中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第三名

030404
單位分數的探密

花蓮縣立花崗國民中學

作者姓名：
國二 將選平 國二 李奕璟 國一 陳彥家

指導老師：
陳貞泰 戴麗卿

壹、 摘要:

本研究的目的是在對$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$作探討，我們以$\frac{2}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$為基礎,推至$\frac{3}{n}$,再經由操作 5000 以內的所有$\frac{4}{n}$化成$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的所有方式,進而找出規律性,以期導出$\frac{4}{n}$的所有三項表達式

貳、研究的動機：

去年(93)暑假,閒來無聊,順手翻起書櫃裡的一本書---「不知道的世界(數學篇)」(李毓佩著),在看了前兩篇「簡單卻解決不了」之後,就引起我莫大的震撼而久久不能自已。其中有一段的敘述如下:

「問題出現在把一個真分數分解成兩個或兩個以上的單位分數之和的上面。比如$\frac{4}{5}$雖然不能分解成兩個單位分數之和,但可以分解成 3 個單位分數之和,即$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$。問$\frac{4}{n}$能否分解成 3 個單位分數之和？用公式表達能否找到 x,y,z 使得式子$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 成立。」

「1950年,匈牙利數學家愛爾特希猜想:對每一個正整數n($n\ge 4$),方程式$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$一定有正整數解。數學家斯特勞斯(Strauss)証明了$n<5000$時,愛爾特希的猜想是正確的:1964年,中國數學家柯召証明了$n<400000$時,愛爾特希的猜想是正確的:數學家弗朗西沙因(Francesch ine)証明了,對於不超過1億的自然數n,愛爾特希的猜想是正確的:但是對於一般的自然數n,問題還沒解決。」[註:91年「數學傳播」第26卷第四期第52頁至第57頁「古埃及的單位分數問題」(文耀光教授著)中亦曾提及]

這一段的敘述可就激起向來不服輸的我,於是我就找了幾位志同道合的同學,開始蒐集資料,並著手証明推討,遇到困難就隨時請教師長及爸媽。在師長及爸媽的指導下,我們終於解決了一小部分的問題;至於尚未解決的問題,還要煩請教授們給予指導。以下就是我們的研究過程與方法:

參、研究的目的：

一、探討 0 與 1 之間的分數可表成「有限項」相異「單位分數」之和的理由

二、找出$\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\frac{4}{n}$的表達式

肆、解釋名詞：

「單位分數」:就是指分母是正整數,而分子是 1 的正分數。因為其分子為 1,所以也被稱為「單分子分數」或「單分數」;又由於最早在埃及的"蘭特紙草書"上發現這種分數,所以也叫"古埃及分數."

伍、預備知識與定理：

(一) 最簡真分數$\frac{m}{n}$都可以表成若干個相異單位分數的和(即$\frac{m}{n}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\cdots+\frac{1}{t_{l-1}}+\frac{1}{t_l}$)

[証明]: (1).當$m=1$,由$\frac{1}{n}=\frac{1}{t_1}$,得$n=t_1$,故結論成立

(2).設$m\le k$時,能找出不同自然數$s_1,s_2,s_3,\cdots,s_{l-1},s_l$使$\frac{m}{n}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}+\cdots+\frac{1}{s_{p-1}}+\frac{1}{s_p}$成立

(3).設$m=k+1$,對最簡真分數$\frac{k+1}{n}$而言,可設$n=q(k+1)+r$ (其中q,r為正整數,且

$0<r<k+1$),於是$\frac{k+1}{n}-\frac{1}{q+1}=\frac{(k+1)(q+1)}{n(q+1)}-\frac{n}{n(q+1)}=\frac{q(k+1)+(k+1)-n}{n(q+1)}$

$=\frac{\cancel{n}-r+(k+1)-\cancel{n}}{n(q+1)}=\frac{k+1-r}{n(q+1)}$;依據(2)的假設,存在互不相同的自然數$s_1,s_2,s_3,\cdots,s_{p-1},s_p$,

使得$\frac{k+1-r}{n(q+1)}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_{p-1}}+\frac{1}{s_p}$成立,即$\frac{k+1}{n}-\frac{1}{q+1}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_{p-1}}+\frac{1}{s_p}$

從而有$\frac{k+1}{n}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_{p-1}}+\frac{1}{s_p}$;再設$q+1\in\{s_1,s_2,s_3,\cdots,s_{p-1},s_p\}$,

則$\frac{k+1}{n}\ge\frac{2}{q+1}=\frac{2}{q+1}\cdot\frac{n}{k+1}\cdot\frac{k+1}{n}=\frac{k+1}{n}\cdot\frac{2n}{(k+1)(q+1)}=\frac{k+1}{n}\cdot\frac{2[q(k+1)+r]}{(k+1)(q+1)}$

$=\frac{k+1}{n}\cdot\frac{2q(k+1)+2r}{(k+1)(q+1)}=\frac{k+1}{n}\cdot(\frac{2q(k+1)}{(q+1)(k+1)}+\frac{2r}{(k+1)(q+1)})=\frac{k+1}{n}\cdot(\frac{2q}{q+1}+\frac{2r}{(k+1)(q+1)})$

但$\because q,r\in N$,且$2q-(q+1)=q-1\ge 0\therefore 2q\ge q+1$,故$\frac{2q}{q+1}\ge 1$,即$\frac{2q}{q+1}+\frac{2r}{(k+1)(q+1)}>1$

故$\frac{k+1}{n}\ge\frac{k+1}{n}\cdot(\frac{2q}{q+1}+\frac{2r}{(k+1)(q+1)})>\frac{k+1}{n}$矛盾

即$q+1\in\{s_1,s_2,s_3,\cdots,s_{p-1},s_p\}$之假設不成立,故$q+1\notin\{s_1,s_2,s_3,\cdots,s_{p-1},s_p\}$,

亦即$\frac{k+1}{n}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_{p-1}}+\frac{1}{s_p}$ 成立

因此:對任何互質的自然數m與$n(m<n)$,都能找出互不相同的自然數$t_1,t_2,t_3,\cdots,t_{l-1},t_l$

使得$\frac{m}{n}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\cdots+\frac{1}{t_{l-1}}+\frac{1}{t_l}$成立

(二) 任何一個最簡真分數$\frac{m}{n}$可表成不超過m個相異單位分數的和

[証明]: (1).設$\frac{1}{x_1}$是不超過$\frac{m}{n}$最大的單位分數　　(i)若$\frac{1}{x_1}=\frac{m}{n}$,則得証

(ii)若$\frac{1}{x_1}<\frac{m}{n}$,則$\frac{m}{n}-\frac{1}{x_1}=\frac{mx_1-n}{nx_1}=\frac{m_1}{nx_1}$ $(x_1>0,m_1>0)$

$\because\frac{1}{x_1-1}>\frac{m}{n}\therefore m_1<mx_1-n<m$。

(2).設$\frac{1}{x_2}$是不超過$\frac{m_1}{nx_1}$最大的單位分數

(i)若$\frac{m_1}{nx_1}=\frac{1}{x_2}$,則得証$\frac{m}{n}=\frac{1}{x_1}+\frac{m_1}{nx_1}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

(ii)若$\frac{1}{x_2}<\frac{m_1}{nx_1}$,則$\frac{m_1}{nx_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{m_1x_2-nx_1}{nx_1x_2}=\frac{m_2}{nx_1x_2}\quad(x_2>1,x_1<x_2,m_2>0)$

$\because\frac{1}{x_2-1}>\frac{m_1}{nx_1}\therefore m_2<m_1<m$。

$\vdots$

如此繼續下去,可得$m>m_1>m_2>\cdots>m_k=0$,且$\frac{m}{n}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}$

$\because$每進行一步,分子至少減小1,$\therefore 1\le k\le m$

故任何一個最簡真分數$\frac{m}{n}(0<m<n)$可表成不超過m個相異單位分數的和

陸、研究的過程及方法：

第一部分：$\frac{2}{n}$ 表達式的研究

[問題一]:「單位分數」本身是否一定可表成兩個相異「單位分數」的和？又其表成兩個相異單位分數之和的方式是否唯一呢？若否,又是否能找出所有的表達形式呢？

[過程一]:為了研究$\frac{2}{n}$的表達式,因而我們先從$\frac{1}{n}$著手探討;我們都知道$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12},\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20},\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30},\cdots\cdots,\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$,即任何兩相鄰單位分數相減後必為兩相鄰單位分數乘積的單位分數。故$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ $\cdots\cdots\cdots$(公式1)

因此對於任何正整數n,我們都可將$\frac{1}{n}$改成$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$,也因此得知任何「單位分數」皆可表成兩個相異「單位分數」的和

[過程二]:由公式(1)中,我們雖然得知隨便給定一個單位分數,都可以使用公式(1)化成兩個相異單位分數之和。但使用公式(1)的方法也不過只能找到一種表達的型式,而不能找到所的表達式。例如:$\frac{1}{15}$除了用公式(1)可化成$\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$之外,還有三種形式:$\frac{1}{15}=\frac{1}{18}+\frac{1}{90},\frac{1}{15}=\frac{1}{20}+\frac{1}{60},\frac{1}{15}=\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$。

[過程三]:為了找出$\frac{1}{n}$中所有能化成兩個相異單位分數之和的表達式。我們設$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\quad(x<y)$

並由$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}$的關係式中逆推(即將$\frac{n+1}{n(n+1)}$

中的1改為k),可得$\frac{1}{n}=\frac{n+k}{n(n+k)}=\frac{n}{n(n+k)}+\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n+k}+\frac{k}{n(n+k)}$　又為了符合

分子為1的單位分數,我們將$\frac{1}{n+k}+\frac{k}{n(n+k)}$(改成)$\Rightarrow\frac{1}{n+k}+\frac{1}{\frac{n(n+k)}{k}}$(再改成)

$\Rightarrow\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+\frac{n^2}{k}}$;　即$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+\frac{n^2}{k}}$$\cdots\cdots\cdots$(公式(2))

又為了確保$n+\frac{n^2}{k}$為正整數,所以k必為n^2的正因數。亦即$n+k=x<y=n+\frac{n^2}{k}$

$\therefore k(n+k)<nk+n^2=n(n+k)$,故$k<n$。如此一來,由$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$到$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+k}$

