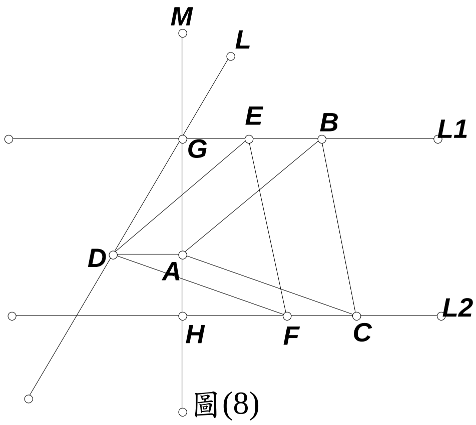
正三角形 ABC。

②將 A 點平移至截線 L 上於 D 點,並做

$\overline{DE} // \overline{AB}$;$\overline{DF} // \overline{AC}$,則四邊形 ADEB、ADFC 為平行四邊形;

所以 $\overline{AB}=\overline{DE}$;$\overline{AC}=\overline{DF}$ 且 $\angle BAC=\angle EDF=60^0$,故 $\overline{EF}=\overline{BC}$

所以 $\Delta ABC \cong \Delta DEF$;ΔDEF 為正三角形。



圖(8)

(2)【A 點不在 $\overline{GH}$ 中點】如右圖(8)所示

①若線截 L 交 L_1 於 G 點,則作 M 垂直 L_1,L_2

若 $\overline{GA}=d_1,\overline{AH}=d_2$ 並仿照上述方法做出

正三角形 ABC;$\overline{AB}^2=d_1{}^2+\frac{1}{3}(d_1+2d_2)^2$ 。

②將 A 點平移至截線 L 上於 D 點,並做

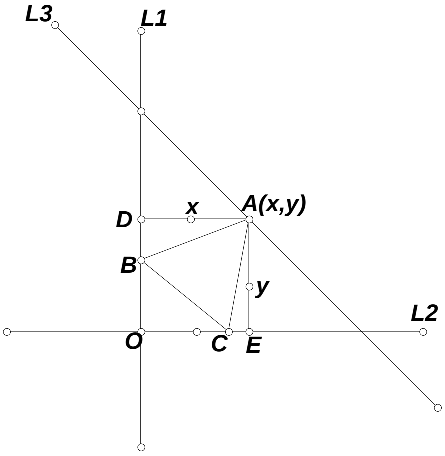
$\overline{DE} // \overline{AB}$;$\overline{DF} // \overline{AC}$,則四邊形 ADEB、ADFC 為平行四邊形;

所以 $\overline{AB}=\overline{DE}$;$\overline{AC}=\overline{DF}$ 且 $\angle BAC=\angle EDF=60^0$,故 $\overline{EF}=\overline{BC}$

所以 $\Delta ABC \cong \Delta DEF$;ΔDEF 為正三角形。

(四)從三條線上(兩兩互不平行)各取一點,尋找正三角形。

1.【說明】$L_1 \perp L_2, L_3$不垂直L_1，L_2，如圖(9)所示：



圖(9)

(1)在L_3任取一點$A(x,y)$,作$\overline{AD} \perp L_1$；$\overline{AE} \perp L_2$；則

$\overline{AD} = x$；$\overline{AE} = y$;並假設正三角形 ABC 邊長為a

且假設$\angle BAD = \theta$,引用三角函數關係得到下列式子:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin(\theta + 60) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a(\sin\theta\cos 60 + \cos\theta\sin 60) \end{cases}$$

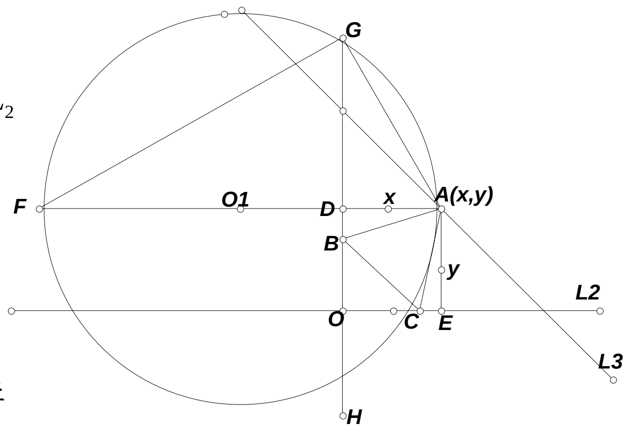
$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta} \Rightarrow 2y\cos\theta = x\sin\theta + \sqrt{3}x\cos\theta$$

$$\Rightarrow \left(2y - \sqrt{3}x\right)\cos\theta = x\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{2y - \sqrt{3}x}{x}$$

(2). $$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ 2y = a\sin\theta + \sqrt{3}a\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a\cos\theta \\ 2y - \sqrt{3}x = a\sin\theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(2y - \sqrt{3}x\right)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}xy = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy = (\frac{a}{2})^2$$

2.【作圖】如右圖(10)所示



圖(10)

(1)在L_3任取一點$A(x,y)$,作$\overline{AD} \perp L_1$；$\overline{AE} \perp L_2$

；則$\overline{AD} = x$；$\overline{AE} = y$。

(2)延長$\overline{AD}$,作$\overline{AF} = 4\overline{AD} = 4x$,則$\overline{FD} = 3x$

