

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

最佳團隊合作獎

030402

飛彩青龍---穿梭在迴圈中的規律

彰化縣立福興國民中學

作者姓名：

國二 梁佳琳 國二 黃昱達 國二 梁世融
國二 王璟芸

指導老師：

陳鵬升 吳旻儒

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會 作品說明書

附件五：
說明書封面

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：飛彩青龍——穿梭在迴圈中的規律

關 鍵 詞：四條青龍、迴圈、逆序（最多三個）

編 號：

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號由國立臺灣科學教育館統一編列。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

飛彩青龍——穿梭在迴圈中的規律

摘要

驚奇：一副牌經過特殊的洗牌方式——逆序之後交疊洗牌一次，可以洗出四條不管花色的「青龍」，研究到最後，我們發明了「類鴿原理」：

存在 n 個區間，每個區間必須「剛剛好」 m 個物件，當「第 n 區間」最上面的一個物件，進入「第 1 區間」時，「第 1 區間」最上面的一個物件，勢必會被推至「第 2 區間」；而「第 2 區間」也因為「多了一個物件」，勢必將原本「第 2 區間」最上面的一個物件，推至「第 3 區間」；使得原本「第 3 區間」最上面的一個物件，推至「第 4 區間」；…，依此類推至「第 n 區間」，使得「第 n 區間」補足 m 個物件。

壹、研究動機

有一天在講到「數形與數列」時，老師爲了引起我們的動機，將一副撲克牌「慢慢地」洗了兩次後（他說是「發功」），就發給我們，竟然讓四個人擁有一條「龍」（花色一樣）；這令我們感到十分疑惑，難道老師在撲克牌上動了手腳？老師說，他變的魔術絕對跟數學有關係，先將他之前所指導的科展給我們看，並告知我們「另一個」洗出四條「青龍」（不管花色）的方法，說他已研究一年多了，看看今年能不能研究出來……先看看「故事情節」吧！

※故事情節

從前，在一個寧靜、和平的精靈王國裡，住著一位精靈，這位精靈的名字叫做—亞西吉，他是國王身邊最值得信任的人。國王派給他一項任務，這個任務是要他去尋找傳說中的動物「夢幻時間鳥」，據說這種「夢幻時間鳥」可以讓人穿梭時空，回到過去或是未來，因為國王的妻子已經死了，而且國王的兩個兒子也很思念逝去的母親，所以，國王才會想要去尋找「夢幻時間鳥」。隔天，亞西吉一行人就出外去尋找傳說中的「夢幻時間鳥」。他們花了好幾年的時間，走了好幾萬里的路，歷經了無數的災難與危險，終於讓他們找到了時間鳥的鳥窩「時間之廊」。但是，時間鳥爲了防止別人入侵牠的鳥窩，牠就在自己的鳥窩前面弄了四個方格，並且放了四組 1 到 13 不同花色的牌，要求將四組牌重新排列，而且最後必須是四條青龍，亞西吉要如何破解這道難題呢？又要如何把「夢幻時間鳥」帶回去呢？

貳、研究目的

一、先呈現洗出四條青龍的步驟：

- (一) Step1：準備一份依序排列的撲克牌（即一副新牌）。
- (二) Step2：由下往上洗若干次。
- (三) Step3：從 1~52，任選一個數字；如 23，由上往下數完 23 張，此時 23 張牌已爲逆序。
- (四) Step4：右手拿起桌上的牌，左手維持原狀，然後交插洗牌（交疊洗牌）。
- (五) Step5：由上往下依序數 13 張，共分成 4 堆。
- (六) Step6：會發現分成 4 堆的數列，每一堆都是 1~13。