$+\frac{1}{n+\frac{n^2}{k}}$(其中$n+k<n+\frac{n^2}{k}$,即$k<n$),我們就得到所有$\frac{1}{n}$的表達式,也就可以列出所有

$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的式子。當然啦!如果我們設$\frac{m}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　$(a<b,m<n)$　而將公式(2)中的

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}=\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+\frac{n^2}{k}}$　($k<n,\frac{n^2}{k}$為整數)　改成為

$$\frac{m}{n}=\frac{m}{n+k}+\frac{m}{n+\frac{n^2}{k}}=\frac{1}{\frac{n+k}{m}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\qquad (k<n,\frac{n^2}{k},\frac{n+k}{m},\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}\text{為整數})$$

即當　$a=\frac{n+k}{m}$,　$b=\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}$,則$\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{m}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　$\cdots\cdots\cdots$(公式(3))

亦可得到符合$k<n,\frac{n^2}{k},\frac{n+k}{m},\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}$為整數時,最簡真分數$\frac{m}{n}$的所有兩項表達式。

例如:定分數$\frac{4}{15}$中。$\because n^2=225=1\times 225=3\times 75=5\times 45=9\times 25$,
而小於15為225的正因數有1,3,5,9等四種

$$\therefore\frac{4}{15}=\frac{1}{\frac{15+1}{4}}+\frac{1}{\frac{15+\frac{15^2}{1}}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{60}\qquad\cdots\cdots(i)$$

$$=\frac{1}{\frac{15+3}{4}}+\frac{1}{\frac{15+\frac{15^2}{3}}{4}} \qquad (但\frac{15+3}{4}不為整數,故不成立)$$

$$=\frac{1}{\frac{15+5}{4}}+\frac{1}{\frac{15+\frac{15^2}{5}}{4}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{15} \qquad \cdots\cdots(ii)$$

$$=\frac{1}{\frac{15+9}{4}}+\frac{1}{\frac{15+\frac{15^2}{9}}{4}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{10} \qquad \cdots\cdots(iii)$$

[過程四]:從公式(3)中,我們得知只要符合$k<n$,k為n^2之因數且$\frac{n^2}{k},\frac{n+k}{m},\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}$為整數時,都可將$\frac{m}{n}$化成兩相異單位分數之和(亦可作為一個判別真分數$\frac{m}{n}$可否表成兩個相異單位分數之和的方法);且其表達式為$\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{m}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}}$。

[問題二]:最簡真分數$\frac{2}{n}$是否一定可以表成兩個相異「單位分數」的和?若可,又其所有能表成兩個相異單位分數之和的表達式為何呢?

[過程一]:$\because\frac{2}{n}$為最簡分數,$\therefore n$必不為偶數(即n為奇數),故$n+1$必為2的倍數,又因1為n之因數,因此我們只要取$m=2,k=1$代入公式(3)$\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{m}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{m}}$中,得$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{1}}{2}}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n+n^2}{2}}$,故最簡真分數$\frac{2}{n}$一定可表成兩個相異「單位分數」的和。如:$\frac{2}{3}=\frac{1}{\frac{3+1}{2}}+\frac{1}{\frac{3+3^2}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$

[過程二]:仿照[問題一][過程三],設$\frac{2}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{1}{n}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}$,依公式(3),得$2x=n+k,2y=n+\frac{n^2}{k}$,故$x=\frac{n+k}{2},y=\frac{n+\frac{n^2}{k}}{2}$,而得$\frac{2}{n}$的所有表達式為$\frac{1}{\frac{n+k}{2}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{2}}$,其中$k$為$n^2$之正因數,且$k<n$。

例如:定分數$\frac{2}{9}$中。$\because 9^2=81=1\times81=3\times27=9\times9$,而小於9為81的正因數有1,3,等二種;

$$\therefore \frac{2}{9}=\frac{1}{\frac{9+1}{2}}+\frac{1}{\frac{9+\frac{9^2}{1}}{2}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}\cdots\cdots(i)=\frac{1}{\frac{9+3}{2}}+\frac{1}{\frac{9+\frac{9^2}{3}}{2}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\cdots\cdots(ii)$$

第二部分：$\frac{3}{n}$ 表達式的研究

[問題一]：最簡真分數$\frac{3}{n}$是否都可以表成兩個相異「單位分數」的和？若否，則至少須表成幾個相異單位分數之和呢？又其表達式為何呢？

[過程一]：例如定分數$\frac{m}{n}=\frac{3}{7}$中；使用公式(3)做嘗試，由於7^2中小於7之因數只有1，而將1代入$\frac{n+k}{m}=\frac{7+1}{3}$中，並不會得到一個正整數，所以$\frac{3}{7}$不能分解成兩個相異單位分數之和。當然亦可証明$\frac{3}{7}$不能分解成兩個相異單位分數之和(証明見[附件一])，然依[預備知識與定理(二)]得知$\frac{3}{n}$一定可以分解成不超過3個相異單位分數之和，即$\frac{3}{7}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$。

[過程二]：沿用「第一部分」結論：「對於最簡真分數$\frac{m}{n}$，只要在k為n^2之因數，$k<n$，且$\frac{n^2}{k}$，$\frac{n+k}{m}$為整數時，都可將$\frac{m}{n}$化成兩個相異單位分數之和」。我們對真分數$\frac{3}{n}(n>3)$展開了以下的討論：首先將分母n分成：一、$n=3t+2$(即n為3的倍數餘2)二、$n=3t+1$(即n為3的倍數餘1)

一：若$n=3t+2$時，則n必有因數“1”，令$n=3t+2, k=1$，則$\frac{n+k}{3}=\frac{(3t+2)+1}{3}$必為整數。而

其所有表達式為$\frac{3}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{3}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{3}}$(其中$k$為$n^2$之因數，且$k<n$，$(n+k)$為3之倍數)；

例如：$\frac{3}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}(k=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}(k=4)$

二：若$n=3t+1$時，可分：

A：$n=3t+1$且為n偶數時(即$n=6t'+4, t'\in\{0\}\cup N$)：則$n$必有因數“2”，令$n=3t+1, k=2$，則$\frac{n+k}{m}=\frac{(3t+1)+2}{3}$必為整數。故必有$\frac{3}{n}=\frac{1}{\frac{n+2}{3}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{2}}{3}}$，而其表達式為

$\frac{3}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{3}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{3}}$(其中$k$為$n^2$之因數，且$k<n$，$(n+k)$為3之倍數)；

(其中k為n^2之因數,且$k<n$,$(n+k)$為3之倍數);例如:$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(k=2)$;$\frac{3}{10}=\frac{1}{4}+\frac{1}{50}(k=2)$;
$\frac{3}{16}=\frac{1}{6}+\frac{1}{48}(k=2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}(k=8)$;$\frac{3}{22}=\frac{1}{8}+\frac{1}{88}(k=2)=\frac{1}{11}+\frac{1}{22}(k=11)$;

B:$n=3t+1$且n為奇數時(即$n=6t'+7, t'\in\{0\}\cup N$)$\because \frac{3}{3t+3}<\frac{3}{3t+1}$,且$n=3t+1$為奇數,

故t為偶數;$\therefore \frac{3}{n}=\frac{3}{3t+1}=\frac{3}{3t+3}+\frac{3(3t+3)-3(3t+1)}{(3t+1)(3t+3)}=\frac{3}{n+2}+\frac{6}{(3t+1)(3t+3)}=\frac{1}{\frac{n+2}{3}}$
$+\frac{2}{(3t+1)(t+1)}=\frac{1}{\frac{n+2}{3}}+\frac{2}{n(t+1)}$,而$\frac{2}{(3t+1)(t+1)}$必可表成兩個相異單分數之和。

故在$n=3t+1$且為奇數時,$\frac{3}{n}=\frac{1}{\frac{n+2}{3}}+\frac{2}{n(t+1)}=\frac{1}{\frac{n+2}{3}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)[n(t+1)+1]}{2}}$
$=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)[n(t+1)+1]}{2}}$。如:$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}(\because n=3t+1=7 \therefore t=2)$;
$\frac{3}{13}=\frac{1}{5}+\frac{1}{33}+\frac{1}{2145}(\because n=3t+1=13 \therefore t=4)$

綜合上述得知$n=3t+2$或$n=3t+1$(n為偶數)時,$\frac{3}{n}$都可化成兩項單位分數之和,而$n=3t+1$(n為奇數)時,可化成三項相異單位分數之和。當然啦!能化成兩項相異單位分數之和的必然可化成三項相異單位分數之和。所以對任何最簡真分數$\frac{3}{n}$都可使得$\frac{3}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$成立

[過程三]:由[過程二]的討論中,我們得知:「在$\frac{3}{n}$中,除了$n=6t'+7(t'\in\{0\}\cup N)$時為三項表達式外,其餘皆可將$\frac{3}{n}$化成兩項的表達式。

第三部分:$\frac{4}{n}$ 表達式的研究

$\frac{4}{n}$表達式研究的架構圖:

$\frac{4}{n}$表達式研究架構表：分

一、n=4t+3(分母 n 為 4 的倍數餘 3)

二、n=4t+2(分母 n 為 4 的倍數餘 2)

三、n=4t+1(分母 n 為 4 的倍數餘 1)

- (A)、t 為奇數
  - (一).$n=24t'+5$
  - (二).$n=24t'+13$
  - (三).$n=24t'+21$
- (B)、t 為偶數
  - (一).$n=24t'+9$
  - (二).$n=24t'+17$
  - (三).$n=24t'+25$
    - (1).n 的個位數字為“ 3 ” ($n=120t'+73$)
    - (2).n 的個位數字為“ 5 ” ($n=120t'+25$)
    - (3).n 的個位數字為“ 7 ” ($n=120t'+97$)
    - (4).n 的個位數字為“ 1 ” ($n=120t'+121$)
      - (i)$n=840t'+121$
      - (ii)$n=840t'+241$
      - (iii)$n=840t'+361$
      - (iv)$n=840t'+481$
      - (v)$n=840t'+601$
      - (vi)$n=840t'+721$
      - (vii)$n=840t'+841$
    - (5).n 的個位數字為“ 9 ” ($n=120t'+49$)
      - (i)$n=840t'+49$
      - (ii)$n=840t'+169$
      - (iii)$n=840t'+289$
      - (iv)$n=840t'+409$
      - (v)$n=840t'+529$
      - (vi)$n=840t'+649$
      - (vii)$n=840t'+769$

