中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030403

七邊形的數字謎題

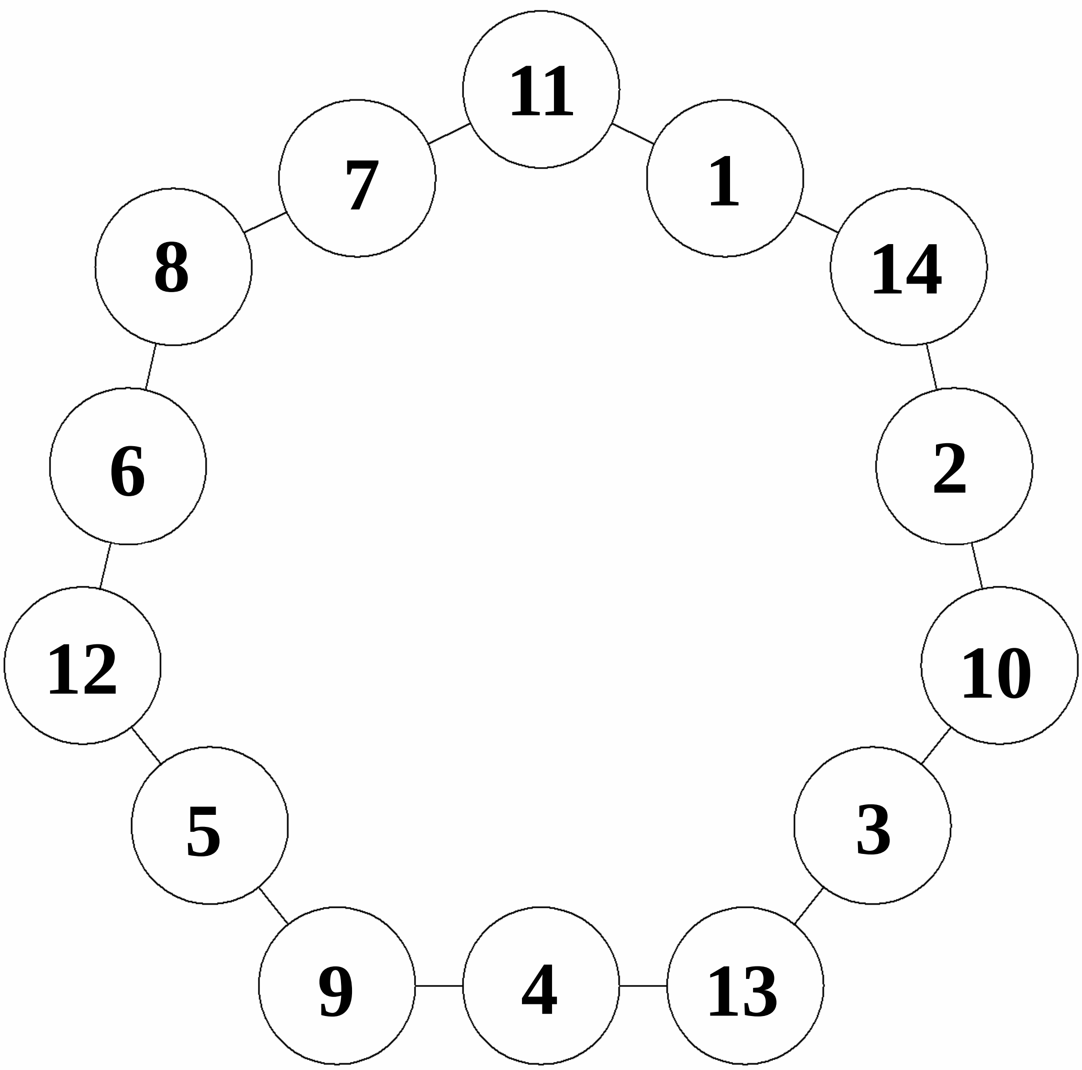
嘉義市立南興國民中學

作者姓名：
國一 蔡睿甄 國一 王頎暐 國一 莊順行
國一 林筱慈

指導老師：
劉姵杏

中 華 民 國 第 四 十 五 屆 中 小 學 科 學 展 覽 會

作 品 說 明 書



科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：七邊形的數字謎題

關 鍵 詞：七邊形、數字謎題

編　　號：

目　　錄

作品名稱：七邊形的數字謎題

壹、摘要

研究主題探討「七邊形的數字謎題」：七邊形每邊三個圓圈，圈中填入數字 1~14(不得重複使用)，使得每邊和為 26。

觀察發現數字填入時的特性：七個邊中圓圈務必填入 1~7，七個頂點圓圈務必填入 8~14。嘗試在此條件下尋求謎題解，方法一：將 1~7 依序填入邊中圓圈，再考慮 8~14 來配成每邊和 26。方法二：以 14 為中心起始數字(頂點圓圈)，考慮兩旁(邊中圓圈)放的數字組合，再找出整組解。方法三：列出每邊和為 26 的所有可能組合，從中挑 7 組串成一七邊形的組合。結果發現：謎題有解，解非唯一。

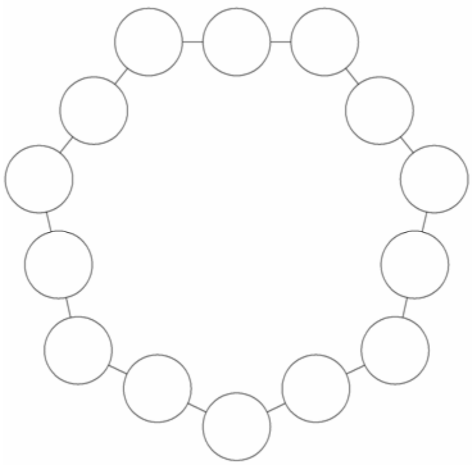
依同樣的數字填法，進一步推廣討論，(一)「邊數改變」，求每邊和。(二)快速找出各邊數的謎題解法。(三)填入「數字改變」，求每邊和。(四)七邊形的數字謎題數字填法改變，求「各邊和的變化」。結果發現：圖形的邊數可推廣至 n 邊形，其中奇數邊形的謎題有解，偶數邊形的謎題則否，而數字的改變只需考慮連續性，皆能有解。七邊形的數字謎題之各邊和的值可變動，上下限範圍值於 19~26 之間。

貳、研究動機

剛開始，老師介紹我們閱讀 數字邏輯 101 這一本書，在裡頭介紹〝數字 26〞的篇章中，碰到一個有趣的問題——杜登尼的「七邊形的數字謎題」。

「七邊形的數字謎題」：

七邊形每邊邊上三個圓圈(如下圖)，在這些圓圈中填入 1~14 的數字(數字不得重複使用)，使得每邊的三個數字之和等於 26。



接觸這個問題之後，我們開始產生了旺盛的好奇心和求知慾，希望藉由這個謎題來挑戰大家對數字變化的極限，以及數的規律性，看看我們是否能夠克服萬難，找出解答，研究成功。藉由科學展覽的機會將我們的研究成果，與大家分享，引發共鳴，激發自我的求知慾、

挑戰心，更進一步探索不同領域的謎題，找出它們的解答，分享結果，拓展數學學習領域，讓學習無止盡。

參、研究目的

一、了解數學「數、量、形」之中，有關「數字」變化的奧妙之處。

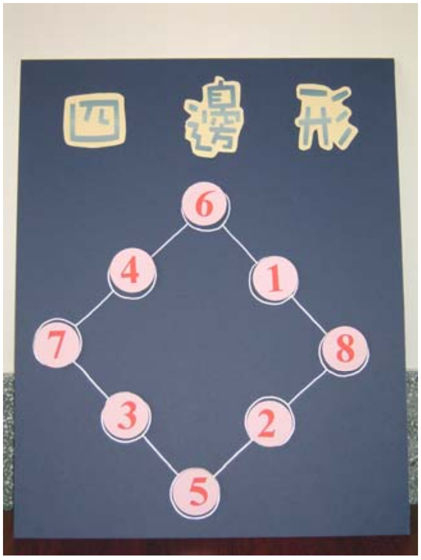
二、找出「七邊形的數字謎題」的解答，並尋求其規律性。

三、利用該題型推廣至其它相關題型(如：三邊形、四邊形、…、n 邊形等)