並取$\overline{AF}$之中點O_1,並以O_1為圓心,$\overline{AO_1}$為半徑

畫圓交L_1於 G 點,則$\overline{GD}^2 = \overline{FD} \times \overline{AD}$ ($\because \Delta GDF \approx \Delta ADG$)

所以$\overline{GD} = \sqrt{\overline{FD} \times \overline{AD}} = \sqrt{3x.x} = \sqrt{3}x$

(3)作 D 對稱L_2於 H 點,則$\overline{DH} = 2y$,並以 H 為圓心,$\overline{GD} = \sqrt{3}x$為半徑畫弧交$L_1$於 B 點。

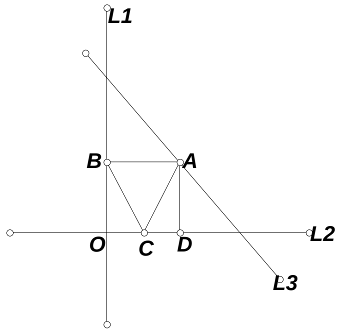
則$\overline{DB} = 2y - \sqrt{3}x$，$\overline{AD} = x$。

(4)連接$\overline{AB}$,則$\tan\theta = \dfrac{2y - \sqrt{3}x}{x}$ ($\angle BAD = \theta$)

$$\overline{AB}^2 = 4x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}xy$$

然後以 A 為圓心, $\overline{AB}$ 為半徑畫弧交 L_3 於 C 點;

則 ΔABC 為一個正三角形。



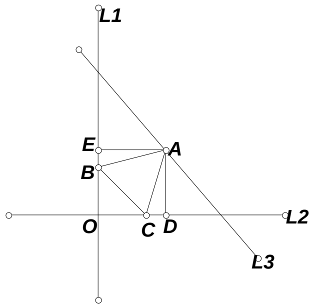
3.【討論】 $A(x,y)$ 為 L_3 任一點, 且 $\tan\theta = \dfrac{2y-\sqrt{3}x}{x}$ ($x \neq 0$)

(1)若 $2y = \sqrt{3}x$,也就是 $\tan\theta = \dfrac{2y-\sqrt{3}x}{x} = 0$,所以 $\theta = 0^0$

(2)若 $y = x$,也就是 $\tan\theta = \dfrac{2x-\sqrt{3}x}{x} = 2-\sqrt{3} = 0.268$,所以 $\theta = 15^0$

(3)若 $\tan\theta = \dfrac{2y-\sqrt{3}x}{x} = \dfrac{y}{x}$,則 $2y-\sqrt{3}x = y$, $y = \sqrt{3}x$

因此,若 $y = \sqrt{3}x$,則正三角形 ABC 不存在。



4.【說明】 L_1 、 L_2 、 L_3 不互相平行,也不垂直。如圖(11)所示:

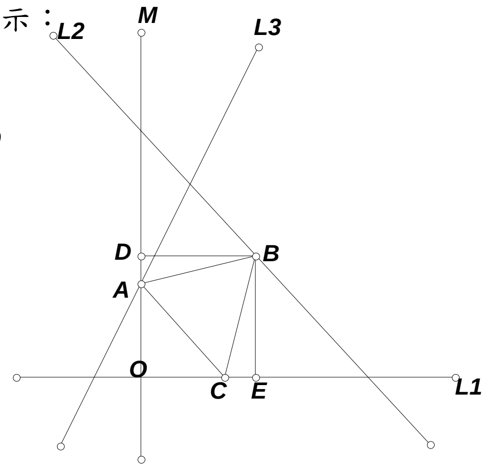
(1).在 L_3 任取一點 A,並過 A 點作 L_1 垂直線 M

(2)若 $\overline{AD} = d_1$, $\overline{AO} = d_2$, $\angle BAD = \theta$, $\angle CAO = 120-\theta$

引用三角函數關係得到下列式子:

$$\begin{cases} a\cos\theta = d_1 ---------- (1) \\ a\cos(120-\theta) = d_2 ------ (2) \\ a\cos(\theta-60) = d_1 + d_2 --- (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\cos\theta = d_1 --------------------(1) \\ a\left(\cos 120^0 \cos\theta + \sin 120^0 \sin\theta\right) = d_2 ----(2) \\ a\left(\cos\theta c0s60^0 + \sin\theta \sin 60^0\right) = d_1 + d_2 --- (3) \end{cases}$$



圖(11)

$\Rightarrow$ (2)式+(3)式得 $\sqrt{3}a\sin\theta = d_1 + 2d_2 \Rightarrow a\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(d_1 + 2_2)$--------(4)

$\Rightarrow$ (1)式與(4)式平方和為 $a^2 = {d_1}^2 + \dfrac{1}{3}(d_1 + 2d_2)^2 = {d_1}^2 + \left[(d_1 + 2d_2)\tan 30^0\right]^2$