[問題一]: 最簡真分數$\frac{4}{n}$是否都可以表成兩個相異「單位分數」的和？若否,則至少須表成幾個相異單位分數之和呢？又其表達式為何呢？

[過程一]: 比照[第二部分][過程二],可知$\frac{4}{5}$不能分解成兩個相異單位分數之和,但可表成不超過4個相異單位分數的和。然能否分解成3個相異單位分數之和,即$\frac{4}{5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$。而把問題更一般化:「$\frac{4}{n}$能否分解成3個相異單位分數之和呢？亦即用公式表達能否找到x, y, z,使得$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$成立呢？」$(x<y<z)$

[過程二]: 針對最簡真分數$\frac{4}{n}$,我們將分母分成　一、為4的倍數餘3(即$n=4t+3$)　二、為4的倍數餘2(即$n=4t+2$)　三、為4的倍數餘1(即$n=4t+1$)等三種情形,而展開了以下的討論:

一、若$n=4t+3$時,$\because \frac{4}{4t+4}<\frac{4}{4t+3}$ $\therefore \frac{4}{n}=\frac{4}{4t+3}=\frac{4}{4t+4}+\frac{4(4t+4)-4(4t+3)}{(4t+4)(4t+3)}=\frac{1}{t+1}$
$+\frac{4}{(4t+3)(4t+4)}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(4t+3)(t+1)}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{n(t+1)}$。

例如:$\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$($\because n=4t+3=7 \therefore t=1$)

二、若$n=4t+2$時,$\frac{4}{n}$必不為最簡真分數(即$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+2}=\frac{2}{2t+1}$,$\because$ 分子為2,必可化成兩項相異單位分數之和,故不再討論)

三、若$n=4t+1$時,$\because \frac{4}{4t+4}<\frac{4}{4t+1}$ $\therefore \frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{4}{4t+4}+\frac{4(4t+4)-4(4t+1)}{(4t+1)(4t+4)}=\frac{1}{t+1}$
$+\frac{12}{(4t+1)(4t+4)}=\frac{1}{t+1}+\frac{3}{(4t+1)(t+1)}=\frac{1}{t+1}+\frac{3}{n(t+1)}$,而$(4t+1)(t+1)=4t^2+5t+1$;

將$n, t, t+1, n(t+1)$四者之關係,做成下表:

n	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	……
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	……
t+1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	……
n(t+1) $=4t^2+5t+1$	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	480	637	742	……

可得:

(A) 若t為奇數($t=2s+1$),則$n(t+1)=4t^2+5t+1=4(2s+1)^2+5(2s+1)+1=16s^2+26s+10$
$=2(8s^2+13s+5)$必為偶數,故$\frac{3}{(4t+1)(t+1)}$必可改成兩項式(見[第二部分][過程三]),

即在$n=4t+1$(t為奇數)(如$n=5,13,21,29,37,\cdots\cdots,(8t'+5)$)時,$\frac{4}{n}$都可改成不大於三項的相異單位分數之和。又為了找出其表達式,我們又細分成:

(一).$(4t+1)(t+1)=4t^2+5t+1=n(t+1)$為3之倍數且為2的倍數時:(即$n=24t'+21$)

故$\frac{4}{n}$必可改成兩項式$\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)}{3}}$。例如:$\frac{4}{21}=\frac{1}{6}+\frac{1}{42}(\because n=4t+1=21\therefore t=5)$;

$\frac{4}{45}=\frac{1}{12}+\frac{1}{180}(\because n=4t+1=45\therefore t=11)$

(二).$(4t+1)(t+1)=4t^2+5t+1=n(t+1)$為3之倍數餘1,且為2的倍數時:(即$n=24t'+5$或

$n=24t'+13$)此時令$(4t+1)(t+1)=4t^2+5t+1=3\mu+1$,$\because 3\mu+1$必有正因數"2";

$$\therefore\frac{3}{(4t+1)(t+1)}=\frac{3}{3\mu+1}=\frac{1}{\frac{(3\mu+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{(3\mu+1)+\frac{(3\mu+1)^2}{2}}{3}}=\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\frac{(3\mu+1)(\mu+1)}{2}}$$

$$故\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{\frac{(3\mu+1)(\mu+1)}{2}}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{4t^2+5t+3}{3}}+\frac{1}{\frac{(4t^2+5t+1)(4t^2+5t+3)}{6}}$$

$=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{n^2(t+1)^2+2n(t+1)}{6}}$。例如:

$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}(\because n=4t+1=5\therefore t=1$,且$n(t+1)=10=3\times3+1)$;

$\frac{4}{13}=\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{468}(\because n=4t+1=13\therefore t=3$,且$n(t+1)=52=3\times17+1)$

(三).$(4t+1)(t+1)=4t^2+5t+1$為3之倍數餘2時:

令$(4t+1)(t+1)=4t^2+5t+1=3\mu+2$,$\because 4t^2+5t+1=3(t^2+t)+(t^2+2t+1)$

$=3(t^2+t)+(t+1)^2$,但$(t+1)^2$必不為3之倍數餘2(証明見[附件二])

故$(4t+1)(t+1)=4t^2+5t+1$為3之倍數餘2時,必不存在。

(B) 若t為偶數(令$t=2s$),則$4t^2+5t+1=4(2s)^2+5(2s)+1=16s^2+10s+1=2(8s^2+5s)+1$
必為奇數,故可分:

(一).$(4t+1)(t+1)=4t^2+5t+1=n(t+1)$為3之倍數且為奇數時:(即$n=24t'+9$)

$\because(4t+1)(t+1)=[3t+(t+1)](t+1)=3t(t+1)+(t+1)^2\ \therefore(t+1)$必為3的倍數,

故$\frac{4}{n}$必可改成兩項式$\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)}{3}}$。例如:$\frac{4}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}(\because n=4t+1=9\therefore t=2)$

(二).$(4t+1)(t+1)=4t^2+5t+1=n(t+1)$為3之倍數餘1,且為奇數時:

則$(4t+1)(t+1)=4t^2+5t+1=n(t+1)$必為6的倍數餘1;

設$(4t+1)(t+1)=4t^2+5t+1=6\mu+1$ (μ為正整數),則$\frac{4t^2+5t}{6}=\mu$,得$t=4,6,10,12,16,$

$18,22,\cdots$,分別對應$\mu=14,29,75,106,184,231,341,404\cdots$,而可分為兩組:

[a]

n	17	41	65	89	$\cdots$	$24t'+17$
t	4	10	16	22	$\cdots$	$6t'+4$
μ	14	75	184	341	$\cdots$	$(3t'+2)(8t'+7)$

(t'為0或正整數)　即$(4t+1)(t+1)$

$=[4(6t'+4)+1][(6t'+4)+1]=(24t'+17)(6t'+5)$,此時可得$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{t+1}+\dfrac{3}{(4t+1)(t+1)}$

$=\dfrac{1}{t+1}+\dfrac{3}{(24t'+17)(6t'+5)}$而在$(24t'+17)(6t'+5)$中,必含$(6t'+5)$或$(24t'+17)$之因數,

使得$(24t'+17)(6t'+5)+(6t'+5)[$視$6t'+5=k]=(6t'+5)(24t'+18)=3(6t'+5)(8t'+6)$

且$(24t'+17)(6t'+5)+\dfrac{[(24t'+17)(6t'+5)]^2}{(6t'+5)}$　[即$p.5$公式(3)中的$n+\dfrac{n^2}{k}$]

$=(24t'+17)(6t'+5)+(6t'+5)(24t'+17)^2=(24t'+17)(6t'+5)[1+(24t'+17)]$

$=3(24t'+17)(6t'+5)(8t'+6)$,故$\dfrac{3}{(4t+1)(t+1)}$

即此時$\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{t+1}+\dfrac{3}{(4t+1)(t+1)}=\dfrac{1}{t+1}+\dfrac{1}{(6t'+5)(8t'+6)}+\dfrac{1}{(24t'+17)(6t'+5)(8t'+6)}$

$$=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(6t'+4)[\frac{(24t'+17)+1}{3}]}+\frac{1}{(24t'+17)(6t'+4)[\frac{(24t'+17)+1}{3}]}$$

$$=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{(t+1)(n+1)}{3}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)(n+1)}{3}}$$

例如:$\dfrac{4}{17}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{510}(\because n=4t+1=17\ \therefore t=4,$且$n(t+1)=85=3\times 28+1)$

$\dfrac{4}{41}=\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{154}+\dfrac{1}{6314}(\because n=4t+1=41\ \therefore t=10,$且$n(t+1)=451=3\times 150+1)$

[b]

n	25	49	73	97	$\cdots$	$24t'+25$
t	6	12	18	24	$\cdots$	$6t'+6$
μ	29	106	231	404	$\cdots$	$(t'+1)(24t'+29)$

(t'為0或正整數)

但此時的$\dfrac{4}{n}$,有一部分使我絞盡腦汁也無法找出一個完整的表達式(這也是要麻煩教授指導之處),不過在我們找出此時與t相對應的n後

t	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	$\cdots$
n	25	49	73	97	121	145	169	193	217	241	265	289	313	$\cdots$

我們發現可以以n的個位數字“1”“3”“5”“7”“9”,分別討論,而得到某些的表達式:

(1)當n的個位數字為“3”時:(如$n=73,193,313,433,553,\cdots,120t'+73$)($t'$為0或正整數),

在我們多次觀察運算之後,我們發現可先將$\dfrac{4}{n}$以$\dfrac{1}{t+2}+\dfrac{7}{n(t+2)}$示之,再操作計算

$\dfrac{7}{n(t+2)}$,都可將$\dfrac{7}{n(t+2)}$分成兩項。其運算如下:

$$(a)\frac{4}{73}=\frac{1}{20}+\frac{7}{20\cdot 73}=\frac{1}{20}+\frac{1}{\frac{20\cdot 73+10}{7}}+\frac{1}{\frac{20\cdot 73+\frac{20^2\cdot 73^2}{10}}{7}}=\frac{1}{20}+\frac{1}{210}+\frac{1}{30660}$$