其次，藉由研究討論的過程，培養出面對數學問題時，能具有邏輯規律，卻又能跳脫常理、深具創意的思考模式，並了解小組的團隊分工合作精神，珍惜一起做研究的時間，一起體驗再次發現數學奧妙時，那種特別而又歡樂的感覺。

肆、研究設備及器材

紙、筆、數字字卡。



伍、研究過程或方法

一、認識「七邊形的數字謎題」的發明家——〝杜登尼〞

「七邊形的數字謎題」是由 Henry Ernest Dudeney (亨利‧恩尼斯‧杜登尼)所提出。杜登尼於 1857 年 4 月 10 日出生，1930 年辭世，他是十九世紀英國知名文學家和數學家，特別擅長於邏輯謎題和數理遊戲。杜登尼小時候曾學習玩西洋棋，因爲如此，它啓發了杜登尼在數理上的特別興趣和謎題構成。1890 年，他與美國著名謎題專家山姆‧洛依德合作發表了一系列謎題文章，杜登尼的第一本書《坎特伯雷謎題集》出版於 1907 年，此後又陸續出版了五本。

二、嘗試找出「七邊形的數字謎題」的解

(一) 決定數字填入位置 (考慮數字算和時的重複性)

1. 填入數字爲 1~14，求 $\boxed{1\sim14\text{ 的數字總和}}$：

   => $1 + 2 + 3 + \cdots + 12 + 13 + 14 = 105$

2. 每邊邊上 3 個數字之和等於 26，七邊形有 7 個邊，求 $\boxed{7\text{ 邊的總和}}$：

   => $26 \times 7 = 182$

3. 發現從「數字的總和」與從各邊之和計算得到的「7 邊的總和」，得到的值不一樣。因爲從各邊之和計算 7 邊總和時，7 個頂點圓圈位置的數字均會被重複計算，因此算 7 邊總和時，所得到的值較大。換句話說，「數字的總和」與「7 邊的總和」的差額，即是重複計算的 $\boxed{7\text{ 個頂點數字之和}}$：

   => $182 - 105 = 77$

4. 若再從「1~14 的數字總和」之中扣掉「7 個頂點數字之和」，所得的差額即是 $\boxed{7\text{ 個邊中圓圈的所有數字之和}}$

   => $105 - 77 = 28$

我們發現：

∵ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28

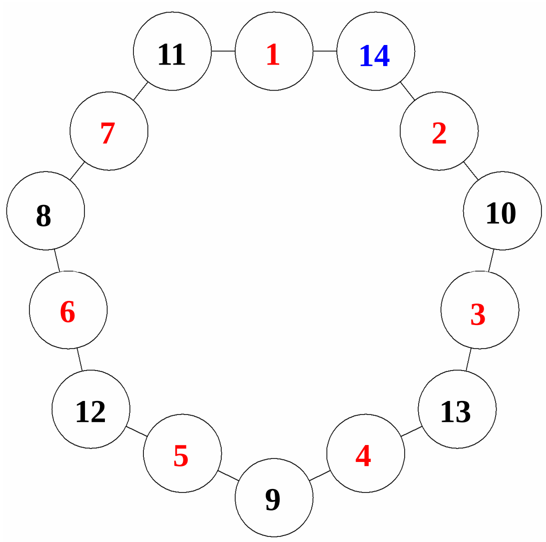
∴7 個邊中圓圈的位置務必填入數字 1~7

∵ 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 77

∴7 個頂點圓圈的位置務必填入數字 8~14

(二) 尋解方法一：任意嘗試

先將 1~7 依序放在七邊形的邊中圓圈上，再考慮 8~14 來配成每邊和等於 26。例如：



第一邊(邊中圓圈填入〝1〞)：

將〝14〞放至頂點圓圈，因 14+1=15，而 26-15=11，所以第一邊的另外一個頂點圓圈必須填入〝11〞。

第二邊(邊中圓圈填入〝2〞)：

因 14+2=16，而 26-2=10，所以第二邊的另外一個頂點圓圈填入〝10〞。

第三邊(邊中圓圈填入〝3〞)：

因 10+3=13，而 26-13=13，所以第三邊的另外一個頂點圓圈填入〝13〞。

第四邊(邊中圓圈填入〝4〞)：

因 13+4=17，而 26-17=9，所以第四邊的另外一個頂點圓圈填入〝9〞。

第五邊(邊中圓圈填入〝5〞)：

因 9+5=14，而 26-14=12，所以第五邊的另外一個頂點圓圈填入〝12〞。

第六邊(邊中圓圈填入〝6〞)：

因 12+6=18，而 26-18=8，所以第六邊的另外一個頂點圓圈填入〝8〞。

第七邊(邊中圓圈填入〝7〞)：

因 8+7=15，而 26-15=11，所以第七邊的另外一個頂點圓圈〝11〞。

【結論與提問】

(1) 這組解是否爲唯一解？

(2) 數字〝1~7〞一定要按照順序填入每邊邊中圓圈嗎？

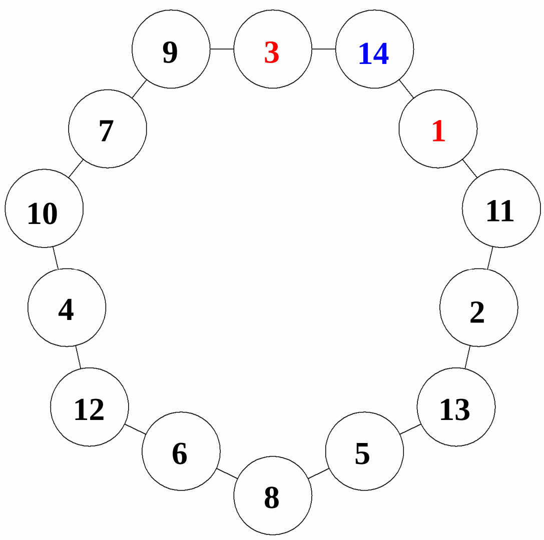
(3) 任意嘗試的方法，費時耗力，是否有簡便、規律的方法可循？

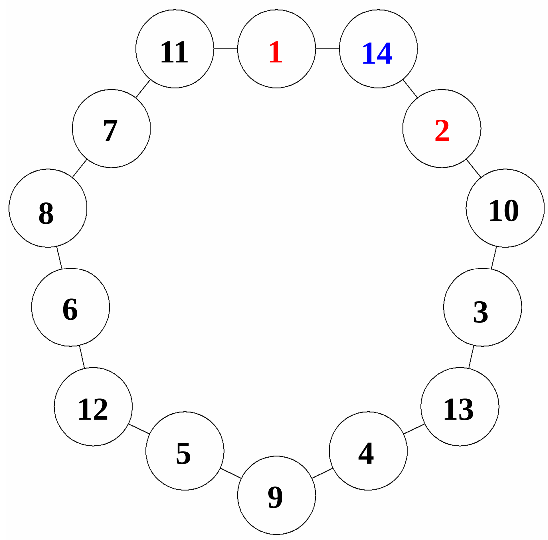
(三) 尋解方法二：以 14 爲中心起始數字(頂點圓圈位置)，考慮兩旁(邊中圓圈位置)放的數字組合，再找出整組解。

