中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030401

星星的秘密

縣立麥寮中學(附設國中)

作者姓名：

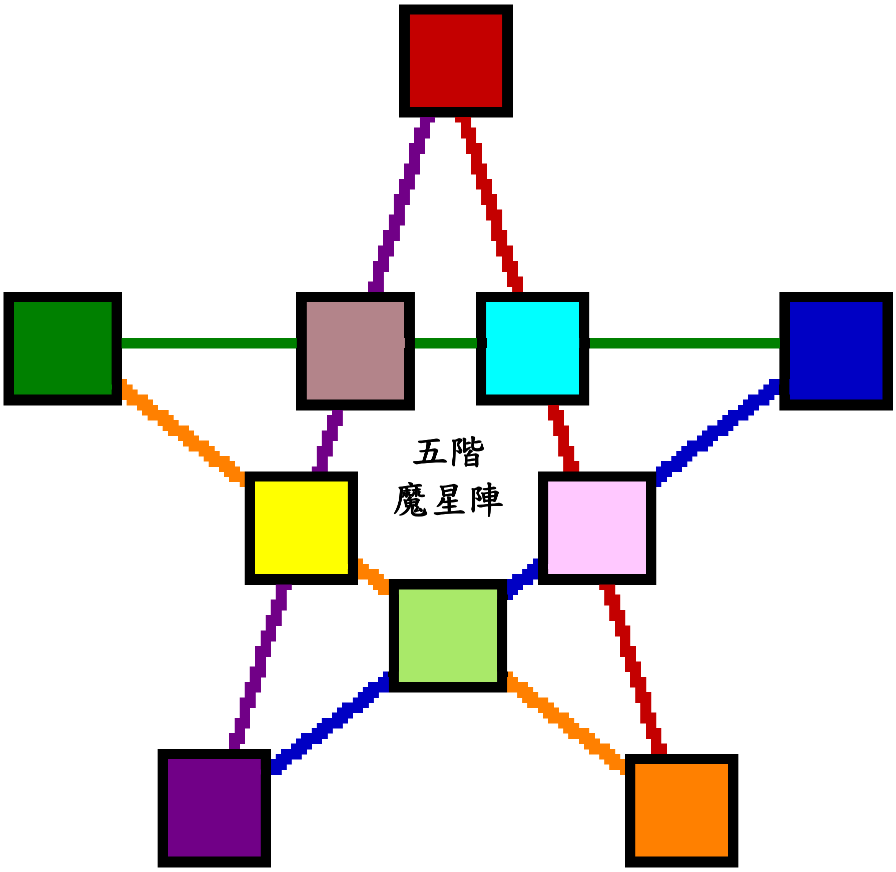
國二 丁　航 國二 林志弘 國二 林緯鈞

指導老師：

吳坤峰

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書



科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：星星的秘密

關 鍵 詞：五階魔星陣、幻五角星形

編　　號：

作品名稱：星星的秘密

壹、摘要

將一個正五邊形的每一個邊延長，就可以圍成一個五角星形(Pentagram)。如果在五角星形的十個點上，把它填入十個整數，使得每一條邊上的四個數字總和等於一個定數，則符合這樣規則的圖形，我們把它稱作幻五角星形(Magic Pentagrams)或五階魔星陣(Order-5 Magic Stars)。本研究主要在探索五階魔星陣之各種變形的規律及尋找最佳的解答，並提出新的建構方法改進趙文敏教授所提供之五階魔星陣的建構方法。

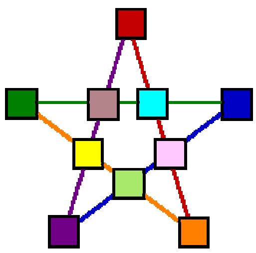
貳、研究動機

康軒版第一冊第三章學習廣角(92 年修訂版)曾提及中國古代的縱橫圖——幻方或魔方陣(Magic Squares)，而趙文敏教授所編著的寓數學於遊戲第二輯當中也談論許多魔星陣的範例，於是我們就決定利用這次的科展來討論這些問題。

定義 1：如果在五角星形的十個點(五個尖頂及原正五邊形的五個頂點)上，把它填入 1 到 10 的數字，使得每一條邊上的四個數字總和等於一個定數(我們稱為魔和數 Magic Sum，簡稱魔數，假設為 S，則 S＝22)，則符合這樣規則的圖形，我們把它稱作狹義的幻五角星形(Pure Magic Pentagrams)或狹義的五階魔星陣(Pure Order-5 Magic Stars)；相反地，廣義的幻五角星形(Impure Magic Pentagrams)或廣義的五階魔星陣(Impure Order-5 Magic Stars)只要數字不重複即可。

定義 2：從 1 到 m 當中選取十個數字，其中 m＞10，把它填入五角星形的十個點上，若每一條邊上的四個數字總和等於一個定數(魔數 S)，則存在最小的 S 值，使得 m 達到最小值時，則符合這樣規則的圖形，我們把它稱作最佳廣義的幻五角星形(The Best Solutions of Impure Magic Pentagrams)或最佳廣義的五階魔方陣(The Best Solutions of Impure Order-n Magic Stars)。