$(\because 73=10\times 7+3;20=2\times 7+6;3\times 6=18=2\times 7+4,$ 餘4, 不足3, 可補10)

$$(b)\frac{4}{193}=\frac{1}{50}+\frac{7}{50\cdot 193}=\frac{1}{50}+\frac{1}{\frac{50\cdot 193+10}{7}}+\frac{1}{\frac{50\cdot 193+\frac{50^2\cdot 193^2}{10}}{7}}=\frac{1}{50}+\frac{1}{1380}+\frac{1}{1331700}$$

$(\because 193=27\times 7+4;50=7\times 7+1;4\times 1=4,$ 餘4, 不足3, 可補10)

$$(c)\frac{4}{313}=\frac{1}{80}+\frac{7}{80\cdot 313}=\frac{1}{80}+\frac{1}{\frac{80\cdot 313+20}{7}}+\frac{1}{\frac{80\cdot 313+\frac{80^2\cdot 313^2}{20}}{7}}=\frac{1}{80}+\frac{1}{3580}+\frac{1}{4482160}$$

$(\because 313=44\times 7+5;80=11\times 7+3;5\times 3=15=2\times 7+1;$ 餘1, 不足6, 可補20)

$$(d)\frac{4}{433}=\frac{1}{110}+\frac{7}{110\cdot 433}=\frac{1}{110}+\frac{1}{\frac{110\cdot 433+5}{7}}+\frac{1}{\frac{110\cdot 433+\frac{110^2\cdot 433^2}{5}}{7}}$$

$$=\frac{1}{110}+\frac{1}{6805}+\frac{1}{64824430}$$

$(\because 433=61\times 7+6;110=15\times 7+5;5\times 6=30=4\times 7+2;$ 餘2, 不足5, 可補5)

$$(e)\frac{4}{553}=\frac{1}{140}+\frac{7}{140\cdot 553}=\frac{1}{140}+\frac{1}{11060}$$

$$(f)\frac{4}{673}=\frac{1}{170}+\frac{7}{170\cdot 673}=\frac{1}{170}+\frac{1}{\frac{170\cdot 673+5}{7}}+\frac{1}{\frac{170\cdot 673+\frac{170^2\cdot 673^2}{5}}{7}}$$

$$=\frac{1}{170}+\frac{1}{16345}+\frac{1}{374006290}$$

$(\because 673=96\times 7+1;170=24\times 7+2;1\times 2=2;$ 餘2, 不足5, 可補5)

$$(g)\frac{4}{793}=\frac{1}{200}+\frac{7}{200\cdot 793}=\frac{1}{200}+\frac{1}{\frac{200\cdot 793+20}{7}}+\frac{1}{\frac{200\cdot 793+\frac{200^2\cdot 793^2}{20}}{7}}$$

$$=\frac{1}{200}+\frac{1}{22660}+\frac{1}{17693800}$$

$(\because 793=113\times 7+2;200=28\times 7+4;2\times 4=8=1\times 7+1;$ 餘1, 不足6, 可補20)

$$(h)\frac{4}{913}=\frac{1}{230}+\frac{7}{230\cdot 913}=\frac{1}{230}+\frac{1}{\frac{230\cdot 913+10}{7}}+\frac{1}{\frac{230\cdot 913+\frac{230^2\cdot 913^2}{10}}{7}}$$

$$=\frac{1}{230}+\frac{1}{30000}+\frac{1}{629970000}$$

$(\because 913=130\times 7+3;230=32\times 7+6;6\times 3=18=2\times 7+4;$餘4,不足3,可補10)

$(i)\cdots\cdots\cdots\cdots$

至此我們得知:

1.$(a)(h)(o)$ $\cdots\cdots$為同一組且$n=840t'+73$(t'為0或正整數)必為7之倍數餘3,

而$\frac{n+7}{4}=\frac{840t'+73+7}{4}=210t'+20=t+2$為7之倍數餘6,又$n(t+2)$必為7之倍數餘4,

不足3;又$n^2(210t'+20)^2$必含有因數10$(=7+3)$,故可補上10,而可將其化成三項相異單位分數之和,可得表達式:$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+10}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+\frac{n^2(t+2)^2}{10}}{7}}$

2.同理在$n=840t'+193$(t'為0或正整數)亦可得其上述表達式。

3.在$n=840t'+313$(t'為0或正整數)必為7之倍數餘5,而$\frac{n+7}{4}=\frac{840t'+313+7}{4}=210t'+80$

$=t+2$為7之倍數餘3,又$n(t+2)$必為7之倍數餘1,不足6;又$n^2(210t'+80)^2$必含有因數20$(=14+6)$,故可補上20,而將其化成三項相異單位分數之和,可得表達式:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+20}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+\frac{n^2(t+2)^2}{20}}{7}}$$

4.同理在$n=840t'+793$(t'為0或正整數)亦可得其上述表達式。

5.在$n=840t'+433$(t'為0或正整數)必為7之倍數餘6,而$\frac{n+7}{4}=\frac{840t'+433+7}{4}=210t'+110$

$=t+2$為7之倍數餘5,又$n(t+2)$必為7之倍數餘2,不足5;故$n^2(210t'+110)^2$必含有因數5,即可補上5,而將其化成三項相異單位分數之和,可得表達式:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+5}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+\frac{n^2(t+2)^2}{5}}{7}}$$

6.同理在$n=840t'+673$(t'為0或正整數)亦可得其上述表達式。

7.在$n=840t'+553$(t'為0或正整數)必為7之倍數時,可得兩項表達式:$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)}{7}}$

綜合1 ~ 7, 知(1)在n的個位數字為 " 3 ", $t = 120t' + 73$(t'為正整數或0)都可使$\frac{4}{n}$改成$\frac{1}{t+2} + \frac{7}{n(t+2)}$進而化成三項相異單位分數之和。

(2)個位數字為 " 5 " 時, 即n分別為25,145,265,385,505,625,745,865, $\cdots$, $120t' + 25$(t'為0或正整數)時, 我們先將$\frac{4}{n}$以$\frac{1}{t+4} + \frac{15}{n(t+4)}$示之, 再進而將$\frac{15}{n(t+4)}$化成兩項式。如 :

$$(a)\ \frac{4}{25} = \frac{1}{10} + \frac{15}{10 \cdot 25} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10 \cdot 5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{\frac{10 \cdot 5 + 1}{3}} + \frac{1}{\frac{10 \cdot 5 + \frac{10^2 \cdot 5^2}{1}}{3}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{850}$$

($\because$ 15與25約分後, 分別為3與5; $5 = 1 \times 3 + 2, 10 = 3 \times 3 + 1; 2 \times 1 = 2 = 0 \times 3 + 2$, 不足1, 可補1)

$$(b)\ \frac{4}{145} = \frac{1}{40} + \frac{15}{40 \cdot 145} = \frac{1}{40} + \frac{3}{40 \cdot 29} = \frac{1}{40} + \frac{1}{\frac{40 \cdot 29 + 1}{3}} + \frac{1}{\frac{40 \cdot 29 + \frac{40^2 \cdot 29^2}{1}}{3}}$$

$$= \frac{1}{40} + \frac{1}{387} + \frac{1}{448920}$$

($\because$ 15與145約分後, 分別為3與29; $29 = 9 \times 3 + 2, 40 = 13 \times 3 + 1; 2 \times 1 = 2 = 0 \times 3 + 2$, 餘2, 不足1, 可補1)

$$(c)\ \frac{4}{265} = \frac{1}{70} + \frac{15}{70 \cdot 265} = \frac{1}{70} + \frac{3}{70 \cdot 53} = \frac{1}{70} + \frac{1}{\frac{70 \cdot 53 + 1}{3}} + \frac{1}{\frac{70 \cdot 53 + \frac{70^2 \cdot 53^2}{1}}{3}}$$

$$= \frac{1}{70} + \frac{1}{1237} + \frac{1}{4589270}$$

($\because$ 15與265約分後, 分別為3與53; $53 = 17 \times 3 + 2, 70 = 23 \times 3 + 1; 2 \times 1 = 2 = 0 \times 3 + 2$, 餘2, 不足1, 可補1)

$$(d)\ \frac{4}{385} = \frac{1}{100} + \frac{15}{100 \cdot 385} = \frac{1}{100} + \frac{3}{100 \cdot 77}$$

$$= \frac{1}{100} + \frac{1}{\frac{100 \cdot 77 + 1}{3}} + \frac{1}{\frac{100 \cdot 77 + \frac{100^2 \cdot 77^2}{1}}{3}} = \frac{1}{100} + \frac{1}{2567} + \frac{1}{19765900}$$

($\because$ 15與385約分後, 分別為3與77; $77 = 25 \times 3 + 2, 100 = 33 \times 3 + 1;\ 2 \times 1 = 2 = 0 \times 3 + 2$, 餘2, 不足1, 可補1)

$(e)\cdots\cdots\cdots\cdots$

綜合上述操作, $\because n = 120t' + 25$(t'為0或正整數) $= 5(24t' + 5), \therefore \frac{n}{5} = 24t' + 5 = 3(8t' + 1) + 2$, 故$n$與15約分後, 分別得到$(24t' + 5)$與3; 而$24t' + 5$又為3的倍數餘2; 所以

$\frac{15}{n(t+4)}=\frac{3}{\frac{n}{5}(t+4)}$必可化成兩項相異單位分數之和。因此在$\frac{4}{n}$((2)個位數字為5,且$n=120t'+25$)時,一定可將$\frac{4}{n}$化成三項相異單位分數之和。且其表達式為:

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+4}+\frac{1}{\frac{n(t+4)+5}{15}}+\frac{1}{\frac{n(t+4)[n(t+4)+5]}{75}}$$。