二、分析上列步驟：

- (一)洗牌時由下往上洗的特性（或由上往下洗，不可從中間抽哦！）。
 - 1.由下往上。
 - 2.由上往下。
 - 3.歸納：所形成的新順序是否有何特性。

(二)特殊化：先觀察數張逆序之牌插入各區間的結果。

1.一張插入的情形。

2.兩張插入的情形。

(1)兩張「連著」插入。

(2)兩張「分開」插入。

(三)系統化：分析數張逆序之牌插入各區間的結果。

1.分析第一張插入的特性。

2.分析第二張插入的特性。

(1)為何第二張在第一張之上？

(2)牌「連著」插入與「分開」插入，有影響嗎？

(四)若整副牌逆序，即 1~13 改為 13~1，結果會一樣嗎？

(五)類似鴿巢原理的發現，我們稱為「類鴿原理」。

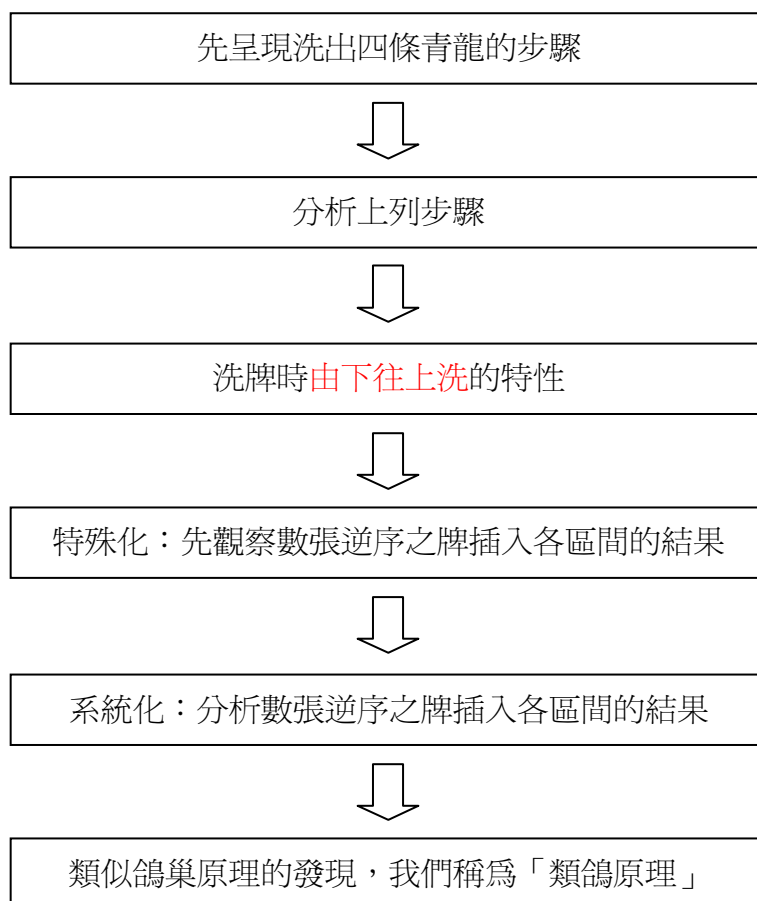
參、研究設備及器材

一、撲克牌

二、Word、Excel 等軟體

肆、研究過程或方法

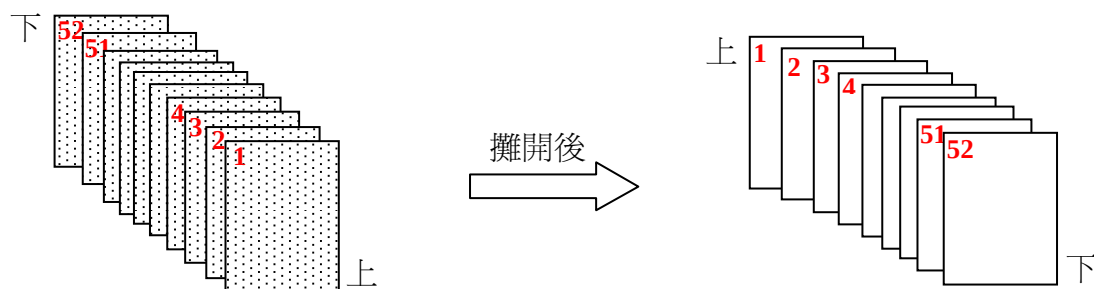
一、流程圖



二、討論所需要的定義：

1.一副牌之上下：

一律依「牌面往下」的方向來看，上方稱為「上」，下方稱為「下」。



2.逆序：

原本牌面攤開後，假若由上到下是依照 A1.A2.A3.A4.A5.A6 的排序，逆序之後，會變成 A6.A5.A4.A3.A2.A1。

例如：你拿著一副牌，所有牌面往下，依序是 A.2.3.⋯.10.J.Q.K（即最底下是 K 正面朝下，最上面是 A）。由上往下數，照順序一張一張往下放（仍然牌面往下），放在桌面上，放完則由上而下形成 K.Q.J.10.⋯.3.2.A 之排列。