問　題：請你找出符合狹義的五階魔星陣的解答？若找不到的話，那麼存在最小的 S 值，使得 m 達到最小值時，則最佳廣義的五階魔星陣的解答有多少組呢？



(圖 4)

參、研究目的

一、尋找及改進五階魔星陣的建構方法。
二、探索最佳五階魔星陣之各種變形的規律及尋找最佳的解答。
三、藉由共同研究與腦力激盪、幫助學生能夠尋找問題、設定問題，並且設法自我尋求答案，讓學生增進自我分析能力。

肆、研究設備及器材

一、紙、筆、電子計算機
二、電腦(Microsoft Word 軟體、Photo Impact 8 軟體)、人腦(三顆)

伍、研究過程或方法

一、研究流程：

(一)、分析五角星形每一條邊上的數字總和(魔數)

↓

(二)、尋找五階魔星陣的建構方法(內層數字總和建構法)

↓

(三)、討論五階魔星陣的各種變形(拓樸變形與鋼性變形)

↓

(四)、改進五階魔星陣的建構方法(設一得三建構法)

↓

(五)、探索五階魔星陣各點填入的情形及尋求最佳解答

↓

(六)、引申五階魔星陣其他情況並展望未來研究方向

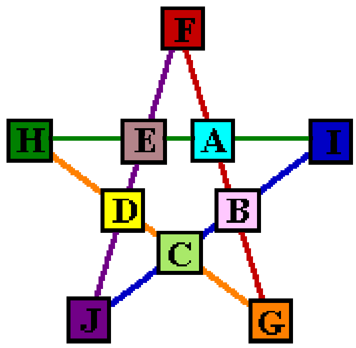
↓

(七)、撰寫研究結果並完成說明書

二、問題分析與解決：

(一)、由十個點來分析五角星形

我們將五角星形上的十個點填上 A、B、C、D、E、F、G 、H、I、J 十個為整數的英文字母，如下面(圖 5)所示。



(圖 5)

因為每一條邊上的數字總和(魔數 S)相等，所以我們可以表示為

$F+A+B+G=S$ ……………(1)

$G+C+D+H=S$ ……………(2)

$H+E+A+I=S$ ……………(3)

$I+B+C+J=S$ ……………(4)

$J+D+E+F=S$ ……………(5)

因此， $(1)+(2)+(3)+(4)+(5)$ 可以得到

$$2(A+B+C+D+E+F+G+H+I+J)=5S$$

故 T (總和) $=A+B+C+D+E+F+G+H+I+J$

$$=\frac{5S}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(甲)}$$

也可以說， S (魔數) $=\frac{2T}{5}$ ……………………………………(乙)

【$S=2(\frac{T}{5})$，若 T 為 5 的倍數，則 S 必為偶數】 …………(丙)

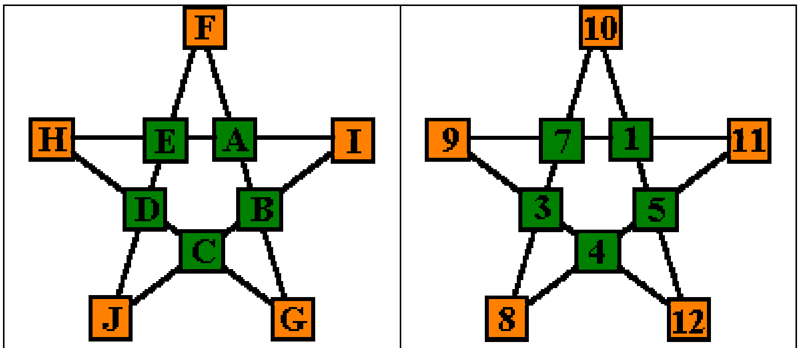
(∵若 T 不為 5 的倍數，則 S 不為整數。∴矛盾。)

(二)、建構五階魔星陣的方法(內層數字總和建構法)

下面我們引用趙文敏教授在寓數學於遊戲第二輯中所提供的範例，但原先範例中的數字及方法我們已稍作修改。

【範例】如(圖 7)所示，如果**我們要建構一個魔數為 S＝28 之廣義的五階魔星陣**，根據(甲)則我們所需的十個數字總和為

$$T=\frac{5S}{2}=\frac{5\times 28}{2}=70 \text{ 。}$$



(圖 6)　(圖 7)

如(圖 6)，我們將 T 分成兩層數字總和(內層數字總和 X＝A＋B＋C＋D＋E 與外層數字總和 Y＝F＋G＋H＋I＋J)，以上圖為例，我們得到 T ＝X＋Y，也就是說 70＝20＋50。

任取五個數字使其總和等於內層數字總和 X＝20，假設這五個數字分別為 1，3，4，5，7。然後，將五個數字任意填進內層的五個位置。假設我們所填的就是上面(圖 7)的形式，也就是 A＝1，B＝5，C＝4，D＝3，E＝7，則依序求這五對數字的總和：