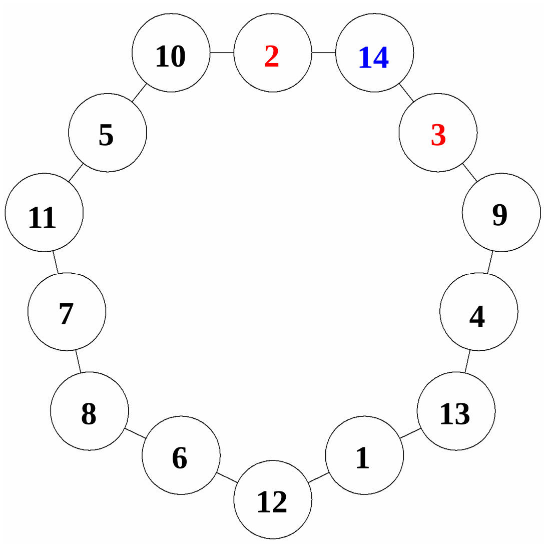
1. 以 14 爲中心起始數字(頂點圓圈位置)的可能組合：

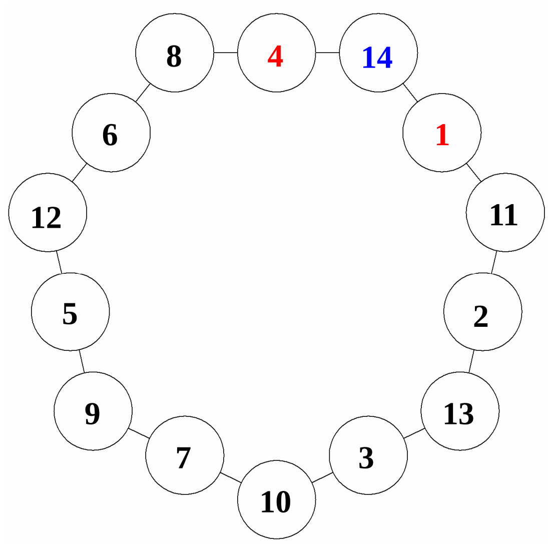
1-14-2	2-14-3	3-14-4	4-14-5	5-14-6	6-14-7
1-14-3	2-14-4	3-14-5	4-14-6	5-14-7	
1-14-4	2-14-5	3-14-6	4-14-7		
1-14-5	2-14-6	3-14-7			
1-14-6	2-14-7				
1-14-7					

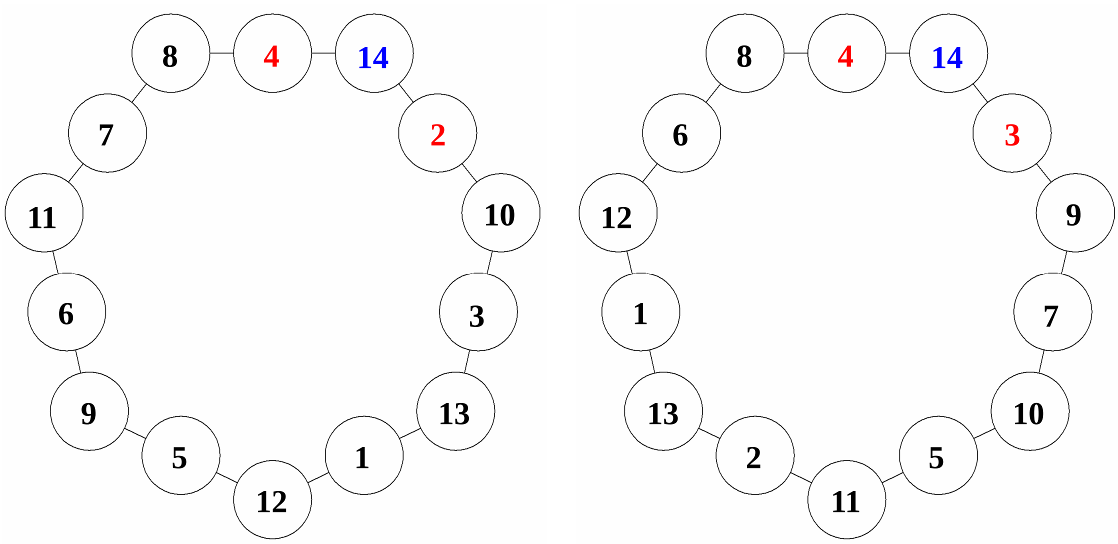
2. 找到的解：











【結論與提問】

(1) 利用 14 為中心起始數字，兩旁所搭配的數字組合可找到有六組解，可知：

<1>「七邊形的數字謎題」的解，並非唯一！

<2> 每邊邊中圓圈位置必須填入的數字 1~7，並不需要依序填入。

(2) 14 旁所搭配的數字不可大於或等於 5：

∵ 14 + 5 = 19 ，26 － 19 = 7

(頂點) (邊中) (頂點)

又 頂點位置必須要放 8~14 的數字

∴ 不合解法！

同理，14 + 6 = 20，26 － 20 = 6 (不合！)

同理，14 + 7 = 21，26 － 21 = 5 (不合！)

∴14 旁所搭配的數字必≦ 4！

故只有 (1-14-2)、(1-14-3)、(1-14-4)、(2-14-3)、(2-14-4)、(3-14-4) 6 組解。

(3) 14 為中心起始數字所搭配出來的 6 組解，均是該搭配法的唯一解嗎？

(4) 可否以其他數字為中心起始數字，搭配其兩旁的數字來找解？

(四) 尋解方法三：列出 3 個數字之和等於 26 的所有可能組合，然後從中再挑 7 組串成一七邊形的組合，即為其數字謎題之解。

1. 3 個數字之和等於 26 的所有可能組合：

1-11-14	2-10-14	3-9-14	4-8-14	5-7-14	6-7-13	7-8-11
1-12-13	2-11-13	3-10-13	4-9-13	5-8-13	6-8-12	7-9-10
		3-11-12	4-10-12	5-9-12	6-9-11	
				5-10-11		

(8 之後的組合會重複先前的組合，故不列出考慮！)

2. 找到的解：

先挑了(13-1-12) → (12-6-8) → (8-7-11) → (11-5-10) → (10-2-14) → (14-3-9) → (9-4-13)，串起來即成為七邊形的數字謎題之解。

挑組合的條件：(1) 位於邊中圓圈位置的數字 1~7 均只能挑選一次

例如：挑了(1-12-13)這組，即不可再挑(1-11-14)這組

(2) 決定第一組之後，再由兩旁的數字向後接續，確定第二組之後，利用刪除已使用過的數字，來減少組合的選擇性。

【結論與提問】

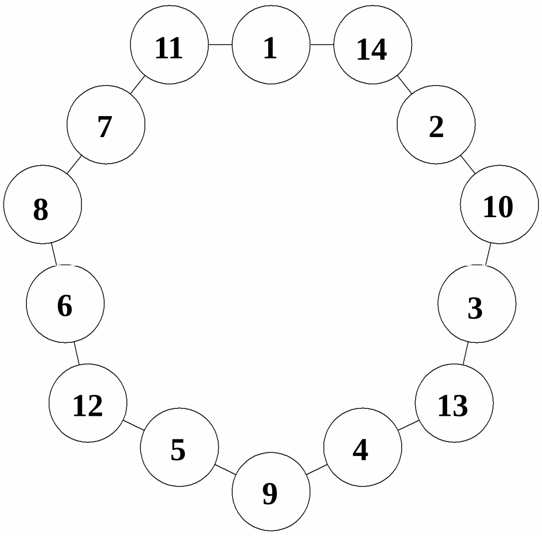
(1) 選定第一組合後，所串成的七邊形組合解，並非唯一！也就是說，同樣的起始組合，卻可能得到不一樣的七邊形組合。