又如：所有牌面往下，由上而下依序為

《A1.A2.⋯.A13；B1.B2.⋯.B13；C1.C2.⋯.C13；D1.D2.⋯.D13》

取 5 張牌出來逆序，則兩堆牌由上而下分別為：

第一堆：左手上的牌《A6.A7.⋯.A13；B1.B2.⋯.B13；C1.C2.⋯.C13；D1.D2.⋯.D13》

第二堆：桌面的牌《A5.A4.A3.A2.A1》⇒給右手拿！

由此得知，左手與右手交疊洗牌時，右手嵌入左手的順序，由上到下為

《A5.A4.A3.A2.A1》

3.迴圈：一排數列之順序，經過上下移動後，只有位置改變，前後合起來看，順序並沒有隨之更改。

例如：《54321》→《32154》→《15432》→《21543》→《43215》

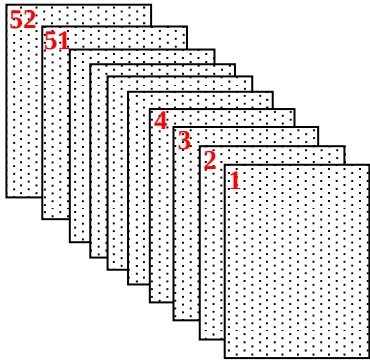
上述情形，各數的位置改變了，但依序唸下去：

5 接 4、4 接 3、3 接 2、2 接 1、1 接 5

的關係並沒有更改，我們便稱其為一迴圈。

伍、研究結果

一、洗出四組一條龍(四組牌之內容皆為一到十三)

	 2005/02/21 16:28:25
Step1：準備一份依序排列的撲克牌。 (即一副新牌)	Step2：由下往上洗若干次。 註：「由下往上洗」或「由上往下洗」都是一樣的，因為牌合起來是一個迴圈。
 2005/02/21 16:31:01	 2005/02/21 16:35:46
Step3：從 1~52，任選一個數字；如 23，由上往下數完 23 張。 註：此時 23 張牌已為逆序。	Step4：右手拿起桌上的牌，左手維持原狀，然後<u>交插</u>洗牌（交疊洗牌）。
 2005/02/21 16:43:22	 2005 02 21
Step5：由上往下依序數 13 張，共分成 4 堆。	Step6：會發現分成 4 堆的數列，每一堆都是 1~13。

二、分析上列步驟：

(一)洗牌時由下往上洗的特性（或由上往下洗，不可從中間抽哦！）。

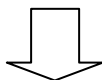
原始狀態：一份依序排列的撲克牌。（即一副新牌）

A1~A13	B1~B13	C1~C13	D1~D13
本身即形成一迴圈： $\langle A1 \sim A13 \cdot B1 \sim B13 \cdot C1 \sim C13 \cdot D1 \sim D13 \rangle$			

1.由下往上。

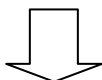
Step1：假設抽了 7 張牌，放到最上層

D7~D13 A1~A6	A7~A13 B1~B6	B7~B13 C1~C6	C7~C13 D1~D6
前後合起來看，是一迴圈： $\langle D7 \sim D13 A1 \sim A6 \cdot A7 \sim A13 B1 \sim B6 \cdot B7 \sim B13 C1 \sim C6 \cdot C7 \sim C13 D1 \sim D6 \rangle$			



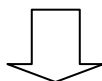
Step2：假設抽了 7 張牌，放到最上層

C13 D1~D12	D13 A1~A12	A13 B1~B12	B13 C1~C12
前後合起來看，是一迴圈： $\langle C13 D1 \sim D12 \cdot D13 A1 \sim A12 \cdot A13 B1 \sim B12 \cdot B13 C1 \sim C12 \rangle$			



Step3：假設抽了 10 張牌，放到最上層

C3~C13 D1D2	D3~D13 A1A2	A3~A13 B1B2	B3~B13 C1C2
前後合起來看，是一迴圈： $\langle C3 \sim C13 D1D2 \cdot D3 \sim D13 A1A2 \cdot A3 \sim A13 B1B2 \cdot B3 \sim B13 C1C2 \rangle$			



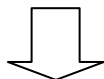
Step4：假設抽了 13 張牌，放到最上層

B3~B13 C1C2	C3~C13 D1D2	D3~D13 A1A2	A3~A13 B1B2
前後合起來看，是一迴圈： $\langle B3 \sim B13 C1C2 \cdot C3 \sim C13 D1D2 \cdot D3 \sim D13 A1A2 \cdot A3 \sim A13 B1B2 \rangle$			

2.由上往下。

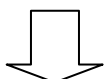
Step1：假設抽了 7 張牌，放到最下層

A8~A13 B1~B7	B8~B13 C1~C7	C8~C13 D1~D7	D8~D13 A1~A7
前後合起來看，是一迴圈： 《A8~A13 B1~B7 • B8~B13 C1~C7 • C8~C13 D1~D7 • D8~D13 A1~A7》			



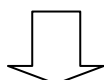
Step2：假設抽了 7 張牌，放到最下層

B2~B13 C1	C2~C13 D1	D2~D13 A1	A2~A13 B1
前後合起來看，是一迴圈： 《B2~B13 C1 • C2~C13 D1 • D2~D13 A1 • A2~A13 B1》			



Step3：假設抽了 10 張牌，放到最下層

B12B13 C1~C11	C12C13 D1~D11	D12D13 A1~A11	A12A13 B1~B11
前後合起來看，是一迴圈： 《B12B13 C1~C11 • C12C13 D1~D11 • D12D13 A1~A11 • A12A13 B1~B11》			