A＋B＝1＋5＝6
C＋D＝4＋3＝7
E＋A＝7＋1＝8
B＋C＝5＋4＝9
D＋E＝3＋7＝10

指定外層其中任何一個位置為 x，我們假設 F＝x，則

x＋6＋G＝28 ⇒ G＝22－x，代入下一式；
G＋7＋H＝28 ⇒ H＝x－1，代入下一式；
H＋8＋I＝28 ⇒ I＝21－x，代入下一式；
I＋9＋J＝28 ⇒ J＝x－2，代入下一式；
J＋10＋F＝28 ⇒ F＝20－x

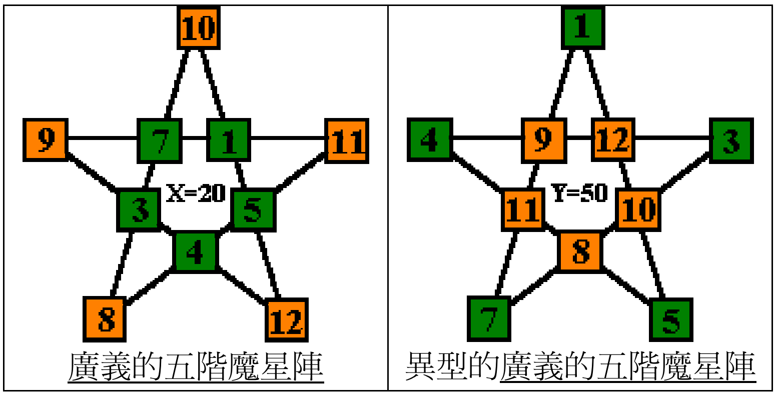
於是，由 F 可得到 x＝20－x，所以 x＝10。因此，外層的五個點分別 F＝10，G＝12，H＝9，I＝11，J＝8。

由上述的方法，我們就可以「輕輕鬆鬆」地建構一個廣義的五階魔星陣了。

(三)、探討五階魔星陣的變形

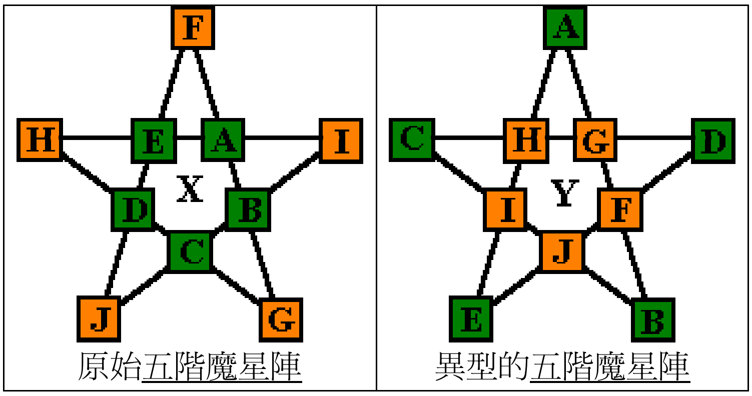
1.異型的五階魔星陣之拓樸變形

觀察上面**【範例】**中的廣義的五階魔星陣，我們不難發現：若將其內層數字與外層數字相互對調位置，則可以產生另一個不同廣義的五階魔星陣，而新的魔星陣與原來的魔星陣之魔數不變。如(圖 8)所示，則兩個廣義的五階魔星陣的魔數仍為 $S = 28$ 。



(圖 8)

我們推廣上面的建構方法，將廣義的五階魔星陣推廣到任意的五階魔星陣，只要將內、外層的數字依照下面(圖 9)的位置擺放，則可得到兩個魔數相等之不同的五階魔星陣，我們稱爲異型的拓樸變形。



(圖 9)

2.同型的五階魔星陣之鋼性變形

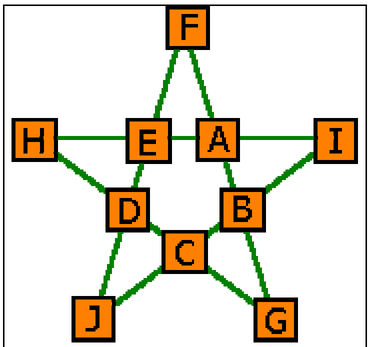
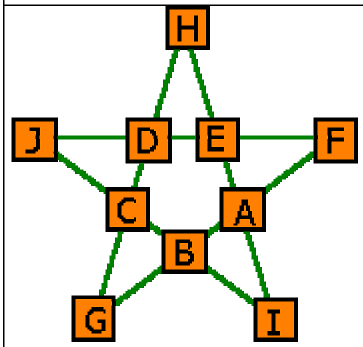
定義 3 相異魔星陣：指對應位置的數字不同的兩個魔星陣。