(3)個位數字為"7",n分別為97,217,337,457,577,697,817,937,$\cdots$,$120t'+97$(t'為0或正整數)時,

我們以$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{3}{n(t+1)}$示之,可得

$$(a)\ \frac{4}{97}=\frac{1}{25}+\frac{3}{97\cdot 25}=\frac{1}{25}+\frac{1}{\frac{25\cdot 97+5}{3}}+\frac{1}{\frac{25\cdot 97+\frac{25^2\cdot 97^2}{5}}{3}}=\frac{1}{25}+\frac{1}{810}+\frac{1}{392850}$$

($\because 25=8\times 3+1, 97=23\times 3+1; 1\times 1=1=0\times 3+1$,餘1,不足2,可補5;而5恰為25之因數)

$$(b)\ \frac{4}{217}=\frac{1}{55}+\frac{3}{55\cdot 217}=\frac{1}{55}+\frac{1}{\frac{55\cdot 217+5}{3}}+\frac{1}{\frac{55\cdot 217+\frac{55^2\cdot 217^2}{5}}{3}}=\frac{1}{55}+\frac{1}{1780}+\frac{1}{1899260}$$

($\because 55=18\times 3+1, 217=72\times 3+1; 1\times 1=1=0\times 3+1$,餘1,不足2,可補5;而5恰為55之因數)

$$(c)\ \frac{4}{337}=\frac{1}{85}+\frac{3}{85\cdot 337}=\frac{1}{85}+\frac{1}{\frac{85\cdot 337+5}{3}}+\frac{1}{\frac{85\cdot 337+\frac{85^2\cdot 337^2}{5}}{3}}=\frac{1}{85}+\frac{1}{9550}+\frac{1}{54719500}$$

($\because 85=28\times 3+1, 337=112\times 3+1; 1\times 1=1=0\times 3+1$,餘1,不足2,可補5;而5恰為85之因數)

$(d)\cdots\cdots\cdots\cdots$

綜合上述$\because n=4t+1=120t'+97$ (t'為0或正整數),$\therefore t=\frac{120t'+96}{4}=30t'+24$,故$t+1=30t'+25=5(6t'+5)$必為5之倍數;且$t+1=30t'+25=3(10t'+8)+1$為3的倍數餘1;又$n(t+1)=(120t'+97)(30t'+25)=3600t'^2+5910t'+2425=3(1200t'^2+1970t'+808)+1$為3的倍數餘1,可補2,5,8,$\cdots$,$(3r+2)$;而此時"5"恰為$t+1$之因數;所以在$\frac{4}{n}$((3)個位數字為7,且$n=120t'+97$)也都可化成三項相異單位分數之和。且表達式為:$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+5}{3}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)[n(t+1)+5]}{15}}$

(4)個位數字為"1",$n<5000$,n分別為121,241,361,481,601,721,841,961,1081,1201,1321,1441,1681,1801,1921,$\cdots$,$120t'+121$(t'為0或正整數)時,我們分別操作於[附件三]:

(5)個位數字為"9",$n<5000$,n分別為49,169,289,409,529,649,769,889,1009,1129,1249,1369,1489,

$1609, 1729, \cdots, 120t'+49$($t'$為0或正整數)時,我們在分別操作在[附件四]:(但[附件三][附件四]因限於頁數的限制而無法呈上)

在操作完$n<5000$,且$n=120t'+121$及$n=120t'+49$等兩類型後,似乎無法完全找出通用的表達式。不過,我們也發現了某些的規律:

(A)凡在$\frac{4}{n}$中$(n=120t'+121)$,只要n不為質數,就必定可分解成三個相異單分數之和。$\because$ 此時n的個位數字為"1",$\therefore$ 只要n不為質數,就一定含個位數字為"1"、"3"、"7"、"9"的因數又因個位數字為"1"、"3"、"7"、"9"的因數必為$4r_1+3$或$4r_1+1$的型式。

其理由如下:(若$n(n=120t'+121)$有因數α)

(i)個位數字為"1"時:設$\alpha=\underbrace{abcd\cdots yz1}_{k\text{位數}}=\underbrace{abcd\cdots y}_{(k\text{-}2)\text{位數}}\times 100+10z+1=4(\underbrace{abcd\cdots y}_{(k\text{-}2)\text{位數}}\times 25)+10z+1$;

又$10z+1$必為$4r+3$(當z為奇數)或$4r+1$(當z為偶數)的型式,故$\alpha=4[(\underbrace{abcd\cdots y}_{(k\text{-}2)\text{位數}}\times 25)+r]+3$

$=4r_1+3$或$\alpha=4[(\underbrace{abcd\cdots y}_{(k\text{-}2)\text{位數}}\times 25)+r]=4r_1+1$的型式

(ii)個位數字為"7"時:$\alpha=\underbrace{abcd\cdots yz7}_{k\text{位數}}=\underbrace{abcd\cdots y}_{(k\text{-}2)\text{位數}}\times 100+10z+7=4(\underbrace{abcd\cdots y}_{(k\text{-}2)\text{位數}}\times 25)+10z+7$;

其$10z+7$必為$4r_1+3$(當z為偶數)或$4r_1+1$(當z為奇數)的型式,故α亦可改成$4r_1+3$或$4r_1+1$的型式

(iii)個位數字為"3"時:$\alpha=\underbrace{abcd\cdots yz3}_{k\text{位數}}=\underbrace{abcd\cdots y}_{(k\text{-}2)\text{位數}}\times 100+10z+3=4(\underbrace{abcd\cdots y}_{(k\text{-}2)\text{位數}}\times 25)+10z+3$;

其$10z+3$必為$4r_1+3$(當z為偶數)或$4r_1+1$(當z為奇數)的型式,故α亦可改成$4r_1+3$或$4r_1+1$的型式

(iv)個位數字為"9"時:$\alpha=\underbrace{abcd\cdots yz9}_{k\text{位數}}=\underbrace{abcd\cdots y}_{(k\text{-}2)\text{位數}}\times 100+10z+9=4(\underbrace{abcd\cdots y}_{(k\text{-}2)\text{位數}}\times 25)+10z+9$;

其$10z+9$也必為$4r_1+3$(當z為奇數)或$4r_1+1$(當z為偶數)的型式,故α亦可改成$4r_1+3$或$4r_1+1$的型式。所以

(a)當n有$4r_1+3$型式的因數時,我們設$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{4r_1+3}{nx}\Rightarrow\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{x}+\frac{4r_1+3}{(4t+1)x}\Rightarrow x=\frac{4t+4r_1+4}{4}$

$\Rightarrow x=t+r_1+1\Rightarrow\frac{4}{n}=\frac{1}{t+r_1+1}+\frac{4r_1+3}{n(t+r_1+1)}$;如$\because 3481=59\times 59$(而$59=4\times 14+3, r_1=14; 3481=4\times 870+1, t=870$) $\therefore\frac{4}{3481}=\frac{1}{870+14+1}+\frac{4\times 14+3}{3481(870+14+1)}=\frac{1}{885}+\frac{59}{885\cdot 3481}=\frac{1}{885}+\frac{1}{885\cdot 59}$

$=\frac{1}{885}+\frac{1}{52215}$。又如$\because 3841=23\times 167$(而$23=4\times 5+3, r_1=5; 3841=4\times 960+1, t=960$)

$\therefore\frac{4}{3841}=\frac{1}{960+5+1}+\frac{4\times 5+3}{3841(960+5+1)}=\frac{1}{966}+\frac{23}{966\cdot 3841}=\frac{1}{966}+\frac{1}{885\cdot 167}=\frac{1}{966}+\frac{1}{161312}$。

(b)當n有$4r_1+1$型式的因數時,我們可先將$(4r_1+1)\times 3=12r_1+3=4r'+3$(令$3r_1=r'$),$\Rightarrow\frac{4}{n}=\frac{1}{\bullet}$

$+\frac{4r'+3}{n\times\bullet}\Rightarrow\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{\bullet}+\frac{4r'+3}{(4t+1)\times\bullet}\Rightarrow\bullet=t+r'+1\Rightarrow\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+r'+1}+\frac{4r'+3}{n(t+r'+1)}\Rightarrow\frac{4}{n}$

$= \dfrac{4}{4t+1} = \dfrac{1}{t+r'+1} + \dfrac{3(4r_1+1)}{n(t+r'+1)}$;又因$n$有$(4r_1+1)$之因數$\therefore \dfrac{4}{n} = \dfrac{4}{4t+1} = \dfrac{1}{t+r'+1} + \dfrac{3}{\dfrac{n(t+r'+1)}{(4r_1+1)}}$

且由於$n = 4t+1 = 120t'+121 \Rightarrow t = \dfrac{120t'+120}{4} = 30t'+30$必為偶數,故可分成:

(i)若r_1為奇數,則$r'+1 = 3r_1+1$為偶數,可得$t+r'+1$為偶數,也得$\dfrac{n(t+r'+1)}{(4r_1+1)}$必為偶數;故可將

$\dfrac{3}{\dfrac{n(t+r'+1)}{(4r_1+1)}}$化成兩項式。如此一來,就必可將$\dfrac{4}{n}$化成三項相異單位分數之和。

如:$\dfrac{4}{481} = \dfrac{1}{130} + \dfrac{13\cdot 3}{130\cdot 481} = \dfrac{1}{130} + \dfrac{3}{130\cdot 37} = \dfrac{1}{130} + \dfrac{1}{\dfrac{130\cdot 37+2}{3}} + \dfrac{1}{\dfrac{130\cdot 37 + \dfrac{130^2\cdot 37^2}{2}}{3}}$

$= \dfrac{1}{130} + \dfrac{1}{1604} + \dfrac{1}{3857620}$($\because 481 = 13\times 37, 13 = 4r_1+1, r_1 = 3$(奇數);且$13\times 3 = 39$
$= 4\times 9+3 = 4r'+3, r' = 9$(奇數);又因$130 = 43\times 3+1, 37 = 12\times 3+1$;而$1\times 1 = 1$
$= 0\times 3+1$,餘1,不足2,可補2;且$t+r'+1 = 130$為一偶數)

(ii)若r_1為偶數,則$r'+1 = 3r_1+1$為奇數,可得$t+r'+1$為奇數;且$\dfrac{t+r'+1}{4r_1+1}$為3的倍數餘2的整數,因而