Step4：假設抽了 13 張牌，放到最下層

C12C13 D1~D11	D12D13 A1~A11	A12A13 B1~B11	B12B13 C1~C11
前後合起來看，是一迴圈： 《C12C13 D1~D11 • D12D13 A1~A11 • A12A13 B1~B11 • B12B13 C1~C11》			

3.歸納：所形成的新順序是否有何特性。

假設「由下往上洗」抽了 7 張牌放到最上層，則原本最上層的 1~13 也會有 7 張牌被「擠下來」，即這 7 張牌會移到下一層的 1~13；而且被擠出的「7 張牌的數字」與放進去的數字都相同。如下：

D7~D13 A1~A6 • A7~A13 B1~B6 • B7~B13 C1~C6 • C7~C13 D1~D6

同理，假設「由上往下洗」抽了 7 張牌放到最下層，則原本最下層的 1~13 也會有 7 張牌被「擠上去」，即這 7 張牌會移到上一層的 1~13；而且被擠出的「7 張牌的數字」與放進去的數字都相同。

【結論】「由下往上洗」或「由上往下洗」都是一樣的，因為牌合起來是一個迴圈。

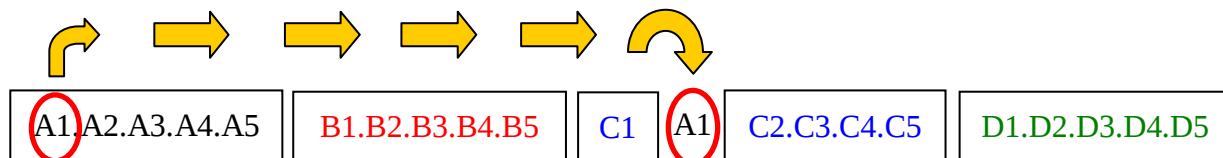
(二)特殊化：先觀察數張逆序之牌插入各區間的結果。

1.一張插入的情形。

假設四個區間各有 5 張牌：



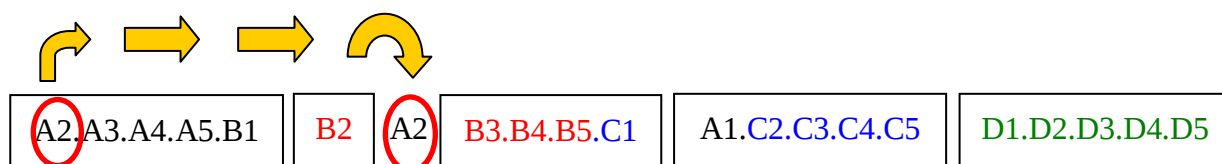
(1) Step1：取一張 A1 逆序，把 A1 隨便插入，假設，插到 C1.C2 之間，排列如下。



你會發現：A1 插到 C1.C2 之間，與 C2.C3.C4.C5 成了一組；且 A1 將 C1 擠到上面跟 B2.B3.B4.B5 成了一組；D1.D2.D3.D4.D5 原封不動。

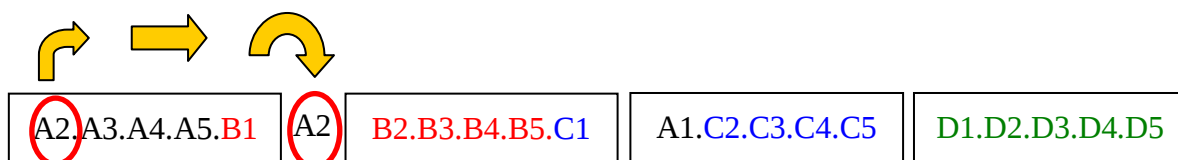
(2) Step2：以 Step1 之圖為基礎，再取一張 A2 逆序，再把 A2