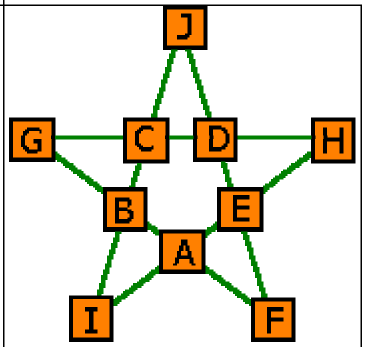
定義 4 相等魔星陣：指每一個對應位置的數字都相同的兩個魔星陣就是相等魔星陣。

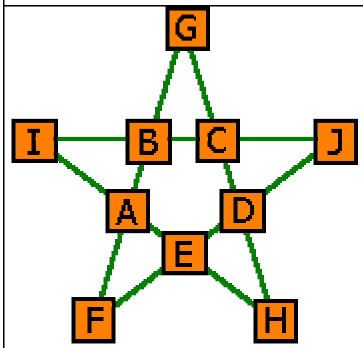
定義 5 全等魔星陣(同義魔星陣)：指可以用旋轉、鏡射(翻轉)的方法使兩個魔星陣變成相等魔星陣時，這兩個魔星陣就叫做全等魔星陣。由於經過旋轉、鏡射後的魔星陣，各數字間的相對位置不變，所以統稱爲鋼性變形。

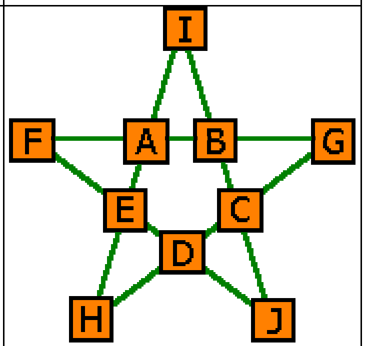
每一個五階魔星陣會有四個經過旋轉後的「分身」及五個經過鏡射後的「分身」，因此要尋找所有全等魔星陣，只要考慮鋼性變形當中的一種魔星陣然後經過旋轉及鏡射後即可。下列爲一個原始的五階魔星陣經過旋轉及鏡射後所得到的所有全等魔星陣的情形：

(1).旋轉

<table>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>原始五階魔星陣</td><td></td></tr>
<tr><td>

1</td><td>

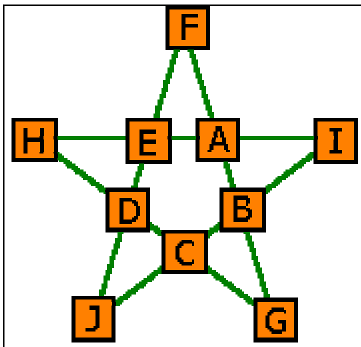
2</td></tr>
<tr><td>順時針旋轉 72^0後的
五階魔星陣</td><td>順時針旋轉 144^0後的
五階魔星陣</td></tr>
<tr><td>

3</td><td>

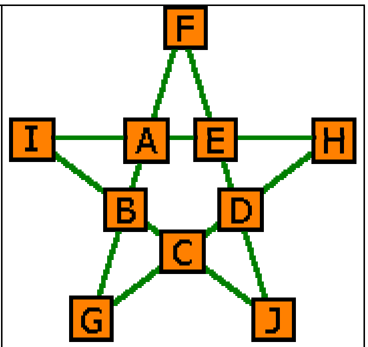
4</td></tr>
<tr><td>順時針旋轉 216^0後的
五階魔星陣</td><td>順時針旋轉 288^0後的
五階魔星陣</td></tr>
</table>

(圖 10)

(2).鏡射 (翻轉)



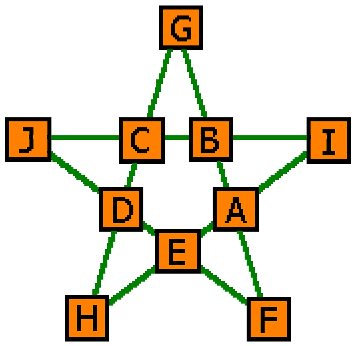
原始五階魔星陣



1

以對稱軸 $\overline{FC}$ 鏡射後的

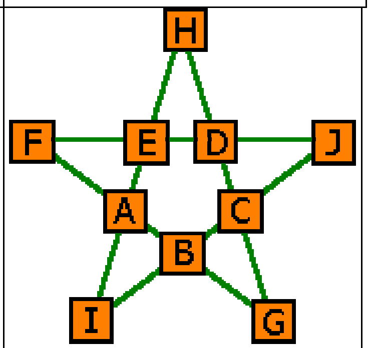
五階魔星陣



2

以對稱軸 $\overline{ID}$ 鏡射後的

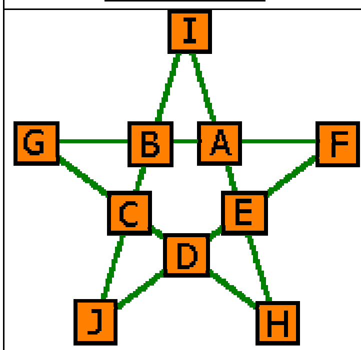
五階魔星陣



3

以對稱軸 $\overline{GE}$ 鏡射後的

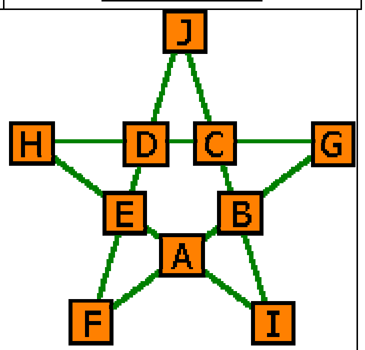
五階魔星陣



4

以對稱軸 $\overline{JA}$ 鏡射後的

五階魔星陣



5

以對稱軸 $\overline{HB}$ 鏡射後的

五階魔星陣

(圖 11)