也必可將$\dfrac{3}{\dfrac{n(t+r'+1)}{(4r_1+1)}}$化成兩項式。

如:$\dfrac{4}{1921} = \dfrac{1}{493} + \dfrac{17\cdot 3}{493\cdot 1921} = \dfrac{1}{493} + \dfrac{3}{29\cdot 1921} = \dfrac{1}{493} + \dfrac{1}{\dfrac{29\cdot 1921+1}{3}} + \dfrac{1}{\dfrac{29\cdot 1921 + \dfrac{29^2\cdot 1921^2}{1}}{3}}$

$= \dfrac{1}{493} + \dfrac{1}{18570} + \dfrac{1}{1034516130}$($\because 1921 = 17\times 113, 17 = 4r_1+1, r_1 = 4$;且$17\times 3 = 51$
$= 4\times 12+3 = 4r_1'+3, r_1' = 12$;又因$29 = 9\times 3+2, 1921 = 640\times 3+1$;而$1\times 2 = 2$
$= 0\times 3+2$,餘2,不足1,可補1)

而在$\dfrac{4}{n}$中$(n = 120t'+49)$,也只要n不為質數,一樣可分解成三個相異單分數之和。(理由作法亦同

$\dfrac{4}{n}$中$(n = 120t'+121)$)。

(B)在$\dfrac{4}{n}(n = 120t'+121)$中,(若符合以下$(i)(ii)(iii)(iv)$者,不論$n$是否為質數,亦可化成三項相異單位

分數之和。其理由如下:)

(i)若n也為$120(7t'+1)+121$時(如$n = 241, 1081, 1921, 2761, 3601, 4441, 5281, \cdots, [120(7t'+1)+121]$):

都可以$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}$示之,可得$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+3)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+3)}{7}}$。

$\because n=120(7t'+1)+121=4t+1 \therefore t=210t'+60$故$t+2=210t'+62=7(30t'+8)+6$,因而$t+3$必

為7之倍數。因此$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}=\frac{1}{t+2}+\frac{7\times\frac{t+3}{7}}{n(t+2)\times\frac{t+3}{7}}=\frac{1}{t+2}+\frac{t+3}{n(t+2)\times\frac{t+3}{7}}$

$$=\frac{1}{t+2}+\frac{t+2}{n(t+2)\times\frac{t+3}{7}}+\frac{1}{n(t+2)\times\frac{t+3}{7}}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+3)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+3)}{7}}$$。

例如:$\frac{4}{1081}=\frac{4}{4\times270+1}=\frac{1}{270+2}+\frac{7}{1081\times(270+2)}=\frac{1}{270+2}+\frac{7\times\frac{270+3}{7}}{1081\times(270+2)\times\frac{270+3}{7}}$

$$=\frac{1}{270+2}+\frac{270+3}{1081\times(270+2)\times\frac{270+3}{7}}=\frac{1}{272}+\frac{273}{1081\times272\times39}=\frac{1}{272}+\frac{272}{1081\times272\times39}$$

$$+\frac{1}{1081\times272\times39}=\frac{1}{272}+\frac{1}{42159}+\frac{1}{11467248}$$

同理:在n為$120(7t'+3)+49$時(如$n=409,1249,2089,2929,3769,4609,5449,\cdots,[120(7t'+3)+49]$):

也都可以$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}$示之,可得$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+3)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+3)}{7}}$。

例如:$\frac{4}{1249}=\frac{4}{4\times312+1}=\frac{1}{314}+\frac{7}{1249\times314}=\frac{1}{314}+\frac{7\times45}{1249\times314\times45}=\frac{1}{314}+\frac{314}{1249\times314\times45}$

$$+\frac{1}{1249\times314\times45}=\frac{1}{314}+\frac{1}{1249\times45}+\frac{1}{1249\times314\times45}=\frac{1}{314}+\frac{1}{56205}+\frac{1}{17648370}$$

(ii)若n也為$120(7t'+3)+121$時(如$n=481,1321,2161,3001,38411,4681,5521,\cdots,[120(7t'+3)+121]$):

都可以$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}$示之,可得$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+6)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+6)}{28}}$。

$\because n=120(7t'+3)+121=4t+1 \therefore t=210t'+120$故$t+2=210t'+122=7(30t'+17)+3$,因而

$(t+6)$必為7之倍數;且因$(t+2)$及$\frac{t+6}{7}$皆為偶數。因此$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}=\frac{1}{t+2}$

$$+\frac{7\times\frac{t+6}{7}}{n(t+2)\times\frac{t+6}{7}}=\frac{1}{t+2}+\frac{t+6}{n(t+2)\times\frac{t+6}{7}}=\frac{1}{t+2}+\frac{t+2}{n(t+2)\times\frac{t+6}{7}}+\frac{4}{n(t+2)\times\frac{t+6}{7}}$$

$$=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+6)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+6)}{28}}。$$

例如：$\frac{4}{3841}=\frac{4}{4\times 960+1}=\frac{1}{960+2}+\frac{7}{3841\times(960+2)}=\frac{1}{960+2}+\frac{7\times\frac{960+6}{7}}{3841\times(960+2)\times\frac{960+6}{7}}$

$$=\frac{1}{960+2}+\frac{960+6}{3841\times(960+2)\times\frac{960+6}{7}}=\frac{1}{962}+\frac{966}{3841\times 962\times 138}=\frac{1}{962}+\frac{962}{3841\times 962\times 138}$$

$$+\frac{4}{3841\times 962\times 138}=\frac{1}{962}+\frac{1}{530058}+\frac{1}{127478949}$$

同理：在n為$120(7t'+5)+49$時(如$n=649,1489,2329,3169,4009,4849,5689,\cdots,[120(7t'+5)+49]$)：

也都可以$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}$示之，可得$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+6)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+6)}{28}}$。

例如：$\frac{4}{2329}=\frac{4}{4\times 582+1}=\frac{1}{584}+\frac{7}{2329\times 584}=\frac{1}{584}+\frac{7\times 84}{2329\times 584\times 84}$

$$=\frac{1}{584}+\frac{584}{2329\times 584\times 84}+\frac{4}{2329\times 584\times 84}=\frac{1}{584}+\frac{1}{195636}+\frac{1}{28562856}$$

(iii)若n也為$120(7t'+4)+121$時(如$n=601,1441,2281,3121,3961,4801,5641,\cdots,[120(7t'+4)+121]$)：

都可以$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}$示之，可得$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+4)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+4)}{14}}$。

$\because n=120(7t'+4)+121=4t+1\ \therefore t=210t'+150$故$t+2=210t'+152=7(30t'+21)+5$，因而

$(t+4)$必為7之倍數；且因$(t+2)$及$\frac{t+4}{7}$皆為偶數。因此$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}=\frac{1}{t+2}$

$$+\frac{7\times\frac{t+4}{7}}{n(t+2)\times\frac{t+4}{7}}=\frac{1}{t+2}+\frac{t+4}{n(t+2)\times\frac{t+4}{7}}=\frac{1}{t+2}+\frac{t+2}{n(t+2)\times\frac{t+4}{7}}+\frac{2}{n(t+2)\times\frac{t+4}{7}}$$

$$=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+4)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+4)}{14}}。$$

例如：$\frac{4}{1441}=\frac{4}{4\times 360+1}=\frac{1}{360+2}+\frac{7}{1441\times(360+2)}=\frac{1}{360+2}+\frac{7\times\frac{360+4}{7}}{1441\times(360+2)\times\frac{360+4}{7}}$

$$=\frac{1}{360+2}+\frac{360+4}{1441\times(360+2)\times\frac{360+4}{7}}=\frac{1}{362}+\frac{364}{3841\times 362\times 52}=\frac{1}{362}+\frac{362}{1441\times 362\times 52}$$

$$+\frac{2}{1441\times362\times52}=\frac{1}{362}+\frac{1}{74932}+\frac{1}{13562692}$$

同理:在n為$120(7t'+6)+49$時(如$n=769,1609,2449,3289,4129,4969,5829,\cdots,[120(7t'+6)+49]$):

也都可以$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}$示之,可得$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+4)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+4)}{14}}$。

例如:$\frac{4}{2449}=\frac{4}{4\times612+1}=\frac{1}{614}+\frac{7}{2449\times614}=\frac{1}{614}+\frac{7\times88}{2449\times614\times88}$

$$=\frac{1}{614}+\frac{614}{2449\times614\times88}+\frac{2}{2449\times614\times88}=\frac{1}{614}+\frac{1}{215512}+\frac{1}{66162184}$$

(iv)若n也為$120(7t'+5)+121$時(如$n=721,1561,2401,3241,4081,4921,5761,\cdots,[120(7t'+5)+121]$):

都可以$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}$示之,可得$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)}{7}}$。

$\because n=120(7t'+5)+121=4t+1\therefore t=210t'+180$故$t+2=210t'+182=7(30t'+26)$,因而

$(t+2)$必為7之倍數。因此$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)}{7}}$。

例如:$\frac{4}{721}=\frac{4}{4\times180+1}=\frac{1}{180+2}+\frac{7}{721\times(180+2)}=\frac{1}{182}+\frac{1}{721\times\frac{182}{7}}=\frac{1}{182}+\frac{1}{18746}$

同理:在n為$120\times7t'+49$時(如$n=49,889,1729,2569,3409,4249,5089,\cdots,[120(7t'+6)+49]$):

也都可以$\frac{4}{n}=\frac{4}{4t+1}=\frac{1}{t+2}+\frac{7}{n(t+2)}$示之,可得$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)}{7}}$。

例如:$\frac{4}{3409}=\frac{4}{4\times852+1}=\frac{1}{854}+\frac{7}{3409\times854}=\frac{1}{854}+\frac{1}{3409\times\frac{854}{7}}=\frac{1}{854}+\frac{1}{415898}$

[過程三]:綜合[過程一]與[過程二]所述,得知在$\frac{4}{n}$中,除了在$n=4t+1$且$n=120(7t'+s)+121$ (t'為0或正整數)$(0\le s\le6,s=0,2,6)$或$n=120(7t'+s)+49$ (t'為0或正整數)$(0\le s\le6,s=1,2,4)$的質數外,亦即在$\frac{4}{n}$中,除了$(i)n=840t'+121$型(t'為0或正整數)$(ii)n=840t'+361$型(t'為0或正整數)$(iii)n=840t'+841$型(t'為0或正整數)$(iv)n=840t'+169$型(t'為0或正整數)$(v)n=840t'+841$型(t'為0或正整數)$(vi)n=840t'+529$型(t'為0或正整數)等六型的質數外;餘者皆有固定型式的表達式($\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$或$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$) 我們猜想$\frac{4}{n}$中,無法找出固定的表達式者,應是受制於自然數中有那些是質數?