① Case1：插入 B2 之下



你會發現：A2 把 B2 趕走，趕到上方區間。

② Case2：插入 B2 之上



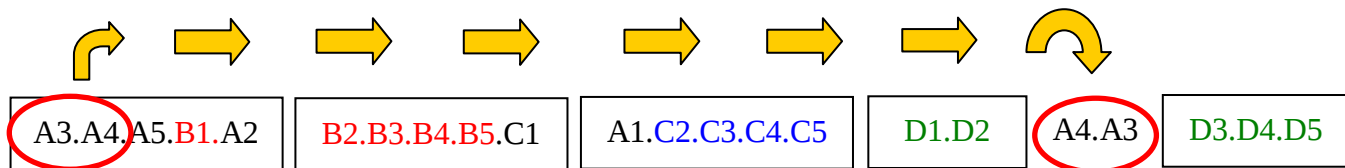
你會發現：A2 自己出去，與 B2 無關。

【結論】一個數字進來，必趕走同樣的數字，不管「自己出去」或「趕走別人」。

2.兩張插入的情形：

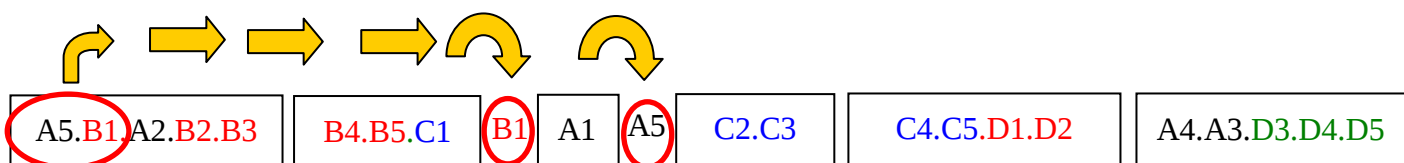
(1)兩張「連著」插入。

取兩張 A3.A4 逆序，把 A3.A4 隨便插入，假設，插到 D2.D3 之間，排列如下：



(2)兩張「分開」插入。

承上圖，再取兩張 A5.B1 逆序，接著分別把 A5.B1，插入 A1 上下，變成：

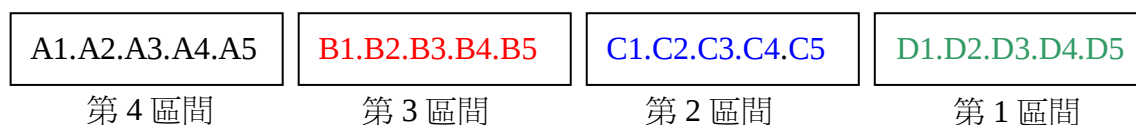


【小結】無法直接看出規律，必須藉由以下「系統化」處理。

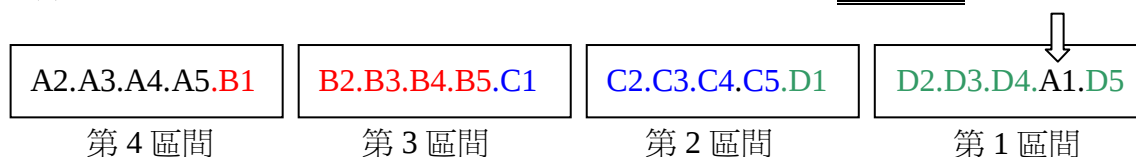
(三)系統化：分析數張逆序之牌插入各區間的結果。

1.分析第一張插入的特性。

假設四個區間各有 5 張牌：

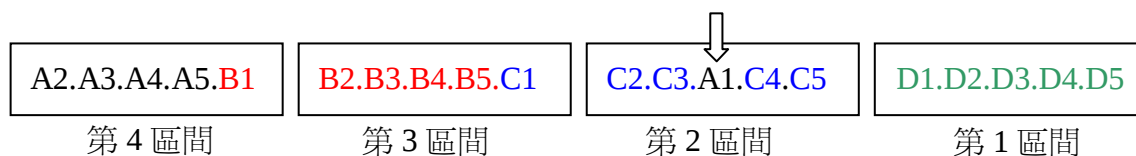


(1) Case1：取一張 A1 逆序，把 A1 隨便插入，假設，插到第 1 區間的 D4 和 D5 之間。



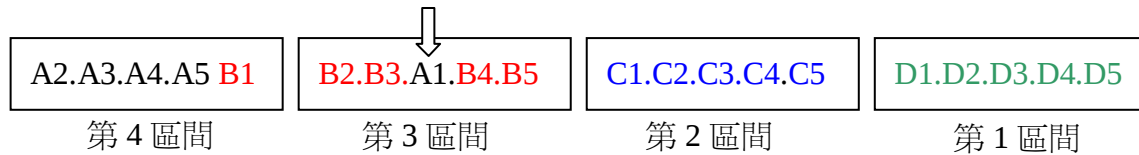
首先把 A1 放置到第 1 區間的 D4.D5 中間，則 A1 會把 D1 給踢出去，而 D1 就會移到第 2 區間；D1 進去後，C1 也會因此移到第 3 區間；C1 移到第 3 區間，B1 會去遞補第 4 區間。

(2) Case2：取一張 A1 逆序，把 A1 隨便插入，假設，插到第 2 區間的 C3 和 C4 之間。



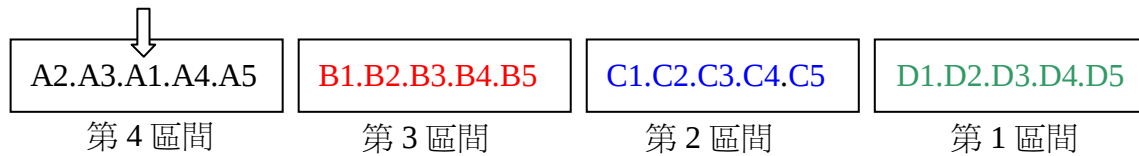
首先把 A1 放置到第 2 區間的 C3.C4 中間，則 A1 會把 C1 給踢出去，而 C1 就會移到第 3 區間；C1 進去後，B1 會去遞補第 4 區間，而第 1 區間則原封不動。