上列十個全等魔星陣(原始五階魔星陣、四個旋轉五階魔星陣和五個鏡射五階魔星陣)，我們稱為同型的鋼性變形。

(四)、尋找狹義的五階魔星陣的解答

1.尋找狹義的五階魔星陣的魔數 S

上述的【範例】是一個廣義的五階魔星陣，如果我們要建構一個狹義的五階魔星陣，則該如何選擇魔數 S 呢？

首先，我們將十個數字 $\{1,2,...,10\}$ 擺放到(圖 6)當中的 A、B、C、D、E、F、G、H、I、J 十個英文字母上。

因此，我們可以得到

$$T\,(\text{總和})=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

$$=\frac{(1+10)\times 10}{2}=55$$

所以要建構一個狹義的五階魔星陣，根據(乙)則其魔數為

$$S\,(\text{魔數})=\frac{2T}{5}=\frac{2\times 55}{5}=22$$

也就是說，F＋A＋B＋G=G＋C＋D＋H=H＋E＋A＋I=I＋B＋C＋J=J＋D＋E＋F= 22

2.內層數字總和建構法的分析與檢討

由上面我們得到了狹義的五階魔星陣的魔數為 $S=22$，如果我們利用趙文敏教授所提供的方法來建構的話，首先我們必須先確認內層的五個數字總和及其組合的情形。

已知將十個數字 $\{1,2,...,10\}$ 選取其中五個數字填入一個五角星形之內層的五個位置，因為內層與外層對調將產生異型的拓樸變形，所以我們只要考慮 X＜Y，故總共有126種不同組合的情形。

$$C^{10}_{5}\div 2=\frac{10!}{5!\times(10-5)!}\div 2=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}\div 2=126$$

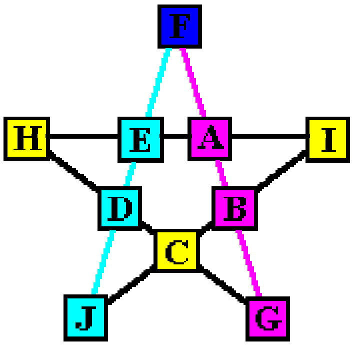
然後將每一種情形中的五個數字分別假設為 A，B，C，D，E，因為經過旋轉及鏡射後將產生同型的鋼性變形，所以每一種情形有12種變化需分別加以討論。

猶如環狀排列(有正反面)：$\frac{5!}{5}\div 2=12$

總結以上的討論，我們發現將十個數字 $\{1,2,...,10\}$ 選取其中五個數字填入一個五角星形之內層的五個位置，**我們必須考慮 126x12＝1512 種不同的情形變化**，我們曾經利用電腦 Microsoft Excel 作過檢驗，發現判斷結果相當繁雜，對於電腦知識相當貧乏的我們真得是一大麻煩，因此我們不得不另尋較好的建構方法。

3.探討狹義的五階魔星陣的建構方法(設一得三建構法)

既然上述建構的方法這麼得麻煩，那麼有什麼較好的建構方法呢？我們找到一個不錯的方法，表示如下：



(圖 12)

如(圖 12)，假設 $F=1$，則 $F+A+B+G=22 \Rightarrow A+B+G=21$；

$F+E+D+J=22 \Rightarrow E+D+J=21$ 。

由上列我們得到，$F+A+B+G+E+D+J=1+21+21=43$

；因此，$C+H+I=55-43=12$ 。

因爲 $F=1$，所以從 2 到 10 當中任取三個數字形成總和爲 12 的總共有三組：$\{2,3,7\}$、$\{2,4,6\}$、$\{3,4,5\}$ 。

(1).考慮$\{C,H,I\}=\{2,3,7\}$

當$\{C,H,I\}=\{2,3,7\}$時，則從$\{4,5,6,8,9,10\}$當中任取三個數字形成總和爲 21 的總共有二組：$\{4,8,9\}$、$\{5,6,10\}$；也就是說，$\{A,B,G\}=\{4,8,9\}$ 、$\{E,D,J\}=\{5,6,10\}$ 或 $\{A,B,G\}=\{5,6,10\}$ 、$\{E,D,J\}=\{4,8,9\}$。我們假設 $x\in\{A,B,G\}$、$y\in\{E,D,J\}$，則 $x+y\in Z_1=\{9,10,13,14,15,18,19\}$ 。

但事實上，因爲$\{C,H,I\}=\{2,3,7\}$ ，所以$\{C+H,H+I,I+C\}=\{5,9,10\}$，故$\{A+E、B+J、G+D\}=\{12,13,17\}\not\subset Z_1$。因此，$\{C,H,I\}=\{2,3,7\}$並不成立。