$\Rightarrow$ (4)式除(1)式得 $\tan\theta = \dfrac{d_1 + 2d_2}{\sqrt{3}d_1}$

5.【作圖】如圖(12)所示

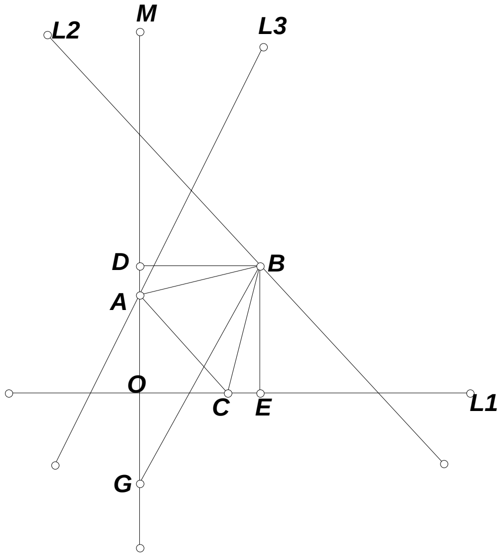
(1).在 L_3 任取一點 A,並過 A 點作 L_1 垂直線 M

(2)作 A 點對稱 L_2 於 G 點,則 $\overline{AE}=\overline{EG}=d_2$,所以 $\overline{GD}=d_1+2d_2$

(3)作 $\angle DGB=30^0$,則 $\overline{DB}=\left(d_1+2d_2\right)\tan 30^0$

(4)連接 $\overline{AB}$,以 A 為圓心, $\overline{AB}$ 為半徑畫弧交 L_2 於 C 點,

則 ΔABC 為正三角形。



圖(12)

(五)從圓、扇形、橢圓、拋物線上,尋找正三角形。

1.【圓形】如圖(13)所示

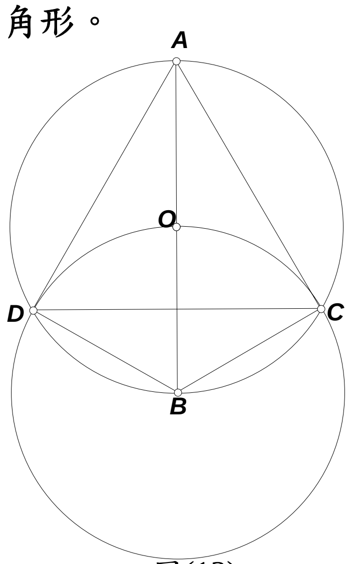
(1)【作圖】

① $\overline{AB}$ 為直徑,O 為圓心, $\overline{BO}=r$ (半徑)

②以 B 為圓心, $\overline{BO}=r$ 為半徑畫圓交圓 O 於 C、D 兩點

③連接成 ΔACD,則 $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{CD}=\sqrt{3}r$

ΔACD 為正三角形。



圖(13)

(2)【說明】

①在 ΔABC 中, $\overline{AB}=2r$, $\overline{BC}=r$;且 $\angle ACB=90^0$

所以 $\overline{AC}=\sqrt{3}r$; $\angle CAB=30^0$ 。

②同理, $\overline{AD}=\sqrt{3}r$; $\angle DAB=30^0$ 。

③承①②，$\angle A = 30 + 30 = 60^0$，$\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{CD} = \sqrt{3}r$

所以 ΔACD 為正三角形。

2.【扇形】如圖(14)所示

(1)【說明】

①假設正三角形 ABC 邊長為 a, $\overline{AB} = \overline{AF} = \overline{AC} = r$

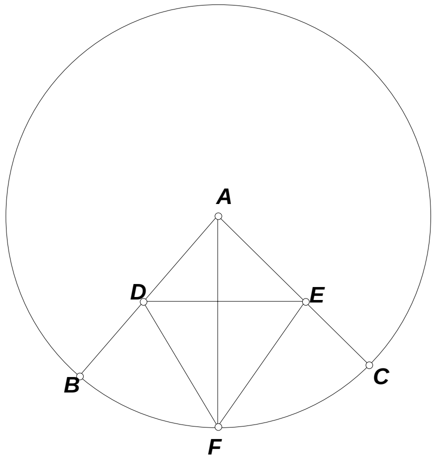
$\angle BAF = \theta$ 並令 $\overline{AD} = x$

②則 $x\sin\theta = a/2 \Rightarrow 2x\sin\theta = a$

③ $\dfrac{\overline{FM}}{DM} = \sqrt{3} = \dfrac{r - x\cos\theta}{x\sin\theta} \Rightarrow \sqrt{3}x\sin\theta = r - x\cos\theta$

$\Rightarrow x\left(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta\right) = r \quad \Rightarrow x = \dfrac{r}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$

$\Rightarrow a = 2x\sin\theta = \dfrac{2r\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{2r}{\sqrt{3} + \cot\theta}$



圖(14)

(2)【討論】

①當 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 時, $a = \dfrac{2r}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \dfrac{r}{\sqrt{3}} \Rightarrow \Delta DEF$ 面積為 $\dfrac{\sqrt{3}r^2}{12}$

②當 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 時, $a = \dfrac{2r}{\sqrt{3} + 1} = \left(\sqrt{3} - 1\right)r \Rightarrow \Delta DEF$ 面積為 $\left(\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}\right)r^2$

③當 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 時, $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r \Rightarrow \Delta DEF$ 面積為 $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}r^2$

④當 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 時, $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}r \Rightarrow \Delta DEF$ 面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}r^2$

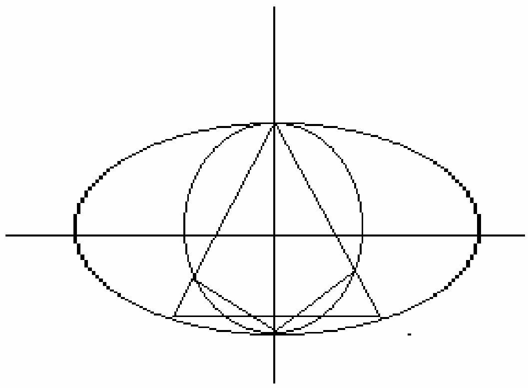
3.【橢圓】如圖(15)所示: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(1)【作圖】