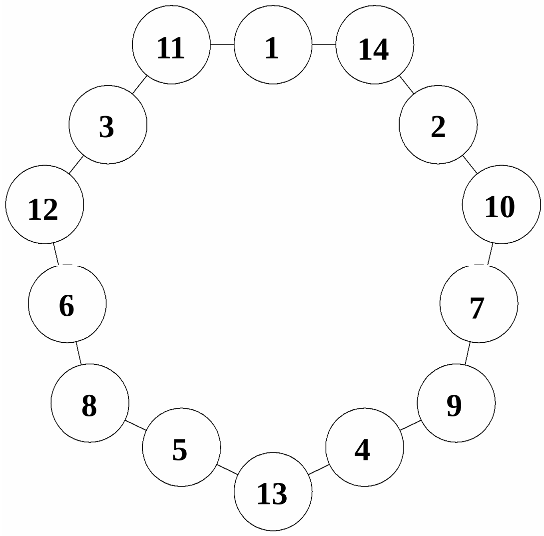
(2) 利用該方法，可找到更多組不同的解。

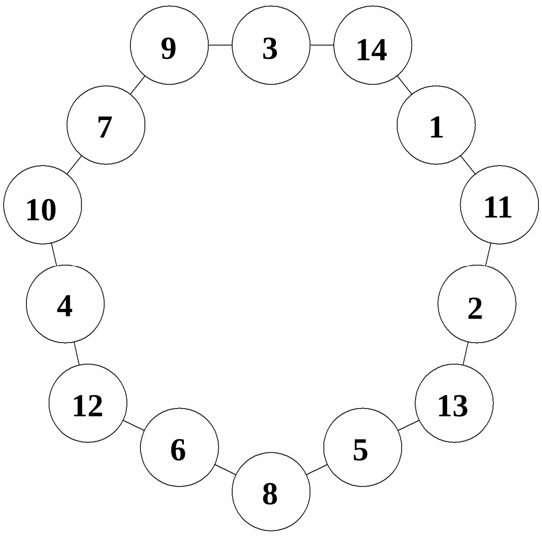
陸、研究結果

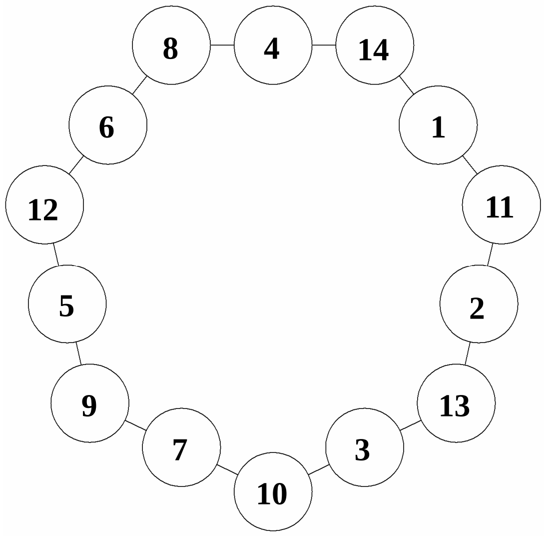
一、數字 1~7 恰填入邊中圓圈的位置，數字 8~14 恰填入頂點圓圈的位置。

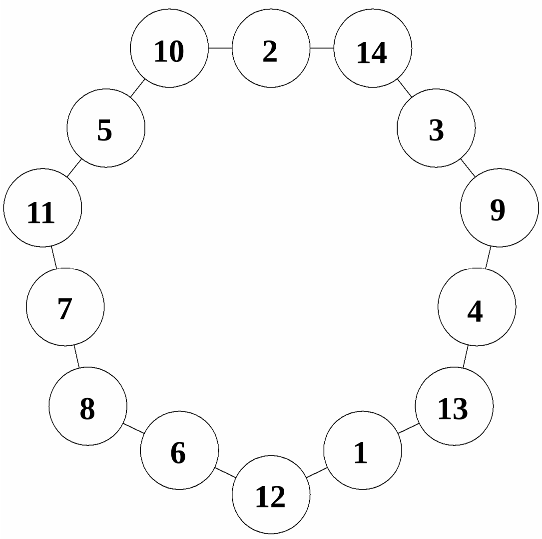
二、「七邊形的數字謎題」的解並非唯一，目前找到九組解，其解為：

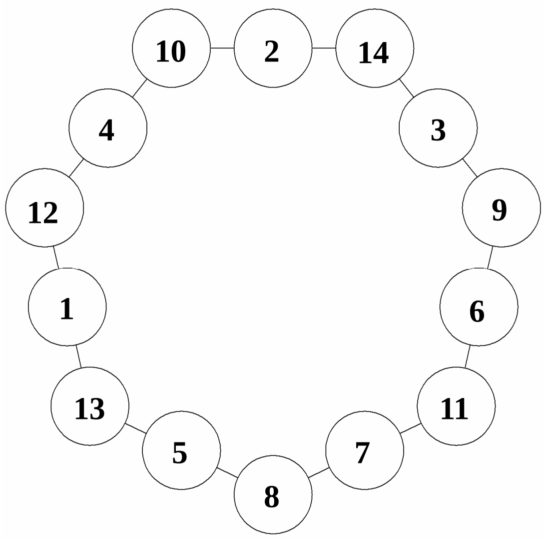


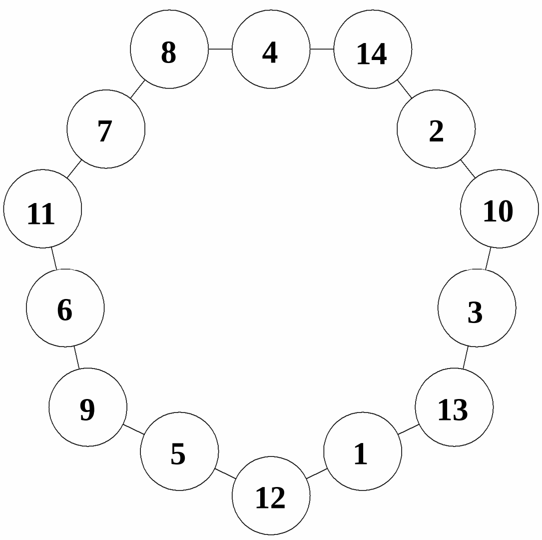


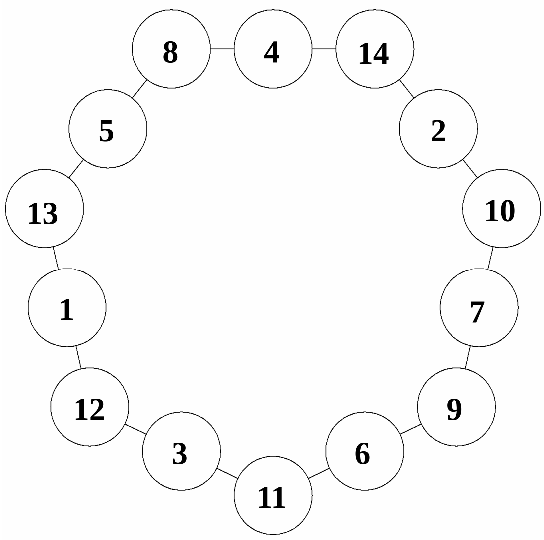


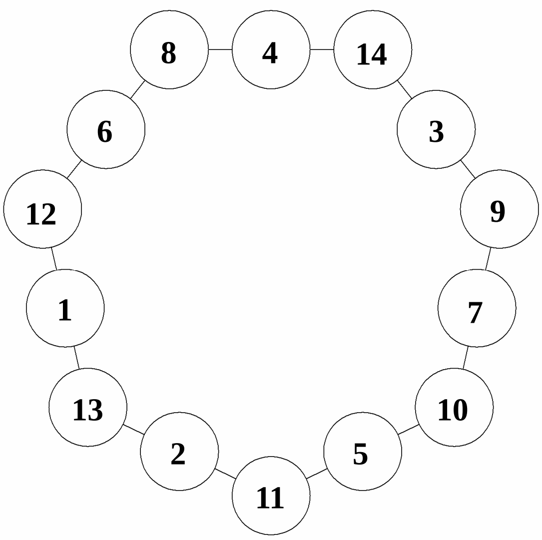












三、若以 14 爲中心起始值的解法，則 14 兩旁的所搭配的數字必≦ 4。

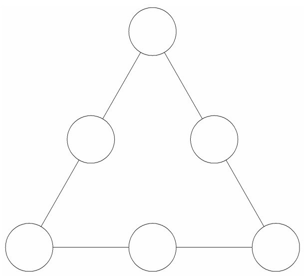
柒、討論

一、推廣討論一：「邊數改變」，求每邊 3 個數字之和

杜登尼所提出的是「七邊形」的數字謎題，可是，凸多邊形的圖形不只七邊形一種，尚有三邊形、四邊形、五邊形、……，甚至可以推廣至 n 邊形，因此，我們決定對「邊數」做改變，但是原題型不變，每邊仍舊維持三個圓圈，同樣的數字填法(填入的數字中，前半部份的數字填入邊中圓圈位置，後半部份的數字填入頂點圓圈位置，數字不得重複使用)，試求每邊 3 個數字之和，並觀察其變化與規律。