(3) Case3：取一張 A1 逆序，把 A1 隨便插入，假設，插到第 3 區間的 B3 和 B4 之間。



首先把 A1 放置到第 3 區間的 B3.B4.中間，則 A1 會把 B1 給踢出去；B1 會去遞補第 4 區間，而第 1 區間和第 2 區間則原封不動。

(4) Case4：取一張 A1 逆序，把 A1 隨便插入，假設，插到第 4 區間的 A3 和 A4 之間。

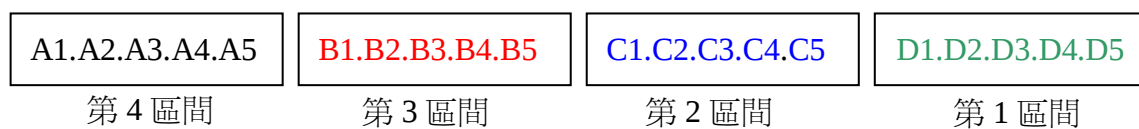


因為 A1 又回到第 4 區間，所以第 3 區間、第 2 區間、第 1 區間都不會改變。

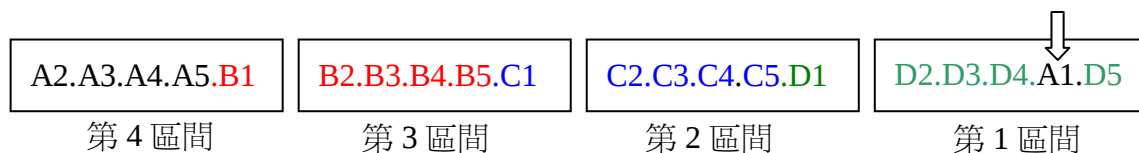
2.分析第二張插入的特性。

延續 1.之(1) Case1，我們接著繼續討論第二張牌插入的特性。

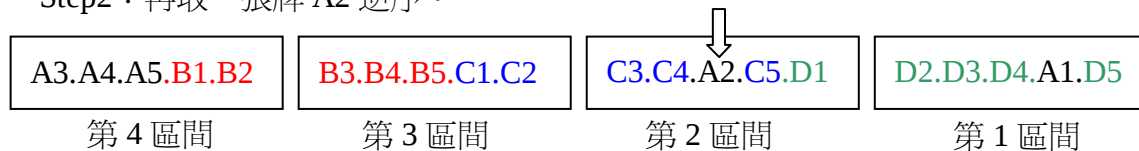
目的⇒取兩張牌 A1.A2 逆序。分解兩個步驟如下：



Step1：取一張 A1 逆序，把 A1 隨便插入，假設，插到 D4.D5 之間。



Step2：再取一張牌 A2 逆序。



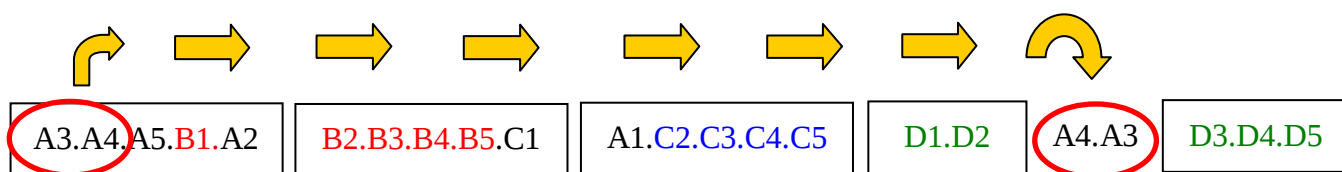
以 Step1 之圖為基礎，假設，把 A2 放到 C4.C5 之間，則 C2 會移動到第 3 區間，B2 也補至第 4 區間。

(1)為何第二張在第一張之上？

【結論】因為「數牌時」是「逆序」的步驟。亦即「逆序」的「上下」效應，會造成「後數的」必在「先數的」之上。如 A1 先放桌面，A2 接著放在 A1 之上。

(2)牌「連著」插入與「分開」插入，有影響嗎？

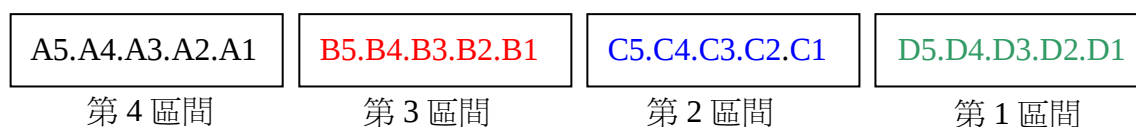
如下圖，相當於「先數的」A3 先進入，「後數的」的 A4 必在 A3 之上；如此，則無所謂的「連著」插入與「分開」插入的分別了。