①以 O 為圓心，$\overline{AO} = b$ 為半徑畫圓,

②再以 D 為圓心，b 為半徑畫弧交圓於 X 、Y 兩點。

③連接 $\overline{AX}$ 、$\overline{AY}$；並延長直線交橢圓於 B 、C 兩點;則 ΔABC 為正三角形。



圖（15）

(2)【說明】橢圓方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b$)

①假設正三角形 ABC 邊長為 k ,則 $\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}k$,$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}k-b$

②直線 AC 通過 $A(0,b)$ 且 $m_{AC}=\sqrt{3}$,所以直線 AC 方程式為

$(y-b)=\sqrt{3}x$ 代入橢圓方程式中 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

③ $\Rightarrow \frac{(y-b)^2}{3a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow 3a^2y^2+b^2(y-b)^2=3a^2b^2$

$\Rightarrow (3a^2+b^2)y^2-2b^3y+b^4-3a^2b^2=0$

利用根與係數的關係,已知一根為 $A(0,b)$ 之 y 座標 b ;另一根為 C 點之 y 座標 β

所以 $b+\beta=\frac{2b^3}{3a^2+b^2}$,$\Rightarrow \beta=\frac{2b^3}{3a^2+b^2}-b$

④又 C 點之 y 座標為 $\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}k-b$

所以 $\beta=\overline{OM} \Rightarrow \frac{2b^3}{3a^2+b^2}-b=\frac{\sqrt{3}k}{2}-b$

$\Rightarrow \frac{2b^3}{3a^2+b^2}=\frac{\sqrt{3}k}{2}$

$\Rightarrow k=\frac{4b^3}{\sqrt{3}(3a^2+b^2)}=\frac{4\sqrt{3}b^3}{3(3a^2+b^2)}$ 為正三角形 ABC 邊長。

4.【拋物線】如圖(16)所示: $y=ax^2$ ($x^2=\frac{1}{a}y$,$4c=\frac{1}{a}$)

(1)【說明】

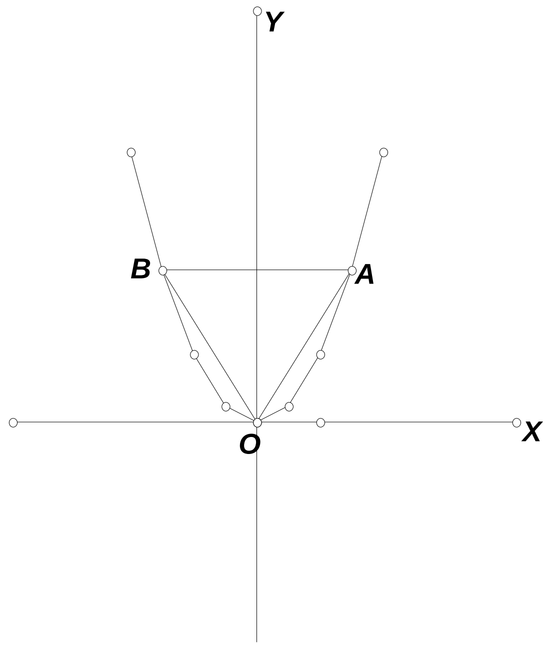
①假設正三角形 ABO, $A(t,at^2)$、$B(-t,at^2)$

②在直角 ΔAMO 中

$\frac{\overline{MO}}{\overline{AM}}=\sqrt{3}=\frac{at^2}{t} \Rightarrow at=\sqrt{3}$

$\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{a}=4\sqrt{3}c$

③所以正三角形 ABO 邊長為 $2t=\frac{2\sqrt{3}}{a}=8\sqrt{3}c$



圖(16)

正三角形 ABO 面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(8\sqrt{3}c\right)^2 = 48\sqrt{3}c^2$