(一) 三邊形的數字謎題

(填入數字 1~6，邊中圓圈位置填入 1~3，頂點圓圈位置填入 4~6)



$1+2+3=(1+3)\times 3\div 2=6$

$4+5+6=(4+6)\times 3\div 2=15$

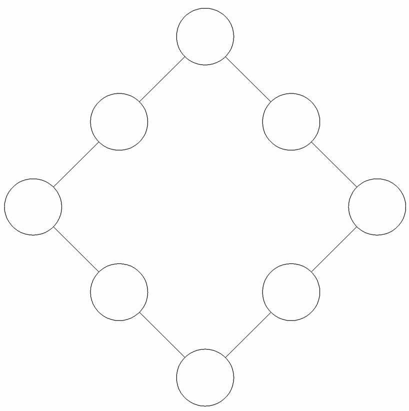
∵ 3 個邊算總和時，頂點圓圈的數字必須重複算，故其和 15 必須 × 2。

∴$(15\times 2+6)\div 3=12$

=> 三邊形的數字謎題，每邊和等於 12。

(二) 四邊形的數字謎題

(填入數字 1~8，邊中圓圈位置填入 1~4，頂點圓圈位置填入 5~8)



$1+2+3+4$

$=(1+4)\times 4\div 2=10$

$5+6+7+8$

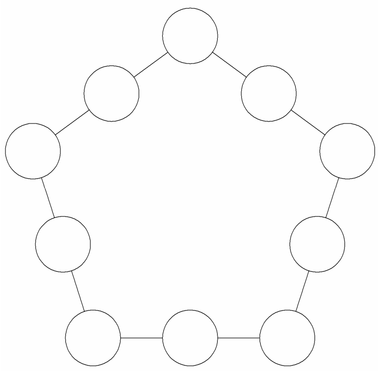
$=(5+8)\times 4\div 2=26$

$(26\times 2+10)\div 4=15.5$

=> 四邊形的數字謎題，每邊和等於 15.5，但是填入的數字均為正整數，其和絕不會為小數值，所以四邊形的數字謎題無解。

(三) 五邊形的數字謎題

(填入數字 1~10，邊中圓圈位置填入 1~5，頂點圓圈位置填入 6~10)



$1+2+3+4+5$

$=(1+5)\times 5\div 2$

$=15$

$6+7+8+9+10$

$=(6+10)\times 5\div 2$

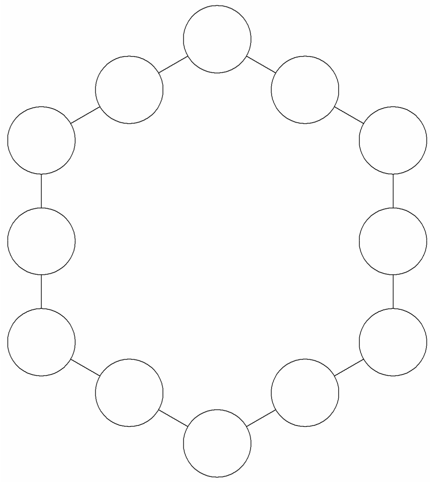
$=40$

$(40\times 2+15)\div 5=19$

=> 五邊形的數字謎題，每邊和等於 19。

(四) 六邊形的數字謎題

(填入數字 1~12，邊中圓圈位置填入 1~6，頂點圓圈位置填入 7~12)



$1+2+3+4+5+6$

$=(1+6)\times 6\div 2$

$=21$

$7+8+9+10+11+12$

$=(7+12)\times 6\div 2$

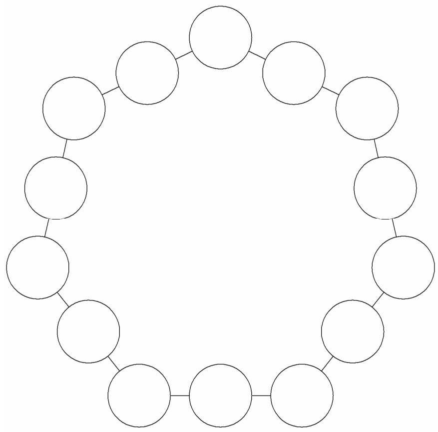
$=57$

$(57\times 2+15)\div 6=21.5$

=> 六邊形的數字謎題，每邊和等於 21.5，但是填入的數字均爲正整數，其和絕不會爲小數值，所以六邊形的數字謎題無解。

(五) 七邊形的數字謎題

(填入數字 1~14，邊中圓圈位置填入 1~7，頂點圓圈位置填入 8~14)



$1+2+3+4+5+6+7$

$=(1+7)\times 7\div 2$

$=28$

$8+9+10+11+12+13+14$

$=(8+14)\times 7\div 2$

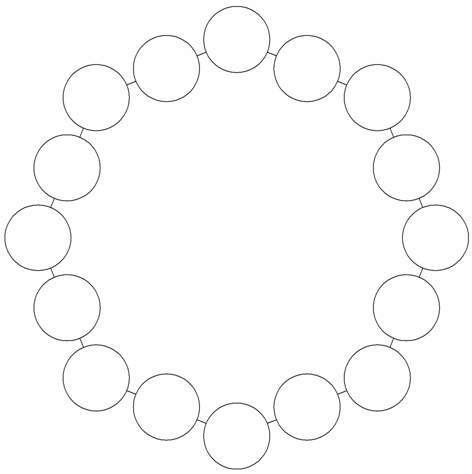
$=77$

$(77\times 2+28)\div 7=26$

=> 七邊形的數字謎題，每邊和等於 26。

(六) 八邊形的數字謎題

(填入數字 1~16，邊中圓圈位置填入 1~8，頂點圓圈位置填入 9~16)



$1+2+3+4+5+6+7+8$

$=(1+8)\times 8\div 2$

$=36$

$9+10+11+12+13+14+15+16$

$=(9+16)\times 8\div 2$

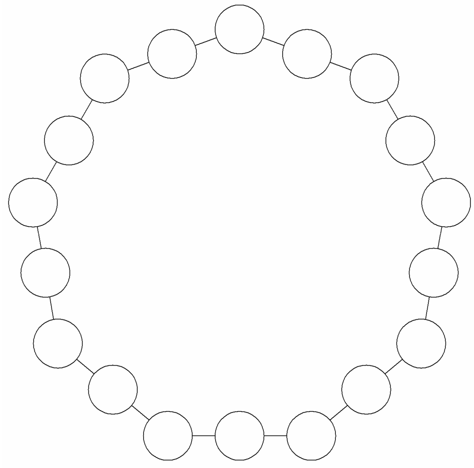
$=100$

$(100\times 2+36)\div 8=29.5$

=> 八邊形的數字謎題，每邊和等於 29.5，但是填入的數字均爲正整數，其和絕不會爲小數值，所以八邊形的數字謎題無解。

(七) 九邊形的數字謎題

(填入數字 1~18，邊中圓圈位置填入 1~9，頂點圓圈位置填入 10~18)