【結論】由以上討論可知：「連著」插入，因為「逆序」的效應，必會造成一張接著一張「分開」插入。

(四)若整副牌逆序，即 1~13 改為 13~1，結果會一樣嗎？

特殊化來看：假設四個區間各有 5 張。



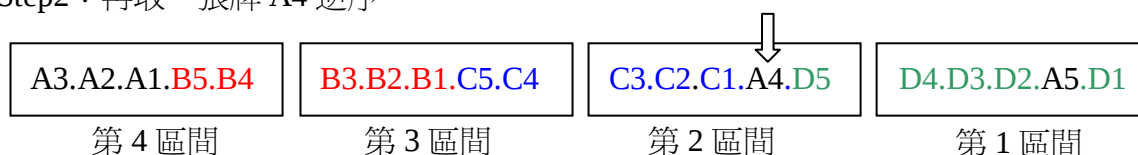
目的⇒取三張牌 A5.A4.A3 逆序。分解三個步驟如下：

Step1：取一張 A5 逆序，把 A5 隨便插入，假設，插到 D2.D1 之間。



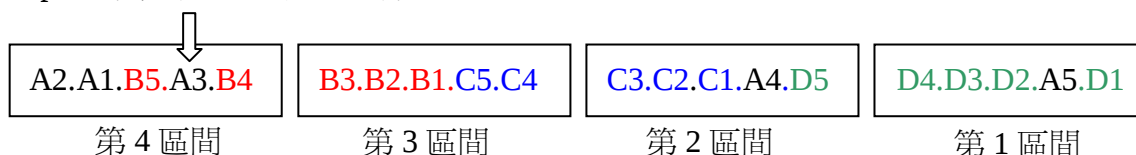
首先把 A5 放到第 1 區間的 D2.D1 中間，則 A5 會把 D5 給踢出去，而 D5 就會移到第 2 區間；D5 進去後，C5 也會因此移到第 3 區間；C5 移到第 3 區間，B5 會去補第 4 區間。

Step2：再取一張牌 A4 逆序。



以 Step1 之圖為基礎，假設，把 A4 放到 C1.D5 之間，則 C4 會移動到第 3 區間，B4 也補至第 4 區間。

Step3：最後取一張牌 A3 逆序。



最後以 Step2 之圖為基礎，假設，把 A3 放到 B5.B4 之間，此時 A2.A1.B5.A3.B4 在同一區間。

【結論】若整副牌逆序，即 1~13 改為 13~1，結果還是會一樣的。

(五)類似鴿巢原理的發現，我們稱為「類鴿原理」。

「鴿巢原理」是說：如果有 $n + 1$ 隻鴿子要飛進 n 個籠子內休息，那麼必定有一個籠子內停了兩隻或兩隻以上的鴿子。

比如說，6 隻鴿子要飛進 5 個籠子內休息，那麼必定有一個籠子內停了兩隻或兩隻以上的鴿子。

在上述(二)(三)(四)的討論中，存在 4 個區間，每個區間必須「剛剛好」13 張牌，當「第 4 區間」最上面的一張牌，進入「第 1 區間」時，「第 1 區間」最上面的一張牌，勢必會被推至「第 2 區間」；而「第 2 區間」也因為「多了一張牌」，勢必將原本「第 2 區間」最上面的一張牌，推至「第 3 區間」；使得原本「第 3 區間」最上面的一張牌，推至「第 4 區間」而補足 13 張。

一般而言，存在 n 個區間，每個區間必須「剛剛好」 m 個物件，當「第 n 區間」最上面的一個物件，進入「第 1 區間」時，「第 1 區間」最上面的一個物件，勢必會被推至「第 2 區間」；而「第 2 區間」也因為「多了一個物件」，勢必將原本「第 2 區間」最上面的一個物件，推至「第 3 區間」；使得原本「第 3 區間」最上面的一個物件，推至「第 4 區間」；…，依此類推至「第 n 區間」，使得「第 n 區間」補足 m 個物件。