(2)【作圖】如圖(17)所示

①通過此拋物線焦點,作正焦弦 $\overline{CD} = 4c$

②延伸直線 $\overline{CD}$ 作 $\overline{CE} = 3\overline{CD}$ ；$\overline{CE} = 12c$

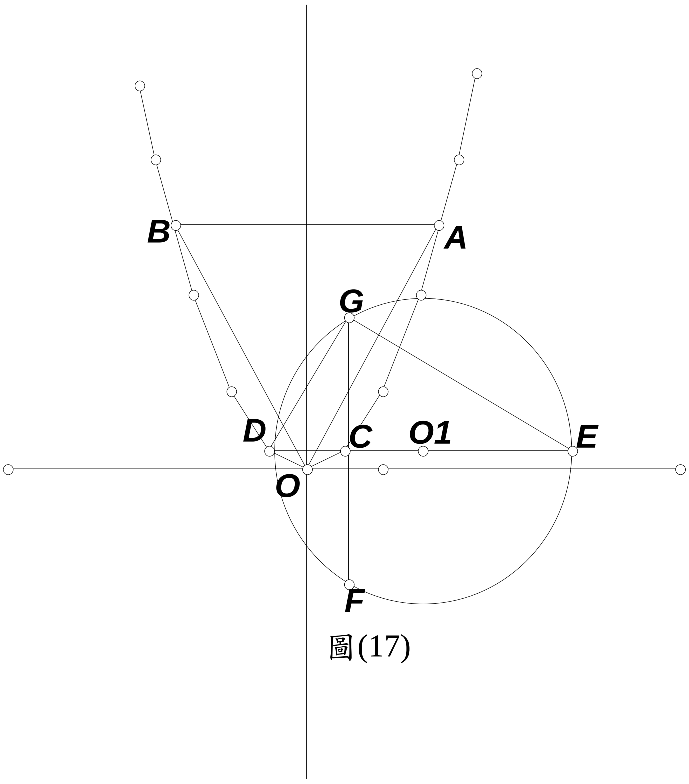
③作 $\overline{DE}$ 中點 O_1,並以 O_1 為圓心畫圓

④過 C 點作垂直線,交圓於 G、F 兩點

則 $\overline{GF} = 8\sqrt{3}c$ 為正三角形邊長。

⑤最後,以 O 為圓心, $\overline{GF} = 8\sqrt{3}c$ 為半徑畫弧

交拋物線於 A、B 兩點,則 ΔABO 為正三角形。



圖(17)

(六)推廣:尋找正方形、正五邊形、正六邊形

1.【正方形】如圖(18)所示

(1)【說明】$L_1 // L_2 // L_3 // L_4$,平行線間距分別為 d_1 、 d_2 、 d_3

①在 L_3 上任取一點 A,並假設正方形邊長為 a ，$\angle BAH = \theta$ 。

②分別過 A、C 兩點作垂直線,交 L_1 、 L_4 於 H、G、E、F 四點。

則 $\Delta HAB \cong \Delta GDA \cong \Delta FCD \cong \Delta EBC$

$\therefore \overline{AH} = \overline{CF}$

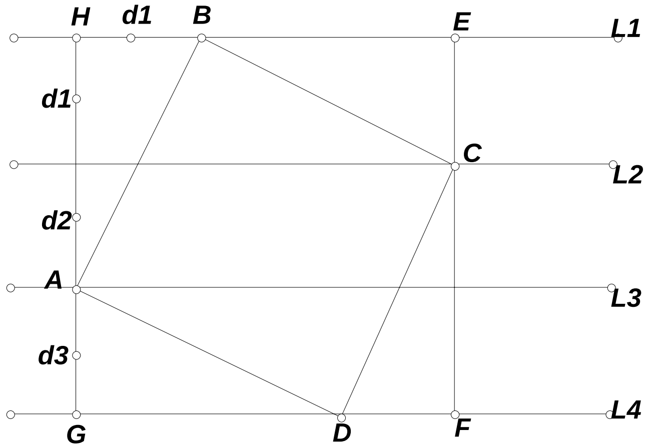
$\Rightarrow d_1 + d_2 = d_2 + d_3$

$\Rightarrow d_1 = d_3$

③在直角 ΔHAB 中,根據商高定理,

$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2$

$\Rightarrow a^2 = (d_1 + d_2)^2 + d_1^2$



圖(18)

$\Rightarrow$ 正方形 ADCB 面積為 $(d_1 + d_2)^2 + d_1^2$ 。

④轉角 θ ($\angle BAH = \theta$)； $\tan\theta = \dfrac{\overline{HB}}{HA} = \dfrac{d_1}{d_1 + d_2}$ 。

⑤ $\dfrac{\text{正方形}ABCD}{\text{正方形}HEFG} = \dfrac{(d_1 + d_2)^2 + d_1^2}{(2d_1 + d_2)^2}$

(2)【作圖】

①在 L_3 上任取一點 A,並過 A 點作垂直線交 L_1 、 L_4 於 H、G 兩點。

②以 H 為圓心, d_1 為半徑畫弧交 L_1 於 B 點,交 L_4 於 D 點

並連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$;則 $\overline{AB} = \overline{AD}$ (為正方形邊長)。

③以 B 為圓心, $\overline{AB}$ 為半徑畫弧,交 L_2 於 C 點；

連接 $\overline{CB}$ 、 $\overline{CD}$,則四邊形 ABCD 為正方形。

2.【正五邊形】

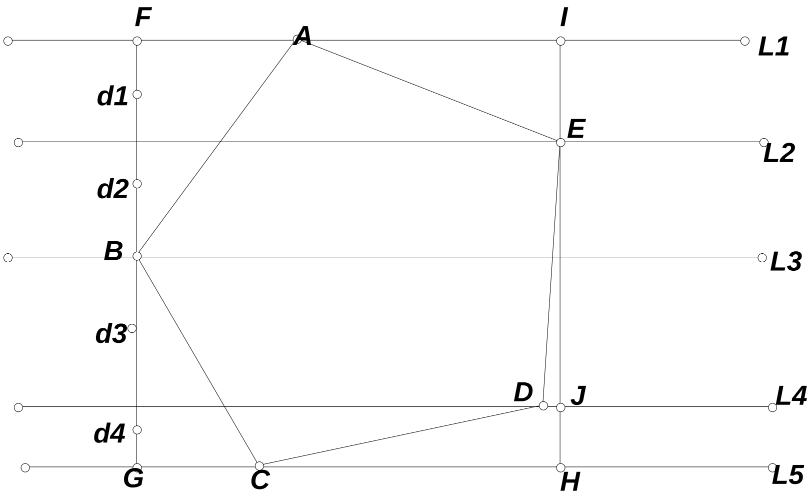
如圖(19)所示 $L_1 // L_2 // L_3 // L_4 // L_5$,平行線間距分別為 d_1 、 d_2 、 d_3 、 d_4