(2).考慮$\{C,H,I\}=\{2,4,6\}$

當$\{C,H,I\}=\{2,4,6\}$時，則從$\{3,5,7,8,9,10\}$當中任取三個數字形成總和爲 21 的總共有二組：$\{3,8,10\}$、$\{5,7,9\}$；也就是說，$\{A,B,G\}=\{3,8,10\}$ 、$\{E,D,J\}=\{5,7,9\}$ 或 $\{A,B,G\}=\{5,7,9\}$ 、$\{E,D,J\}=\{3,8,10\}$。我們假設 $x\in\{A,B,G\}$、$y\in\{E,D,J\}$，則 $x+y\in Z_2=\{8,10,12,13,15,17,19\}$ 。

但事實上，因爲$\{C,H,I\}=\{2,4,6\}$ ，所以$\{C+H,H+I,I+C\}=\{6,8,10\}$，故$\{A+E、B+J、G+D\}=\{12,14,16\}\not\subset Z_2$。因此，$\{C,H,I\}=\{2,4,6\}$並不成立。

(3).考慮{C,H,I} = {3,4,5}

當{C,H,I} = {3,4,5}時，則從{2,6,7,8,9,10}當中任取三個數字形成總和為21的總共有二組：{2,9,10}、{6,7,8}；也就是說，{A,B,G} = {2,9,10} 、 {E,D,J} = {6,7,8} 或 {A,B,G} = {6,7,8} 、 {E,D,J} = {2,9,10}。我們假設 x∈ {A,B,G}、y∈ {E,D,J}，則 x + y∈ Z_3 = {8,9,10,15,16,17,18} 。

但事實上，因為{C,H,I} = {3,4,5} ，所以{C+H,H+I,I+C} = {7,8,9}，故{A + E、B + J、G + D} = {13,14,15} ⊄ Z_3。因此，{C,H,I} = {3,4,5} 並不成立。

綜合 (1)(2)(3) 的討論，我們可以很清楚知道**狹義的五階魔星陣並不存在**。

(五)、尋找最佳廣義的五階魔星陣的解答

1.最佳廣義的五階魔星陣的分析

由上述的討論可以知道狹義的五階魔星陣並不存在，所以現在我們想改變另一種想法來尋找最佳廣義的五階魔星陣。

因為狹義的五階魔星陣的魔數 $S = 22$ ，且 (丙) 告訴我們：**若 T 為 5 的倍數，則 S 必為偶數**，所以**我們猜測建構最佳廣義的五階魔星陣，則存在最小的 S 值應該等於 24**。因此，我們在尋找最佳廣義的五階魔星陣，只要探討 $S = 24$ 然後再尋找最小的 m 值即可。

2.當 m＝11 時，尋找最佳廣義的五階魔星陣的解答

(1).分析從 1 到 11 當中選取十個數字(必含 11)的情形

若從1到11當中選取十個數字(必含11)，也可以說：從1到10當中省略其中一個數字。假設省略的數字為 x ，因為 S (魔數) = 24 ，根據 (甲) 我們得到 T (總和) = $\dfrac{5\times 24}{2} = 60$ ，所以

$$x = (1+2+\cdots+11) - T = \frac{(1+11)\times 11}{2} - 60 = 66 - 60 = 6 \text{ 。}$$

由以上結果可知，**當 m＝11 時，則符合 S＝24 只有一種情形，也就是從 1 到 11 當中省略{6}這個數字**。

(2).考慮從 1 到 11 當中省略{6}這個數字的情形：

如(圖 12)，假設 F=1 ，則 F + A＋B＋G = 24 ⇒ A＋B＋G = 23 ；
F + E＋D＋J = 24 ⇒ E＋D＋J = 23 。

由上列我們得到，F + A＋B＋G＋E＋D＋J = 1 + 23 + 23 = 47 ；因此，C＋H＋I = 60 − 47 = 13 。

因為 F=1，所以從{2,3,4,5,7,8,9,10,11}當中任取三個數字形成總和為13的總共有二組：{2,3,8} 、{2,4,7} 。

[1].考慮{C,H,I}＝{2,3,8}

當{C,H,I}＝{2,3,8}時，則從{4,5,7,9,10,11}當中任取三個數字形成總和爲23的總共有二組：{4,9,10}、{5,7,11}；也就是說，{A,B,G}＝{4,9,10}、{E,D,J}＝{5,7,11}或{A,B,G}＝{5,7,11}、{E,D,J}＝{4,9,10}。我們假設 $x\in\{A,B,G\}$、$y\in\{E,D,J\}$，則 $x+y\in Z_4=\{9,11,14,15,16,17,20,21\}$。

但事實上，因爲{C,H,I}＝{2,3,8}，所以{C+H,H+I,I+C}＝{5,10,11}，故{A＋E、B＋J、G＋D}＝{13,14,19} $\not\subset Z_4$。因此，{C,H,I}＝{2,3,8}並不成立。