$1+2+3+4+5+6+7+8+9$

$=(1+9)\times 9\div 2$

$=\ 45$

$10+11+12+13+14+15+16+17+18$

$=(10+18)\times 9\div 2$

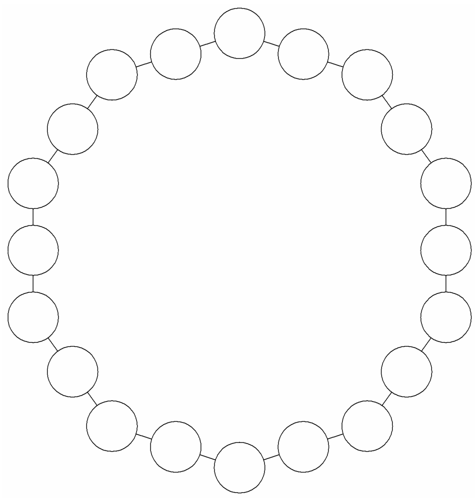
$=\ 126$

$(126\times 2+45)\div 9=33$

=> 九邊形的數字謎題，每邊和等於 33。

(八) 十邊形的數字謎題

(填入數字 1~20，邊中圓圈位置填入 1~10，頂點圓圈位置填入 11~20)



$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

$=(1+10)\times 10\div 2$

$=\ 55$

$11+12+13+14+15+16+17+18+19+20$

$=(11+20)\times 10\div 2$

$=\ 155$

$(155\times 2+55)\div 10=36.5$

=> 十邊形的數字謎題，每邊和等於 36.5，但是填入的數字均爲正整數，其和絕不會爲小數值，所以十邊形的數字謎題無解。

(九) n 邊形的數字謎題

(填入數字 1 ~ 2n，邊中圓圈位置填入 1 ~ n，頂點圓圈位置填入(n+1) ~ 2n)

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{(1+n)\times n}{2}$$

$$(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+2n=\frac{[(n+1)+2n]\times n}{2}$$

$$\left\{\frac{[(n+1)+2n]\times n}{2}\times 2+\frac{(1+n)\times n}{2}\right\}\div n$$

$$=\left\{\frac{[(n+1)+2n]\times n}{2}\times 2+\frac{(1+n)\times n}{2}\right\}\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{[(n+1)+2n]\times n}{2}\times 2\times\frac{1}{n}+\frac{(1+n)\times n}{2}\times\frac{1}{n}$$

$$=(3n+1)+\frac{1+n}{2}$$

$$=\frac{7}{2}n+\frac{3}{2}$$

1. 設 $n=2k+1(k=1,2,3,...)$

   【n 爲奇數】

   $$\frac{7}{2}\times(2k+1)+\frac{3}{2}=7k+(\frac{7}{2}+\frac{3}{2})=7k+5$$

2. 設 $n=2k(k=2,3,4,...)$

   【n 爲偶數】

   $$\frac{7}{2}\times 2k+\frac{3}{2}=7k+\frac{3}{2}$$

   其值非正整數，故不合！

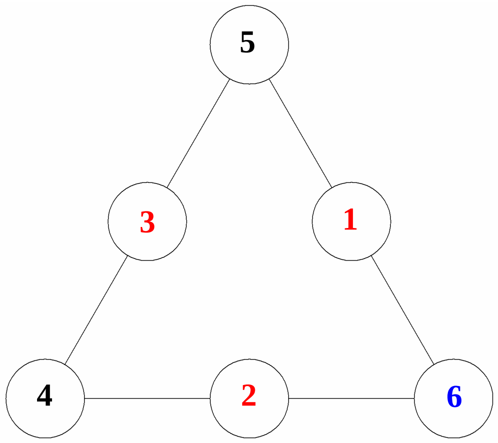
【結論】1. n 邊形的數字謎題，若邊數 n 爲〝奇數〞，則依題型可求得每邊和＝$\frac{7}{2}n+\frac{3}{2}$，其數字謎題有解。

2. n 邊形的數字謎題，若邊數 n 爲〝偶數〞，並不能求得合題型的每邊和，其數字謎題無解。

二、推廣討論二：奇數邊形的數字謎題，確定每邊和之後，求謎題解的數字填法

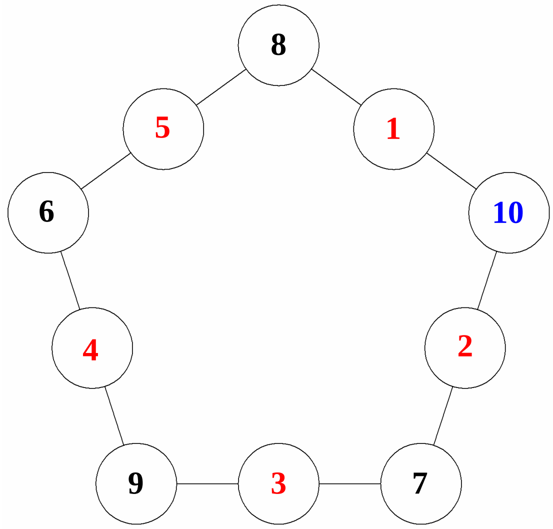
三邊形的數字謎題：

填入數字 1~6，每邊和爲 12

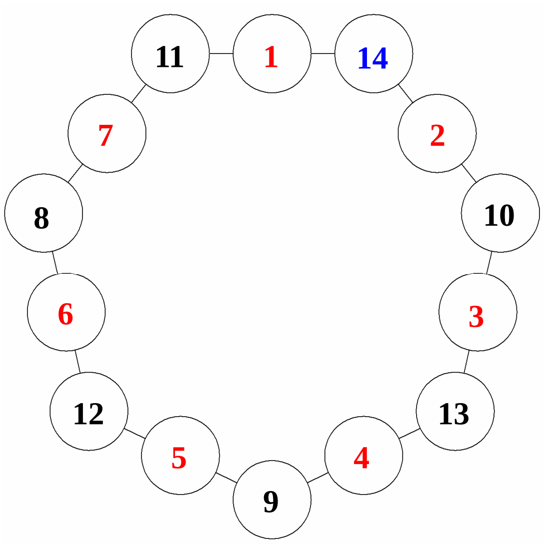


五邊形的數字謎題：

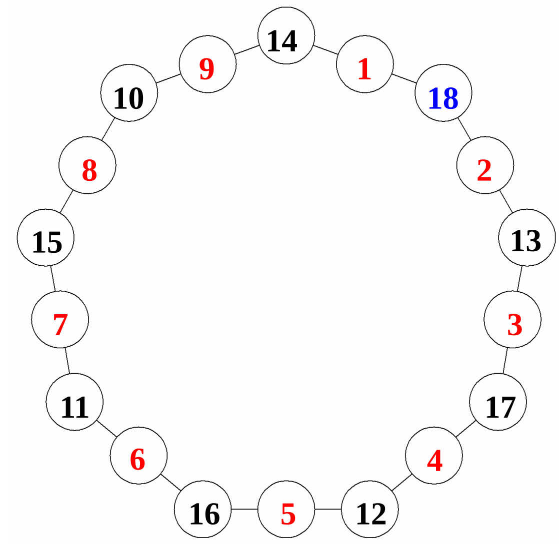
填入數字 1~10，每邊和爲 19



七邊形的數字謎題：
填入數字 1~14，每邊和為 26



九邊形的數字謎題：
填入數字 1~18，每邊和為 33



【結論】n 邊形的數字謎題，填入數字 1~2n，每邊和=$\frac{7}{2}n+\frac{3}{2}$，求得快速的數字填法：

將數字 1~n 依序填入邊中圓圈位置，再將數字 2n 填入數字 1 和數字 2 所夾的頂點圓圈位置，再利用固定的每邊和，依序求出每邊第三個圓圈的值，即可快速求得數字謎題之解。

三、推廣討論三：填入「數字改變」，求每邊 3 個數字之和

討論一針對圖形的邊數做改變，可求得奇數邊形的數字謎題之每邊的固定和，並且謎題有解。於是我們想，在「邊數」上能做改變，那麼，另一個要素「填入數字」是否也能做改變？！因此，我們同樣針對不同的奇數邊形的數字謎題，來進行「填入數字改變，求每邊 3 個數字之和」的探討，由於偶數邊形的數字謎題已知無解，故不做討論。