(1)【說明】假設正五邊形 ABCDE 邊長為a；$\angle CBG=\theta$；

則$\angle DCH=\theta-18$，$\angle BAF=\theta+18$，$\angle IAE=54-\theta$，$\angle EDJ=54+\theta$

①引用三角函數關係,列出下列式子:

$$\begin{cases} a\cos\theta=d_3+d_4 --------(1) \\ a\sin(\theta+18)=d_1+d_2 ------(2) \\ a\sin(\theta-18)=d_4 ---------(3) \\ a\sin(54+\theta)=d_2+d_3 ------(4) \\ a\sin(54-\theta)=d_1 ---------(5) \end{cases}$$



圖(19)

$$\Rightarrow \begin{cases} a(\sin 54\cos\theta+\cos 54\sin\theta)=d_2+d_3 ---(4) \\ a(\sin 54\cos\theta-\cos 54\sin\theta)=d_1 -----(5) \end{cases}$$

(4)式+(5)式$\Rightarrow 2a\sin 54\cos\theta=d_1+d_2+d_3 ---(6)$

(4)式-(5)式$\Rightarrow 2a\cos 54\sin\theta=d_2+d_3-d_1 ----(7)$

將(1)式代入(6)式得$(d_3+d_4)\sin 54=\dfrac{d_1+d_2+d_3}{2}\Rightarrow \sin 54=\dfrac{d_1+d_2+d_3}{2(d_3+d_4)}$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{d_1+d_2+d_3}{2(d_3+d_4)}\Leftrightarrow\frac{d_1+d_2+d_3}{d_3+d_4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}---(8)$$

②根據(6)式、(7)式整理出:

$$a\sin\theta=\frac{d_2+d_3-d_1}{2}\csc 36---(9)$$

$$a\cos\theta=\frac{d_1+d_2+d_3}{2}\sec 36----(10)$$

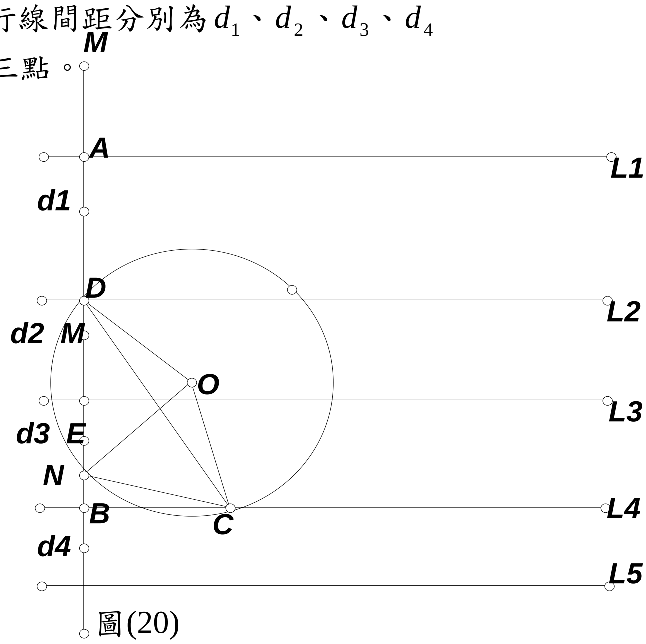
(9)式、(10)式平方和:$a^2=\left[(\dfrac{d_1+d_2+d_3}{2})\sec 36\right]^2+\left[(\dfrac{d_2+d_3-d_1}{2})\csc 36\right]^2$

$$\Leftrightarrow (a\sin 36)^2=(\frac{d_1+d_2+d_3}{2}\tan 36)^2+(\frac{d_2+d_3-d_1}{2})^2$$

③將(9)式除(10)式得:$\tan\theta=\dfrac{(d_2+d_3-d_1)}{(d_2+d_3+d_1)\tan 36}$

(2)【作圖】如圖(20)所示 $L_1 // L_2 // L_3 // L_4 // L_5$,平行線間距分別為 d_1、d_2、d_3、d_4

①作一垂直線 M,交 L_1 、 L_2 、 L_4 於 A、D、B 三點。



圖(20)

②在 M 上取一點 E 使得 $\overline{AD} = \overline{DE} = d_1$

並取 $\overline{AB}$ 之中點 M,及 $\overline{EB}$ 中點 N

所以 $\overline{MB} = \dfrac{d_1 + d_2 + d_3}{2}$; $\overline{NB} = \dfrac{d_2 + d_3 - d_1}{2}$

③過 D 點作 $\overleftrightarrow{DC}$ 與 M 夾 36^0 角

則 $\overline{BC} = (\dfrac{d_1 + d_2 + d_3}{2})\tan 36^0$

連接 $\overline{NC}$,則在直角三角形 NBC 中,

$$\overline{NC}^2 = \overline{NB}^2 + \overline{BC}^2 = (\frac{d_2 + d_3 - d_1}{2})^2 + (\frac{d_1 + d_2 + d_3}{2}\tan 36^0)^2$$

$$\Rightarrow \text{又 } a^2 = \left[(\frac{d_1 + d_2 + d_3}{2})\sec 36\right]^2 + \left[(\frac{d_2 + d_3 - d_1}{2})\csc 36\right]^2$$

$$\Leftrightarrow (a\sin 36)^2 = (\frac{d_1 + d_2 + d_3}{2}\tan 36)^2 + (\frac{d_2 + d_3 - d_1}{2})^2$$