[過程四]:最後我們將研究討論所得的$\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\frac{4}{n}$的表達式,列表如下:

【表一】：

項目$(\frac{m}{n})$：	條　　件	表　　達　　式	例　　題
$\frac{1}{n}$：		$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+\frac{n^2}{k}}$　(k為n^2之正因數,$k<n$)	$\frac{1}{15}=\frac{1}{15+1}+\frac{1}{15+\frac{15^2}{1}}=\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$ $=\frac{1}{15+3}+\frac{1}{15+\frac{15^2}{3}}=\frac{1}{18}+\frac{1}{90}$ $=\frac{1}{15+5}+\frac{1}{15+\frac{15^2}{5}}=\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$ $=\frac{1}{15+9}+\frac{1}{15+\frac{15^2}{9}}=\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$
$\frac{2}{n}$：		$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{2}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{2}}$　(k為n^2之正因數,$k<n$)	$\frac{2}{9}=\frac{1}{\frac{9+1}{2}}+\frac{1}{\frac{9+\frac{9^2}{1}}{2}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}$ $=\frac{1}{\frac{9+3}{2}}+\frac{1}{\frac{9+\frac{9^2}{3}}{2}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$

【表二】:

項目$(\frac{m}{n})$:	條　　件	表　　達　　式	例　　題
$\frac{3}{n}$:	(1) $n = 3t+2$　(t為正整數)	$\frac{3}{n} = \frac{1}{\frac{n+k}{3}} + \frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{3}}$　(k為n^2之正因數, $k<n$)	$\frac{3}{8} = \frac{1}{\frac{8+1}{3}} + \frac{1}{\frac{8+\frac{8^2}{1}}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$ $= \frac{1}{\frac{8+4}{3}} + \frac{1}{\frac{8+\frac{8^2}{4}}{3}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
	(2) $n = 3t+1$　(n為偶數)	$\frac{3}{n} = \frac{1}{\frac{n+k}{3}} + \frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{3}}$　(k為n^2之正因數, $k<n$)	$\frac{3}{22} = \frac{1}{\frac{22+2}{3}} + \frac{1}{\frac{22+\frac{22^2}{2}}{3}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{88}$ $= \frac{1}{\frac{22+11}{3}} + \frac{1}{\frac{22+\frac{22^2}{11}}{3}} = \frac{1}{11} + \frac{1}{22}$
	(3) $n = 3t+1$　(n為奇數)	$\frac{3}{n} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{\frac{n(t+1)+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(t+1)[n(t+1)+1]}{2}}$	$\frac{3}{7} = \frac{1}{\frac{7+2}{3}} + \frac{1}{\frac{7(2+1)+1}{2}} + \frac{1}{\frac{7(2+1)[7(2+1)+1]}{2}}$ $= \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$　$(n = 3t+1 = 7, \therefore t = 2)$

【表三~(一)】：

項目($\frac{m}{n}$)：	條件		表達式	例題
$\frac{4}{n}$：	(1) $n=4t+3$ (t為正整數)		$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{n(t+1)}$	$\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$
	(2) $n=4t+1$ (t為奇數)	$(i)n=24t'+21$ (t'為0或正整數)	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)}{3}}$	$\frac{4}{21}=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{\frac{21(5+1)}{3}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{42}$
	(2) $n=4t+1$ (t為奇數)	$(ii)n=24t'+5$或$24t'+13$ (t'為0或正整數)	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+\frac{n^2(t+1)^2}{2}}{3}}$ $=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{n^2(t+1)^2+2n(t+1)}{6}}$	$\frac{4}{5}=\frac{1}{1+1}+\frac{1}{\frac{5(1+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{5^2(1+1)^2+2\cdot 5(1+1)}{6}}$ $=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$ $\frac{4}{13}=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{\frac{13(3+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{13^2(3+1)^2+2\cdot 13(3+1)}{6}}$ $=\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{468}$
	(3) $n=4t+1$ (t為偶數)	$(i)n=24t'+9$ (t'為0或正整數)	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)}{3}}$	$\frac{4}{9}=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{\frac{9(2+1)}{3}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$ $\frac{4}{33}=\frac{1}{8+1}+\frac{1}{\frac{33(8+1)}{3}}=\frac{1}{9}+\frac{1}{99}$
	(3) $n=4t+1$ (t為偶數)	$(ii)n=24t'+17$ (t'為0或正整數)	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{(t+1)(n+1)}{3}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)(n+1)}{3}}$	$\frac{4}{17}=\frac{1}{5}+\frac{1}{30}+\frac{1}{510}$ $\frac{4}{41}=\frac{1}{11}+\frac{1}{154}+\frac{1}{6314}$

【表三~(一)】：

<table>
<tr><th>項目$(\frac{m}{n})$：</th><th colspan="2">條　　件</th><th>表　　達　　式</th><th>例　　題</th></tr>
<tr><td rowspan="5">$\frac{4}{n}$：</td><td colspan="2">(1) $n=4t+3$ (t為正整數)</td><td>$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{n(t+1)}$</td><td>$\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7\times 2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2) $n=4t+1$
(t為奇數)</td><td>$(i)n=24t'+21$
(t'為0或正整數)</td><td>$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)}{3}}$</td><td>$\frac{4}{21}=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{\frac{21(5+1)}{3}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{42}$</td></tr>
<tr><td>$(ii)n=24t'+5$或
$24t'+13$
(t'為0或正整數)</td><td>$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+\frac{n^2(t+1)^2}{2}}{3}}$
$=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{n^2(t+1)^2+2n(t+1)}{6}}$</td><td>$\frac{4}{5}=\frac{1}{1+1}+\frac{1}{\frac{5(1+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{5^2(1+1)^2+2\cdot 5(1+1)}{6}}$
$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$
$\frac{4}{13}=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{\frac{13(3+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{13^2(3+1)^2+2\cdot 13(3+1)}{6}}$
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{468}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(3)$n=4t+1$
(t為偶數)</td><td>$(i)n=24t'+9$
(t'為0或正整數)</td><td>$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)}{3}}$</td><td>$\frac{4}{9}=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{\frac{9(2+1)}{3}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$
$\frac{4}{33}=\frac{1}{8+1}+\frac{1}{\frac{33(8+1)}{3}}=\frac{1}{9}+\frac{1}{99}$</td></tr>
<tr><td>$(ii)n=24t'+17$
(t'為0或正整數)</td><td>$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{(t+1)(n+1)}{3}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)(n+1)}{3}}$</td><td>$\frac{4}{17}=\frac{1}{5}+\frac{1}{30}+\frac{1}{510}$
$\frac{4}{41}=\frac{1}{11}+\frac{1}{154}+\frac{1}{6314}$</td></tr>
</table>

【表三~(二)】：

項目 $(\frac{m}{n})$：	條　件		附帶條件	表　達　式	例　題
$\frac{4}{n}$：	(3)$n=4t+1$ (t為偶數)	$(iii)n=24t'+25$ (t'為0或正整數)	$(a).n=840t'+73$ 或$n=840t'+193$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+10}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+\frac{n^2(t+2)^2}{10}}{7}}$	$\frac{4}{913}=\frac{1}{230}+\frac{1}{30000}+\frac{1}{62997000}$ $\frac{4}{1033}=\frac{1}{260}+\frac{1}{38370}+\frac{1}{1030541460}$
			$(b).n=840t'+313$ 或$n=840t'+793$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+20}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+\frac{n^2(t+2)^2}{20}}{7}}$	$\frac{4}{1153}=\frac{1}{290}+\frac{1}{47770}+\frac{1}{798642745}$ $\frac{4}{793}=\frac{1}{200}+\frac{1}{22660}+\frac{1}{17693800}$
			$(c).n=840t'+433$ 或$n=840t'+673$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+5}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+\frac{n^2(t+2)^2}{5}}{7}}$	$\frac{4}{433}=\frac{1}{110}+\frac{1}{6805}+\frac{1}{64820443}$ $\frac{4}{673}=\frac{1}{170}+\frac{1}{16345}+\frac{1}{17693800}$
			$(d).n=840t'+553$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)}{7}}$	$\frac{4}{1393}=\frac{1}{350}+\frac{1}{69650}$
			$(e).n=120t'+25$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+4}+\frac{1}{\frac{n(t+4)+5}{15}}+\frac{1}{\frac{n(t+4)[n(t+4)+5]}{75}}$	$\frac{4}{385}=\frac{1}{100}+\frac{1}{2567}+\frac{1}{19765900}$
			$(f).n=120t'+97$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+5}{3}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)[n(t+1)+5]}{15}}$	$\frac{4}{337}=\frac{1}{85}+\frac{1}{9550}+\frac{1}{54719500}$

【表三~(三)】：

項目$(\frac{m}{n})$：	條　件	附帶條件	表　達　式	例　題
$\frac{4}{n}$：	$(4)n=4t+1\quad(t\in N)$	$(a).n=840t'+241$ 或 $n=840t'+409$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+3)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+3)}{7}}$	$\frac{4}{1081}=\frac{1}{272}+\frac{1}{42159}+\frac{1}{11467248}$ $\frac{4}{1249}=\frac{1}{314}+\frac{1}{56025}+\frac{1}{17648370}$
		$(b).n=840t'+481$ 或 $n=840t'+649$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+6)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+6)}{28}}$	$\frac{4}{3841}=\frac{1}{962}+\frac{1}{530058}+\frac{1}{127478949}$ $\frac{4}{2329}=\frac{1}{584}+\frac{1}{195636}+\frac{1}{28562856}$
		$(c).n=840t'+601$ 或 $n=840t'+769$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+4)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+4)}{14}}$	$\frac{4}{1441}=\frac{1}{362}+\frac{1}{74932}+\frac{1}{13562692}$ $\frac{4}{2449}=\frac{1}{614}+\frac{1}{215512}+\frac{1}{66162184}$
		$(d).n=840t'+721$ 或 $n=840t'+49$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)}{7}}$	$\frac{4}{721}=\frac{1}{182}+\frac{1}{18746}$ $\frac{4}{3409}=\frac{1}{854}+\frac{1}{415898}$