(一) 三邊形的數字謎題

將填入數字 1~6 改為 2~7	2＋3＋4＝(2＋4) ×3 ÷2 ＝ 9 5＋6＋7＝(5＋7) ×3 ÷2 ＝ 18 (18 × 2＋9) ÷ 3 ＝ 15 =>每邊和等於 15
將填入數字 1~6 改為 3~8	3＋4＋5＝(3＋5) ×3 ÷2 ＝ 12 6＋7＋8＝(6＋8) ×3 ÷2 ＝ 21 (21 × 2＋12) ÷ 3 ＝ 18 =>每邊和等於 18
將填入數字 1~6 改為 4~9	4＋5＋6＝(4＋6) ×3 ÷2 ＝ 15 7＋8＋9＝(7＋9) ×3 ÷2 ＝ 24 (24 × 2＋15) ÷ 3 ＝ 21 =>每邊和等於 21

將填入數字 1~6 改爲 5~10	5 + 6 + 7 = (5 + 7) ×3 ÷2 ＝ 18 8 + 9 + 10 = (8 + 10) ×3 ÷2 ＝ 27 (27 × 2 + 18) ÷ 3 ＝ 24 =>每邊和等於 24
將填入數字 1~6 改爲 6~11	6 + 7 + 8 = (6 + 8) ×3 ÷2 ＝ 21 9 + 10 + 11 = (9 + 11) ×3 ÷2 ＝ 30 (30 × 2 + 21) ÷ 3 ＝ 27 =>每邊和等於 27
將填入數字 1~6 改爲 7~12	7 + 8 + 9 = (7+ 9) ×3 ÷2 ＝ 24 10 + 11 + 12 = (10 + 12) ×3 ÷2 ＝ 33 (33 × 2 + 24) ÷ 3 ＝ 30 =>每邊和等於 30
將填入數字 1~6 改爲 (1+k)~(6+k)	(1+k) + (2+k) + (3+k) = 6 + 3k (4+k) + (5+k) + (6+k) = 15 + 3k [(15+3k) × 2 + (6+3k)] ÷ 3 ＝ (36 + 9k) ÷ 3 ＝ 12 + 3k =>每邊和等於 (12+3k)

【結論】三邊形的數字謎題，將填入數字由 1~6 改爲 (1+k)~(6+k)，每邊和等於(12+3k)。換句話說，只要填入的 6 個數字是連續的，則能求得每邊和的固定值，也就能利用推廣討論二的快速數字填法，找到數字謎題的解。

(二) 五邊形的數字謎題

將填入數字 1~10 改爲(1+k)~(10+k)	(1+k) + (2+k) + (3+k) + (4+k) + (5+k) = 15+5k (6+k) + (7+k) + (8+k) + (9+k) + (10+k) = 40+5k [(40+5k) × 2 + (15+5k)] ÷5 = (95+15k) ÷5 = 19 + 3k =>每邊和等於 (19+3k)

【結論】五邊形的數字謎題，將填入數字由 1~10 改爲 (1+k)~(10+k)，每邊和等於(19+3k)。換句話說，只要填入的 10 個數字是連續的，則能求得每邊和的固定值，也就能利用推廣討論二的快速數字填法，找到數字謎題的解。

(三) 七邊形的數字謎題

將填入數字 1~14 改爲(1+k)~(14+k)	(1+k) + (2+k) + (3+k) + (4+k) + (5+k) + (6+k) + (7+k) = 28+7k (8+k) + (9+k) + (10+k) + (11+k) + (12+k) + (13+k) + (14+k) = 77+7k [(77+7k) × 2 + (28+7k)] ÷7 = (182+21k) ÷7 = 26 + 3k =>每邊和等於 (26+3k)

【結論】七邊形的數字謎題，將填入數字由 1~14 改爲 (1+k)~(14+k)，每邊和等於(26+3k)。換句話說，只要填入的 14 個數字是連續的，則能求得每邊和的固定値，也就能利用推廣討論二的快速數字填法，找到數字謎題的解。

(四) 九邊形的數字謎題

將填入數字 1~18 改爲(1+k)~(18+k)	(1+k) + (2+k) + (3+k) + (4+k) + (5+k) + (6+k) + (7+k) + (8+k) + (9+k) = 45+9k (10+k) + (11+k) + (12+k) + (13+k) + (14+k) +(15+k) + (16+k) + (17+k) + (18+k) = 126+9k [(126+9k) × 2 + (45+9k)] ÷9 = (297+27k) ÷9 = 33 + 3k =>每邊和等於 (33+3k)

【結論】九邊形的數字謎題，將填入數字由 1~18 改爲 (1+k)~(18+k)，每邊和等於(33+3k)。換句話說，只要填入的 18 個數字是連續的，則能求得每邊和的固定値，也就能利用推廣討論二的快速數字填法，找到數字謎題的解。

(五) n 邊形的數字謎題

將填入數字 1~2n 改爲(1+k)~(2n+k)	(1+k) + (2+k) + …+ (n+k) = $\frac{n(n+1)}{2}$ + nk [(n+1)+k] + [(n+2)+k] + …+ (2n+k)

	$= \frac{n(3n+1)}{2} + nk$ $[\,(\frac{n(3n+1)}{2} + nk) \times 2 + (\frac{n(n+1)}{2} + nk)\,]$ $\div n$ $= (\frac{n(7n+3)}{2} + 3nk) \div n$ $= (\frac{7n+3}{2}) + 3k$ **=>每邊和等於 $(\frac{7n+3}{2} + 3k)$**

【結論】n 邊形的數字謎題，將填入數字由 1~2n 改為 (1+k)~(2n+k)，每邊和等於$(\frac{7n+3}{2} + 3k)$。換句話說，只要填入的 2n 個數字是連續的，則能求得每邊和的固定值，也就能利用推廣討論二的快速數字填法，找到數字謎題的解。

四、推廣討論四：七邊形的數字謎題之「各邊和的變化」

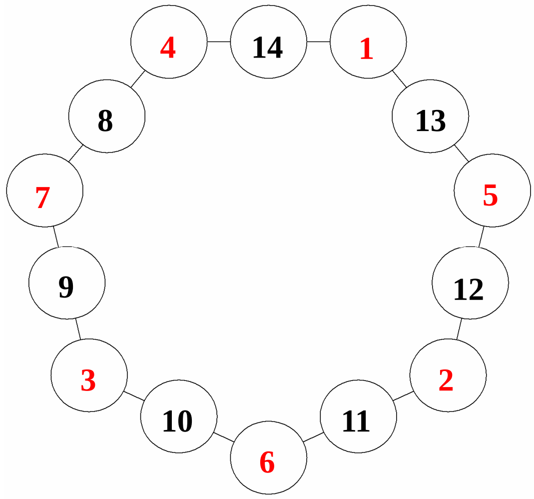
七邊形的數字謎題中，杜登尼很巧妙的設計了讓數字 1~7 必須填在邊中圓圈的位置，讓數字 8~14 必須填在頂點圓圈的位置，而且每邊 3 個數字之和固定為 26，所有條件都配合的剛剛好。但是，如果將數字打亂排序，不一定是 1~7 填入邊中圓圈、8~14 填入頂點圓圈，那麼每邊 3 個數字之和也會跟著做改變。因此，我們決定嘗試：訂出不同的每邊和，再來尋求數字填入的方法是否有解。