$\therefore \overline{NC} = a\sin 36^0$

④連接 ΔMNC,並分別作三邊之中垂線,求得外心 O,則圓 O 為 ΔMNC 之外接圓;並根據正弦定律:

$$\frac{\overline{NC}}{\sin(\angle CMN)} = \frac{a\sin 36^0}{\sin 36^0} = 2R \Rightarrow a = 2R \text{ (R 為外接圓半徑)}$$

所以正五邊形邊長 $a = 2R$ 為外接圓直徑。

⑤最後,以 D 為圓心,$2\overline{OC}$ 為半徑畫弧,分別交 L_1 、 L_3 、 L_4 、 L_5 四點,

並連成正五邊形。

3.【正六邊形】

(1)【說明】

①如圖(21)所示 $L_1 // L_2 // L_3 // L_4 // L_5 // L_6$,平行線間距分別為

d_1 、 d_2 、 d_3 、 d_4 、 d_5

假設正六邊形 ABCDE 邊長為 a ; $\angle BAG = \angle EDJ = \theta$;

則 $\angle BCH = \angle KFE = 30 - \theta$, $\angle DCI = \angle AFN = 30 + \theta$

②利用對稱概念,可得知 $\Delta FAN \cong \Delta CDI$ ； $\Delta BCH \cong \Delta EFK$ ； $\Delta BAG \cong \Delta EDJ$

$\Rightarrow \overline{AG} = \overline{DJ} \Rightarrow d_3 + d_4 = d_3 + d_2 \Rightarrow d_2 = d_4$

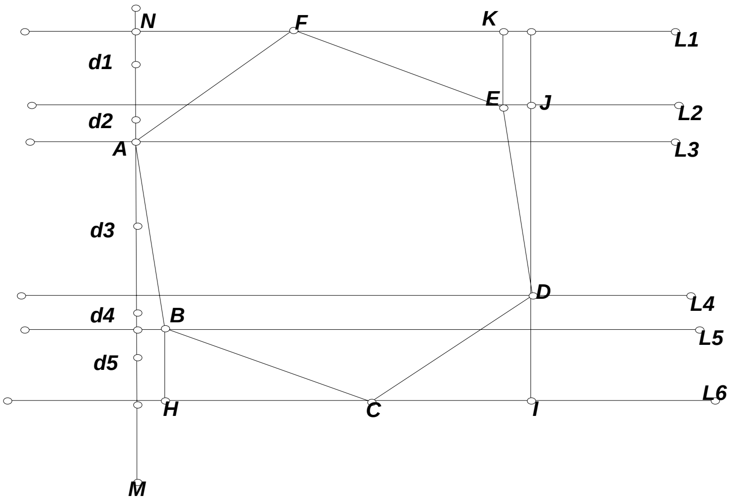
$\Rightarrow d_4 + d_5 = d_1 + d_2$

$\Rightarrow d_1 = d_5$

③利用三角函數關係,列出下列式子:

$$\begin{cases} a\cos\theta = d_3 + d_4 = d_3 + d_2 ---(1) \\ a\sin(30+\theta) = d_1 + d_2 ------(2) \\ a\sin(30-\theta) = d_5 = d_1 ------(3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\cos\theta = d_2 + d_3 \\ a(\sin 30\cos\theta + \cos 30\sin\theta) = d_1 + d_2 \\ a(\sin 30\cos\theta - \cos 30\sin\theta) = d_1 \end{cases}$$



圖（21）

$\Rightarrow$ (2)式-(3)式得 $2a\cos 30\sin\theta = d_2$

$\Rightarrow \sqrt{3}a\sin\theta = d_2 \Rightarrow a\sin\theta = \dfrac{d_2}{\sqrt{3}} ---(4)$

$\Rightarrow$(4)式與(3)式平方和為 $a^2 = \dfrac{{d_2}^2}{3} + (d_2 + d_3)^2 ----(5)$

$\Rightarrow a^2 = (\dfrac{d_2}{\sqrt{3}})^2 + (d_2 + d_3)^2 \Rightarrow a^2 = (d_2\tan 30)^2 + (d_2 + d_3)^2$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{d_1}{\sqrt{3(d_1 + d_2)}} = \dfrac{d_1 / \sqrt{3}}{(d_1 + d_2)}$

(2)【作圖】

①如圖(22)所示

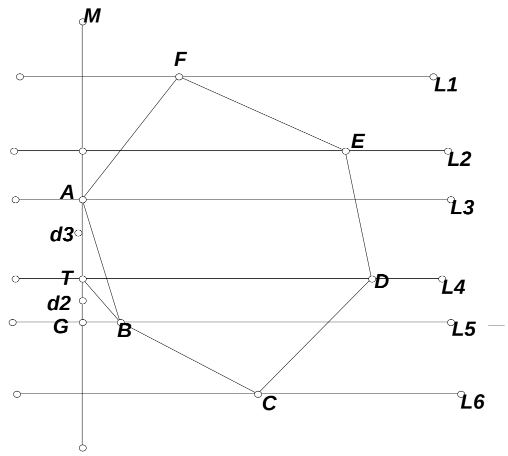
作一垂直線 M 垂直 L_1、L_2、L_3、L_4、L_5、L_6

並交 L_3、L_4、L_5 於 A、T、G 三點

$\therefore \overline{AG} = d_2 + d_3$

②過 T 點作 $\overleftrightarrow{TB}$ 與 M 夾角 30^0 交 L_5 於 B 點

$, \therefore \overline{GB} = d_2\tan 30^0 = \dfrac{d_2}{\sqrt{3}}$



圖(22)