綜合[表三~(一)]、[表三~(二)] 、[表三~(三)] 及,得知在$\frac{4}{n}$中,除了(i) $n=840t'+121$ **(ii)** $n=840t'+361$ **(iii)** $n=840t'+841$ **(iv)** $n=840t'+169$ **(v)** $n=840t'+289$ **(vi)** $n=840t'+529$ **等六類型的質數外,餘者,我們都可以找出固定的表達式。**

柒、最後心得及結論：

(一)、任何 0 與 1 之間的最簡分數皆可表成「有限項」相異「單位分數」的和

(二)、「單位分數」本身一定可表成兩個相異「單位分數」的和。且其表達式為:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+\frac{n^2}{k}}(\text{其中}n+k<n+\frac{n^2}{k},\text{即}k<n),$$

(三)、0 與 1 之間的最簡分數不一定可表成兩個相異「單位分數」的和

(四)、最簡真分數 $\frac{2}{n}$ 都可以表成兩個相異「單位分數」的和。且其表達式為:

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{2}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{2}},\text{其中}k\text{為}n^2\text{之正因數},\text{且}k<n。$$

(五)、最簡真分數 $\frac{3}{n}$ 都可以表成三個相異「單位分數」的和。且其表達式:

(1).當 $n=3t+2$ 或 $n=3t+1$ 時,(t 為奇數)

$$\frac{3}{n}=\frac{1}{\frac{n+k}{3}}+\frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{k}}{3}}(\text{其中}k\text{為}n^2\text{之因數},\text{且}k<n,(n+k)\text{為}3\text{之倍數})$$

(2).當 $n=3t+1$ 時,(t 為偶數)

$$\frac{3}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)[n(t+1)+1]}{2}}。$$

(六)、最簡真分數 $\frac{4}{n}$ 應都可以表成三個相異「單位分數」的和。且各分類表達式的總表如下:

[總表一]

項目	條件	附帶條件(一)	附帶條件(二)	附帶條件(三)	表達式	例題
$\frac{4}{n}$	$(1)n=4t+3$ (t為正整數)				$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{n(t+1)}$	$\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$
	$(2)n=4t+1$ (t為奇數)	$(i)n=24t'+21$ (t'為0或正整數)			$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)}{3}}$	$\frac{4}{21}=\frac{1}{6}+\frac{1}{42}$
		$(ii)n=24t'+5$或 $n=24t'+13$ (t'為0或正整數)			$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+2}{3}}+\frac{1}{\frac{n^2(t+1)^2+2n(t+1)}{6}}$	$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$
	$(3)n=4t+1$ (t為偶數)	$(i)n=24t'+9$ (t'為0或正整數)			$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{n(t+1)}{3}}$	$\frac{4}{21}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$
		$(ii)n=24t'+17$ (t'為0或正整數)			$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{\frac{(t+1)(n+1)}{3}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)(n+1)}{3}}$	$\frac{4}{17}=\frac{1}{5}+\frac{1}{30}+\frac{1}{510}$
		$(iii)n=24t'+25$ (t'為0或正整數)	$(a)n=120t'+25$		$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+4}+\frac{1}{\frac{n(t+4)+5}{15}}+\frac{1}{\frac{n(t+4)[n(t+4)+5]}{75}}$	$\frac{4}{385}=\frac{1}{100}+\frac{1}{2567}+\frac{1}{19765900}$
			$(b)n=120t'+97$		$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+4}+\frac{1}{\frac{n(t+1)+5}{3}}+\frac{1}{\frac{n(t+1)[n(t+1)+5]}{15}}$	$\frac{4}{337}=\frac{1}{85}+\frac{1}{9550}+\frac{1}{54719500}$
			$(c)n=120t'+73$	$(a')n=840t'+73$ 或$n=840t'+193$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+10}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+\frac{n^2(t+2)^2}{10}}{7}}$	$\frac{4}{913}=\frac{1}{230}+\frac{1}{30000}+\frac{1}{62997000}$
				$(b')n=840t'+313$ 或$n=840t'+793$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+20}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+\frac{n^2(t+2)^2}{20}}{7}}$	$\frac{4}{793}=\frac{1}{200}+\frac{1}{22660}+\frac{1}{17693800}$
				$(c')n=840t'+433$ 或$n=840t'+673$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+5}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)+\frac{n^2(t+2)^2}{5}}{7}}$	$\frac{4}{433}=\frac{1}{80}+\frac{1}{3580}+\frac{1}{4482160}$
				$(d')n=840t'+553$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)}{7}}$	$\frac{4}{1393}=\frac{1}{650}+\frac{1}{69650}$

[總表二]

項目	條件	附帶條件(一)	附帶條件(二)	附帶條件(三)	表達式	例題
$\frac{4}{n}$:	$(4)n=4t+1$ $(t\in N)$	$(iii)n=24t'+25$ (t'為0或正整數)	$(d)n=120t'+121$	$(a')n=840t'+121$	不固定	
				$(b')n=840t'+241$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+3)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+3)}{7}}$	$\frac{4}{1081}=\frac{1}{272}+\frac{1}{42159}+\frac{1}{11457248}$
				$(c')n=840t'+361$	不固定	
				$(d')n=840t'+481$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+6)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+6)}{28}}$	$\frac{4}{3841}=\frac{1}{962}+\frac{1}{530058}+\frac{1}{127478949}$
				$(e')n=840t'+601$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+4)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+4)}{14}}$	$\frac{4}{1441}=\frac{1}{362}+\frac{1}{74932}+\frac{1}{13562692}$
				$(f')n=840t'+721$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)}{7}}$	$\frac{4}{721}=\frac{1}{182}+\frac{1}{18746}$
				$(g')n=840t'+841$	不固定	
			$(e)n=120t'+49$	$(a')n=840t'+49$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+2)}{7}}$	$\frac{4}{3049}=\frac{1}{854}+\frac{1}{415898}$
				$(b')n=840t'+169$	不固定	
				$(c')n=840t'+289$	不固定	
				$(d')n=840t'+409$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+3)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+3)}{7}}$	$\frac{4}{1249}=\frac{1}{314}+\frac{1}{56025}+\frac{1}{17648370}$
				$(e')n=840t'+529$	不固定	
				$(f')n=840t'+649$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+6)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+6)}{28}}$	$\frac{4}{2329}=\frac{1}{584}+\frac{1}{195636}+\frac{1}{28562856}$
				$(g')n=840t'+769$	$\frac{4}{n}=\frac{1}{t+2}+\frac{1}{\frac{n(t+4)}{7}}+\frac{1}{\frac{n(t+2)(t+)4}{14}}$	$\frac{4}{2449}=\frac{1}{614}+\frac{1}{215512}+\frac{1}{66162184}$

綜合總表(一)(二),得知$\frac{4}{n}$中,除了$(i)n=840t'+121(ii)n=840t'+361(iii)n=840t'+841(iv)n=840t'+169(v)n=840t'+289(iv)n=840t'+529$等六類型的質數外,餘者,我們皆可找出固定的表達式。

捌、問題的討論與展望：

綜合上述,得知在$\frac{4}{n}$中,除了在$n=4t+1$且$n=120(7t'+s)+121$ (t'為0或正整數)($0\le s\le 6$, $s=0,2,6$)或$n=120(7t'+s)+49$ (t'為0或正整數)($0\le s\le 6, s=1,2,4$)的質數外,亦即在$\frac{4}{n}$中,除了$(i)n=840t'+121$型(t'為0或正整數)$(ii)n=840t'+361$型(t'為0或正整數)$(iii)n=840t'+841$型(t'為0或正整數)$(iv)n=840t'+169$型(t'為0或正整數)$(v)n=840t'+841$型(t'為0或正整數)$(vi)n=840t'+529$型(t'為0或正整數)等六型的質數外;剩餘的$\frac{4}{n}$皆有固定型式的表達式($\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$或$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$) 我們猜想在$\frac{4}{n}$中,無法找出固定表達式的原因,應是受制於自然數中,有那些是質數?畢竟目前發現最大的質數是258716位的$2^{859433}-1$(見堀場芳數所著「素數的奧祕」),但確信應有比其更大的質數,然而隨著自然數可以無限的延伸,應是無法確定最大的質數為何者?以上當然純屬我們幾位同學的看法;這也是我們認為我們目前無法找出將所有$\frac{4}{n}$改成$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的原因之一;尚望隨著科技的發展能找出更大的質數,甚或確定出最大的質數,以便導出所有$\frac{4}{n}$的表達式。當然是否如此亦要煩請教授指導。

玖、參考資料：

一、李毓佩著「不知道的世界(數學篇)」(民國 89 年 6 月初版)(凡異出版社)
二、柯召 孫琦著「單位分數」(2003 年 11 月初版)(智能教育出版社)
三、趙文敏著「淺談數論」(民國 70 年 1 月初版)(書銘出版社)
四、文耀光 91 年「古埃及的單位分數問題」 (數學傳播)第 26 卷第 4 期 p52~p59
五、文耀光 92 年「Golomb 算法與埃及單位分數」 (數學傳播)第 27 卷第 1 期 p24~p26

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

國中組 數學科

第三名

030404
單位分數的探密

花蓮縣立花崗國民中學

評語：
討論將真分數 m/n 分解為單位分數的方法，對於 2/n 和 3/n 的情況，討論了分解為兩個單位分數的條件，對 4/n 的情形也做了詳盡的分析，這是一個困難的問題，作者引進了一個新的分解技巧，對此問題的發展提供了一個新的方向，是很不錯的作品，如能進一步改進分解的技巧將會更好。