(一) 每邊和「大於 26」：

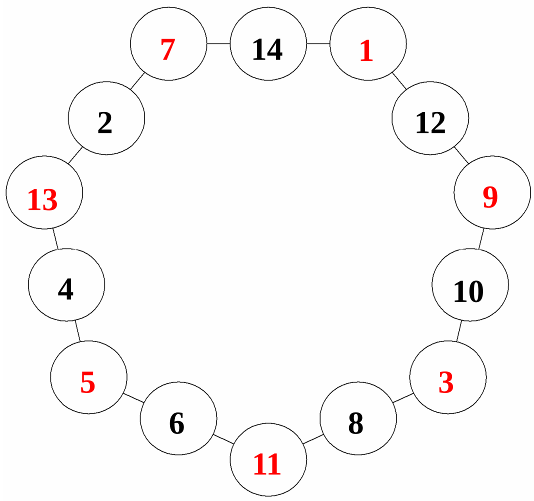
由於頂點圓圈位置的數字於每邊算和時，具有重複性，而且原題型已將 1~14 中較大的七個數字 8~14 填入頂點圓圈位置，因此每邊和為 26 是此數字謎題之每邊和的最大值，若將 1~7 中任一較小的數字與 8~14 做位置變換，只會降低和的值，故不可能求得每邊和大於 26 的值，其最大限值為 26。

(二) 每邊和「等於 19」：

既然原題型是將 1~14 中，較大的七個數字 8~14 填入頂點圓圈位置，因此每邊和為 26 是其最大限值。反之，若將 1~14 中，較小的七個數字 1~7 填入頂點圓圈位置，使得重複性的數值於加總時最小了，其和隨之亦為最小，經由計算，求得各邊和等於 19，即為其各邊和的最小限值。



(三) 每邊和「等於 22」：有解！

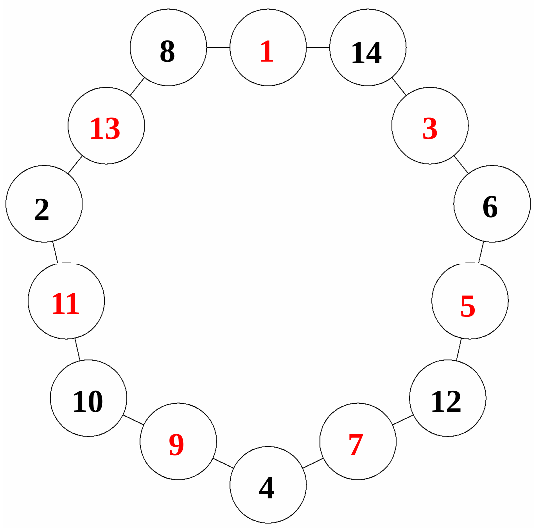


【小發現】

◎　數字 2、4、6、8、10、12、14 (偶數)恰填入邊中圓圈的位置

◎　數字 1、3、5、7、9、11、13 (奇數)恰填入頂點圓圈的位置

(四) 每邊和「等於 23」：有解！

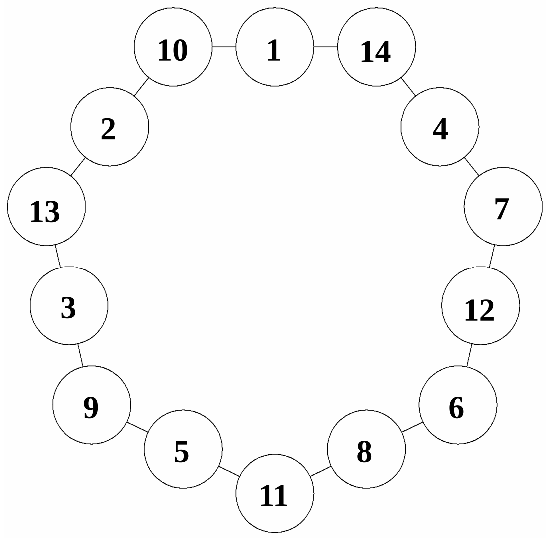


【小發現】

◎　數字 1、3、5、7、9、11、13 (奇數)恰填入邊中圓圈的位置

◎　數字 2、4、6、8、10、12、14 (偶數)恰填入頂點圓圈的位置

(五) 每邊和「等於 25」：有解！



【結論】1.七邊形的每邊和並不是只能固定為 26，而是可變動的。
2.每邊和的最大限值為 26，最小限值為 19。
3.各邊和的範圍值介於 19~26，其中各邊和為 19、22、23、25 時，數字謎題有解。

捌、結論

經過了一段時間的研究討論，我們針對「七邊形的數字謎題(各邊和為 26)」可以歸納出以下幾點結論：

一、填入數字 1~14 之中，數字 1~7 務必填入邊中圓圈的位置，數字 8~14 務必填入頂點圓圈的位置。

二、「七邊形的數字謎題(各邊和為 26)」的求解方法不唯一，其謎題之解亦非唯一！(目前找出九組解)

三、若以 14 為中心起始值的解法，則 14 兩旁的所搭配的數字必≦ 4。

進一步推廣，我們針對不同的凸多邊形做討論，可整理出以下幾點結論：

一、圖形邊數改變：

(一) n 邊形的數字謎題，若邊數 n 為〝奇數〞，填入數字 1~2n，則依題型可求得每邊和$=\dfrac{7}{2}n+\dfrac{3}{2}$，且數字謎題有解。

(二) n 邊形的數字謎題，若邊數 n 為〝偶數〞，填入數字 1~2n，並不能求得合題型的每邊和，則數字謎題無解。

二、n 邊形的數字謎題(n 為奇數)，填入數字 1~2n，每邊和$=\dfrac{7}{2}n+\dfrac{3}{2}$，其快速的數字填法：

將數字 1~n 依序填入邊中圓圈位置，再將數字 2n 填入數字 1 和數字 2 所夾的頂

點圓圈位置，再利用固定的每邊和＝$\frac{7}{2}n+\frac{3}{2}$，依序求出每邊第三個圓圈的值，即可快速求得數字謎題之解。

三、n 邊形的數字謎題(n 為奇數)，填入數字改變：

原填入數字 1 ~ 2n	➔ 各邊和＝$\frac{7}{2}n+\frac{3}{2}$
改變填入數字 (1+k) ~ (2n+k)	➔ 各邊和=$\frac{7n+3}{2}$ +3k

四、七邊形的數字謎題，填入數字 1~14，各邊和的變動：

(一) 若打破杜登尼所設計的填入方式，改變數字所在位置，則各邊和就不會只固定在 26，而之值是可變動的。

(二) 每邊和的最大限值為 26，最小限值為 19。

(三) 各邊和的範圍值介於 19~26，其中各邊和為 19、22、23、25 時，數字謎題有解。至於各邊和為 20、21、24 時，是否有解？！尚待繼續研究討論。

在此研究當中，以求謎題解的過程最為辛苦，雖然老師曾提出利用電腦寫程式的方法來加速計算，但由於我們電腦能力未及，所以我們不考慮使用電腦的輔助。也因此，靠著彼此的努力，突破了自己對數字變化的極限，不斷向上挑戰，與老師、伙伴們一次次地相互腦力激盪，不僅僅利用多種方法解開了杜登尼所設計的「七邊形的數字謎題」，並找到不只一組的解，還更進一步的推廣創作出屬於我們的「三邊形的數字謎題」、「五邊形的數字謎題」、「九邊形的數字謎題」、…甚至「n 邊形的數字謎題」，而且，不只邊數能變、填的數字能變，各邊和也可以隨之作變動，多麼有趣新鮮的事啊！

關於這個研究，我們還有許多天馬行空的想法，例如：每邊邊上只可以固定三個圓圈來填數字嗎？四個、五個圓圈的話，可行嗎？至於謎題的圖形只能是單一個多邊形嗎？可不可以接連許多個呢？接連時，以邊作為接連處，或是以頂點作為接連處呢？都值得我們再繼續研究探討下去。

玖、參考資料及其他

理查 • 菲立普(Richard Phillips)著，洪萬生等譯。數字邏輯 101。初版。臺北市。究竟出版社。第 50 頁。2004[民 93]。

國中組 數學科

030403

七邊形的數字謎題

嘉義市立南興國民中學

評語：

考慮魔方陣的變形問題，找出了七邊形的所有解，也討論了 n 邊形，當 n 為奇數時解的存在條件。在分析的手法上似乎可以進一步的改進(如：考慮滿足數字和的所有數組的鍊結)。若能將結果進一步推廣至中間不只一個數字的情況，或能對一般情況下解的個數做進一步的分析將會更好。