③連接 $\overline{AB}$,則 $\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GB}^2 = (\dfrac{d_2}{\sqrt{3}})^2 + (d_2 + d_3)^2$ (商高定理)

④最後以 A 為圓心, $\overline{AB}$ 為半徑畫弧,交平行線於六點,並連成正六邊形

ABCDEFG。

五、結論

（一）利用反證法推論在方格紙上,格子點無法連成正三角形:

$\Delta ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 為無理數與格子點所算出 ΔABC 面積=

$p\times n-\frac{p\times q}{2}-\frac{m\times n}{2}-\frac{(p-m)\times(n-q)}{2}$ 為有理數矛盾。

（二）在三條平行線上(間距 $d_1>d_2$),各取一點,連成正三角形邊長為 a

正三角形 ΔABC 與鉛直線夾角 θ; $\tan\theta=\frac{(d_1-d_2)\tan 30^0}{(d_1+d_2)}$

$a^2=((d_1-d_2)\tan 30^0)^2+(d_1+d_2)^2$

（三）在兩條平行線及一條截線上各取一點,連成正三角形邊長為 a:
在截線上任取一點 A,並作鉛直線,將 A 點平移至鉛直線上於 D 點,
則 D 點與兩平行線間距分別為 d_1 、 d_2;然後仿照(二)作法,做出
正三角形 DEF;最後,再將 ΔDEF 平移回去;所以 $\Delta ABC\cong\Delta DEF$ 。

（四）在三條平行線(兩兩互不平行)上各取一點,連成正三角形邊長為 a:

1. 首先,考慮 $L_1\perp L_2$, L_3 不垂直 L_1 , L_2 在 L_3 任取一點 $A(x,y)$,作

$\overline{AD}\perp L_1$; $\overline{AE}\perp L_2$;則 $\overline{AD}=x$; $\overline{AE}=y$; $\tan\theta=\frac{2y-\sqrt{3}x}{x}$ ($\angle BAD=\theta$)

$\Rightarrow x^2+\left(2y-\sqrt{3}x\right)^2=a^2$

2. 然後考慮 L_1 、 L_2 、 L_3 不互相平行,也不垂直:在 L_3 上任取一點 A;
並過 A 點做 $M\perp L_1$;最後仿照上述 1 作法,做出正三角形 ABC。

（五）在圓、扇形、橢圓、拋物線上取三點,連成正三角形邊長為 a:

1.【圓形】正三角形邊長為 $a=\sqrt{3}r$

2.【扇形】正三角形邊長 $\Rightarrow a=2x\sin\theta=\frac{2r\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}=\frac{2r}{\sqrt{3}+\cot\theta}$

3.【橢圓】正三角形邊長 $\Rightarrow a=\frac{4b^3}{\sqrt{3}\left(3a^2+b^2\right)}=\frac{4\sqrt{3}b^3}{3\left(3a^2+b^2\right)}$

4.【拋物線】正三角形邊長 $\Rightarrow a=8\sqrt{3}c$

（六）推廣:從平行線之間尋找正方形、正五邊形、正六邊形

1.【正方形】$L_1 // L_2 // L_3 // L_4$,平行線間距分別為 d_1 、 d_2 、 d_3;

條件 $d_1 = d_3 \Rightarrow a^2 = (d_1 + d_2)^2 + d_1^{\,2}$ 轉角 $\theta(\angle BAH = \theta)$;

$\tan\theta = \dfrac{\overline{HB}}{HA} = \dfrac{d_1}{d_1 + d_2}$ 。

2.【正五邊形】$L_1 // L_2 // L_3 // L_4 // L_5$,平行線間距分別為 d_1、d_2、d_3、d_4

條件 $\dfrac{d_1 + d_2 + d_3}{d_3 + d_4} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$;

$$a^2 = \left[(\frac{d_1 + d_2 + d_3}{2}) \sec 36 \right]^2 + \left[(\frac{d_2 + d_3 - d_1}{2}) \csc 36 \right]^2$$

$\tan\theta = \dfrac{(d_2 + d_3 - d_1)}{(d_2 + d_3 + d_1)\tan 36}$ 。

3.【正六邊形】$L_1 // L_2 // L_3 // L_4 // L_5 // L_6$,平行線間距分別為 d_1、d_2、d_3、d_4 、 d_5

條件 $d_1 = d_5; d_2 = d_4 \Rightarrow a^2 = (d_2 \tan 30)^2 + (d_2 + d_3)^2$

$\tan\theta = \dfrac{d_1}{\sqrt{3(d_1 + d_2)}}$ 。

六、參考書目

1.周炳男主編,高中數學課本第二冊,修訂版,台南,南一書局出版

P80~209;P210~P254，93 年。

2. 黃經良主編, 國中數學課本第三冊,初版,台南，翰林企業股份有限公司出版，P49~69，94 年 2 月。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國中組 數學科

030405

尋找金三角

新竹縣立湖口高級中學

評語：

考慮在給定三平行線，或兩平行線和一截線……等不同的條件下正三角形的作圖法。這其實是已有的結果，雖然作者考慮了其它的變形問題。但與原問題並沒有太多的不同，在作品最後提及的正多邊形作圖反而是比較有趣的結果。若能在這一部份作更多的討論會更好。