在我們現有的知識範圍裡，並未見過如此理論，因其觀點類似「鴿巢原理」，我們姑且稱之為「類鴿原理」。

陸、結論

一、先呈現洗出四條青龍的步驟：

(一) Step1：準備一份依序排列的撲克牌（即一副新牌）。

(二) Step2：由下往上洗若干次。

(三) Step3：從 1~52，任選一個數字；如 23，由上往下數完 23 張，此時 23 張牌已為逆序。

(四) Step4：右手拿起桌上的牌，左手維持原狀，然後交插洗牌（交疊洗牌）。

(五) Step5：由上往下依序數 13 張，共分成 4 堆。

(六) Step6：會發現分成 4 堆的數列，每一堆都是 1~13。

二、分析上列步驟：

(一)洗牌時由下往上洗的特性（或由上往下洗，不可從中間抽哦！）。

【結論】「由下往上洗」或「由上往下洗」都是一樣的，因為牌合起來是一個迴圈。

(二)特殊化：先觀察數張逆序之牌插入各區間的結果。

1.一張插入的情形。

【結論】一個數字進來，必趕走同樣的數字，不管「自己出去」或「趕走別人」。

2.兩張插入的情形：

【結論】無法直接看出規律，必須藉由以下「系統化」處理。

(三)系統化：分析數張逆序之牌插入各區間的結果。

1.分析第一張插入的特性。

2.分析第二張插入的特性：

(1)為何第二張在第一張之上？

【結論】因為「數牌時」是「逆序」的步驟。亦即「逆序」的「上下」效應，會造成「後數的」必在「先數的」之上。如 A1 先放桌面，A2 接著放在 A1 之上。

(2)牌「連著」插入與「分開」插入，有影響嗎？

【結論】「連著」插入，因為「逆序」的效應，必會造成一張接著一張「分開」插入。

(四)若整副牌逆序，即 1~13 改為 13~1，結果會一樣嗎？

【結論】若整副牌逆序，結果還是會一樣的。

(五)類似鴿巢原理的發現，我們稱為「類鴿原理」。

一般而言，存在 n 個區間，每個區間必須「剛剛好」 m 個物件，當「第 n 區間」最上面的一個物件，進入「第 1 區間」時，「第 1 區間」最上面的一個物件，勢必會被推至「第 2 區間」；而「第 2 區間」也因為「多了一個物件」，勢必將原本「第 2 區間」最上面的一個物件，推至「第 3 區間」；使得原本「第 3 區間」最上面的一個物件，推至「第 4 區間」；…，依此類推至「第 n 區間」，使得「第 n 區間」補足 m 個物件。

在我們現有的知識範圍裡，並未見過如此理論，因其觀點類似「鴿巢原理」，我們姑且稱之為「類鴿原理」。

三、「類鴿原理」的應用之一：

在本篇科展例子中， $n=4$ 、 $m=13$ ，而 4 與 13 是撲克牌的最大特色——「4 種花色、13 種數字」。如果把 n 、 m 對調呢？即 $n=13$ 、 $m=4$ ，又會如何呢？

Step1：把一副牌依照花色排列，如黑桃、紅心、方塊、梅花、黑桃、紅心、方塊…
（數字不用理它；同理，第 1 頁的 Step1，其實不用管花色的！）。

Step2：由下往上洗若干次（這只是虛晃一招）。

Step3：再逆序數若干張（如 23 張）。

Step4：交疊洗牌。

Step5：由上往下 4 張、4 張一數，共分成 13 組。

Step6：你會發現這 13 組牌都會有 4 種不同花色！

原理很簡單，本篇科展例子中（ $n=4$ 、 $m=13$ ），是「一個數字進來，必趕走同樣的數字」；而當 n 、 m 對調時（ $n=13$ 、 $m=4$ ），是「一種花色進來，必趕走同樣的花色」。也就是「類鴿原理」必須加上「逆序」，才能洗出這種效果來！或許我們可以叫「鴿逆原理」吧！

四、未來發展：

（一）是否還有其他令人驚奇的方法可以再洗出四條龍。

（二）「類鴿原理」的相關應用。

五、後記：

當我們看見老師將一副依序排列好的撲克牌，經過特殊洗牌法，依序發給四個人，每個人竟然都得到四條龍，心中除了驚奇，更充滿許多問號，迫不及待想要找出為什麼，更想要馬上把這個招術學會，在動手操作實驗之後，除了學會這個技巧之外，也在排列組合的過程中，發現了很多隱藏在背後的數學知識。

雖然學到很多東西，但是不免要抱怨一下，中午要到電腦教室研究、打報告，就連星期一、三、五晚上都要留下來，使我原本回家有充裕的時間看書，忽然變成一回家就已經快要九點半，而沒有很多的時間可以去複習功課，考試的成績越來越差、挫折感也越來越大；但是，後來經過老師、父母的開導，而自己也仔細地想一想，發現我應該好好把握這難得的機會，而且留校到九點也能讓我提早適應三年級的生活，除此之外，也學到不少的電腦知識，這些都是我們參加科展所得到的收穫！！

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國中組 數學科

最佳團隊合作獎

030402

飛彩青龍---穿梭在迴圈中的規律

彰化縣立福興國民中學

評語：

研究內容的呈現循序漸進，條理分明，探究過程與口頭報告皆充分展現出團隊合作的精神。