[2].考慮{C,H,I}＝{2,4,7}

當{C,H,I}＝{2,4,7}時，則從{3,5,8,9,10,11}當中任取三個數字形成總和爲23的總共有二組：{3,9,11}、{5,8,10}；也就是說，{A,B,G}＝{3,9,11}、{E,D,J}＝{5,8,10}或{A,B,G}＝{5,8,10}、{E,D,J}＝{3,9,11}。我們假設 $x\in\{A,B,G\}$、$y\in\{E,D,J\}$，則 $x+y\in Z_5=\{8,11,13,14,16,17,19,21\}$。

但事實上，因爲{C,H,I}＝{2,4,7}，所以{C+H,H+I,I+C}＝{6,9,11}，故{A＋E、B＋J、G＋D}＝{13,15,18} $\not\subset Z_5$。因此，{C,H,I}＝{2,4,7}並不成立。

綜合(1)(2)的討論，我們可以很清楚知道**當 m＝11 時省略{6}之廣義的五階魔星陣並不存在**。因此，**當 m＝11 時並不存在最佳廣義的五階魔星陣**。

3.當 m＝12 時，尋找最佳廣義的五階魔星陣的解答

(1).分析從 1 到 12 當中選取十個數字(必含 12)的情形

若從1到12當中選取十個數字(必含12)，也可以說：從1到11當中省略其中二個數字。假設省略的數字爲 $\{x,y\}$，因爲 S (魔數)＝24，根據(甲)我們得到 T (總和) $=\dfrac{5\times 24}{2}=60$，所以

$$x+y=(1+2+\cdots+12)-T=\frac{(1+12)\times 12}{2}-60=78-60=18\ ;$$

因此，$\{x,y\}=\{8,10\}$ 或 $\{7,11\}$。

由以上結果可知，**當 m＝12 時，則符合 S＝24 只有二種情形，也就是從 1 到 11 當中省略{8,10}及{7,11}這兩組情形**。

(2).考慮從 1 到 12 當中省略{8,10}的情形：

如(圖 12)，假設 F = 1，則 $F + A + B + G = 24 \Rightarrow A + B + G = 23$；

$F + E + D + J = 24 \Rightarrow E + D + J = 23$。

由上列我們得到，$F + A + B + G + E + D + J = 1 + 23 + 23 = 47$；因此，$C + H + I = 60 - 47 = 13$。

因爲 F = 1，所以從{2,3,4,5,6,7,9,11,12}當中任取三個數字形成總和爲13的總共有三組：{2,4,7}、{2,5,6}、{3,4,6}。

[1].考慮{C,H,I} = {2,4,7}

當{C,H,I} = {2,4,7}時，則從{3,5,6,9,11,12}當中任取三個數字形成總和爲23的總共有二組：{3,9,11}、{5,6,12}；也就是說，{A,B,G} = {3,9,11}、{E,D,J} = {5,6,12}或{A,B,G} = {5,6,12}、{E,D,J} = {3,9,11}。我們假設 $x \in$ {A,B,G}、$y \in$ {E,D,J}，則 $x + y \in Z_6 = \{8,9,14,15,16,17,21,23\}$。

但事實上，因爲{C,H,I} = {2,4,7}，所以{C+H,H+I,I+C} = {6,9,11}，故{A + E、B + J、G + D} = {13,15,18} $\not\subset Z_6$。因此，{C,H,I} = {2,4,7}並不成立。

[2].考慮{C,H,I} = {2,5,6}

當{C,H,I} = {2,5,6}時，則從{3,4,7,9,11,12}當中任取三個數字形成總和爲23的總共有二組：{3,9,11}、{4,7,12}；也就是說，{A,B,G} = {3,9,11}、{E,D,J} = {4,7,12}或{A,B,G} = {4,7,12}、{E,D,J} = {3,9,11}。我們假設 $x \in$ {A,B,G}、$y \in$ {E,D,J}，則 $x + y \in Z_7 = \{7,10,13,15,16,18,21,23\}$。

但事實上，因爲{C,H,I} = {2,5,6}，所以{C+H,H+I,I+C} = {7,8,11}，故{A + E、B + J、G + D} = {13,16,17} $\not\subset Z_2$。因此，{C,H,I} = {2,5,6}並不成立。

[3].考慮{C,H,I} = {3,4,6}

當{C,H,I} = {3,4,6}時，則從{2,5,7,9,11,12}當中任取三個數字形成總和爲23的總共有二組：{2,9,12}、{5,7,11}；也就是說，{A,B,G} = {2,9,12}、{E,D,J} = {5,7,11}或{A,B,G} = {5,7,11}、{E,D,J} = {2,9,12}。我們假設 $x \in$ {A,B,G}、$y \in$ {E,D,J}，則 $x + y \in Z_8 = \{7,9,13,14,16,17,19,20,23\}$。

但事實上，因爲{C,H,I} = {3,4,6}，所以{C+H,H+I,I+C} = {7,9,10}，故{A + E、B + J、G + D} = {14,15,17} $\not\subset Z_8$。因此，{C,H,I} = {3,4,6}並不成立。

綜合[1][2][3]的討論，我們可以很清楚知道當 m＝12 時省略{8,10}之廣義狹義的五階魔星陣並不存在。

(3).考慮從 1 到 12 當中省略{7,11}的情形：

如(圖 12)，假設 $F=1$，則 $F+A+B+G=24 \Rightarrow A+B+G=23$；
$F+E+D+J=24 \Rightarrow E+D+J=23$。

由上列我們得到，$F+A+B+G+E+D+J=1+23+23=47$；因此，$C+H+I=60-47=13$。

因為 $F=1$，所以從{2,3,4,5,6,8,9,10,12}當中任取三個數字形成總和為13的總共有三組：{2,3,8}、{3,4,6}、{2,5,6}。

[1].考慮{C,H,I}={2,3,8}

當{C,H,I}={2,3,8}時，則從{4,5,6,9,10,12}當中任取三個數字形成總和為23的總共有二組：{4,9,10}、{5,6,12}；也就是說，{A,B,G}={4,9,10}、{E,D,J}={5,6,12}或{A,B,G}={5,6,12}、{E,D,J}={4,9,10}。我們假設 $x \in$ {A,B,G}、$y \in$ {E,D,J}，則 $x+y \in Z_9=$ {9,10,14,15,16,21,22}。

但事實上，因為{C,H,I}={2,3,8}，所以{C+H,H+I,I+C}={5,10,11}，故{A+E、B+J、G+D}={13,14,19} $\not\subset Z_9$。因此，{C,H,I}={2,3,8}並不成立。

[2].考慮{C,H,I}={3,4,6}

當{C,H,I}={3,4,6}時，則從{2,5,8,9,10,12}當中任取三個數字形成總和為23的總共有二組：{2,9,12}、{5,8,10}；也就是說，{A,B,G}={2,9,12}、{E,D,J}={5,8,10}或{A,B,G}={5,8,10}、{E,D,J}={2,9,12}。我們假設 $x \in$ {A,B,G}、$y \in$ {E,D,J}，則 $x+y \in Z_{10}=$ {7,10,12,14,17,19,20,22}。

但事實上，因為{C,H,I}={3,4,6}，所以{C+H,H+I,I+C}={7,9,10}，故{A+E、B+J、G+D}={14,15,17} $\not\subset Z_{10}$。因此，{C,H,I}={3,4,6}並不成立。

[3].考慮{C,H,I}={2,5,6}

當{C,H,I}={2,5,6}時，則從{3,4,8,9,10,12}當中任取三個數字形成總和為23的總共有二組：{3,8,12}、{4,9,10}；也就是說，{A,B,G}={3,8,12}、{E,D,J}={4,9,10}或{A,B,G}={4,9,10}、{E,D,J}={3,8,12}。我們假設 $x \in$ {A,B,G}、$y \in$ {E,D,J}，則 $x+y \in Z_{11}=$ {7,12,13,16,17,18,21,22}。

事實上，因為{C,H,I}={2,5,6}，所以{C+H,H+I,I+C}={7,8,11}，故{A+E、B+J、G+D}={13,16,17} $\subset Z_{11}$，故{C,H,I}={2,5,6}成立。

我們將{2,5,6}分別填入{C,H,I}，而{3,8,12}或{4,9,10}填入{A,B,G}或{E,D,J}，結果發現僅有六組符合的解答，我們表示如下：

編號	F	C	H	I	A	B	G	E	D	J
1	1	6	5	2	8	12	3	9	10	4
2	1	6	5	2	9	4	10	8	3	12
3	1	5	6	2	4	9	10	12	3	8
4	1	5	6	2	12	8	3	4	10	9
5	1	2	6	5	3	8	12	10	4	9
6	1	2	6	5	10	9	4	3	12	8

我們將上列表格依照內、外層重新作整理，表示如下：

編號	內層						外層					
	X	A	B	C	D	E	Y	F	G	H	I	J
1	45	8	12	6	10	9	15	1	3	5	2	4
2	30	9	4	6	3	8	30	1	10	5	2	12
3	33	4	9	5	3	12	27	1	10	6	2	8
4	39	12	8	5	10	4	21	1	3	6	2	9
5	27	3	8	2	4	10	33	1	12	6	5	9
6	36	10	9	2	12	3	24	1	4	6	5	8

又因為內層數字與外層數字可以互換，所以經由異型的拓樸變形，最後我們可以再得到另六組解，表示如下：

編號	內層						外層					
	Y	A	B	C	D	E	X	F	G	H	I	J
7	15	1	3	5	2	4	45	12	8	9	10	6
8	30	1	10	5	2	12	30	4	9	8	3	6
9	27	1	10	6	2	8	33	9	4	12	3	5
10	21	1	3	6	2	9	39	8	12	4	10	5
11	33	1	12	6	5	9	27	8	3	10	4	2
12	24	1	4	6	5	8	36	9	10	3	12	2

因此，**當 m＝12 時省略{7,11}，我們總共找到 12 組最佳廣義的五階魔星陣的解答**。

陸、研究結果

一、<u>狹義的五階魔星陣</u>：(S＝22)

把1到10的十個數字填入<u>五角星形</u>的十個點中，並不構成<u>狹義的五階魔星陣</u>。

二、<u>廣義的五階魔星陣</u>：(S＝24)

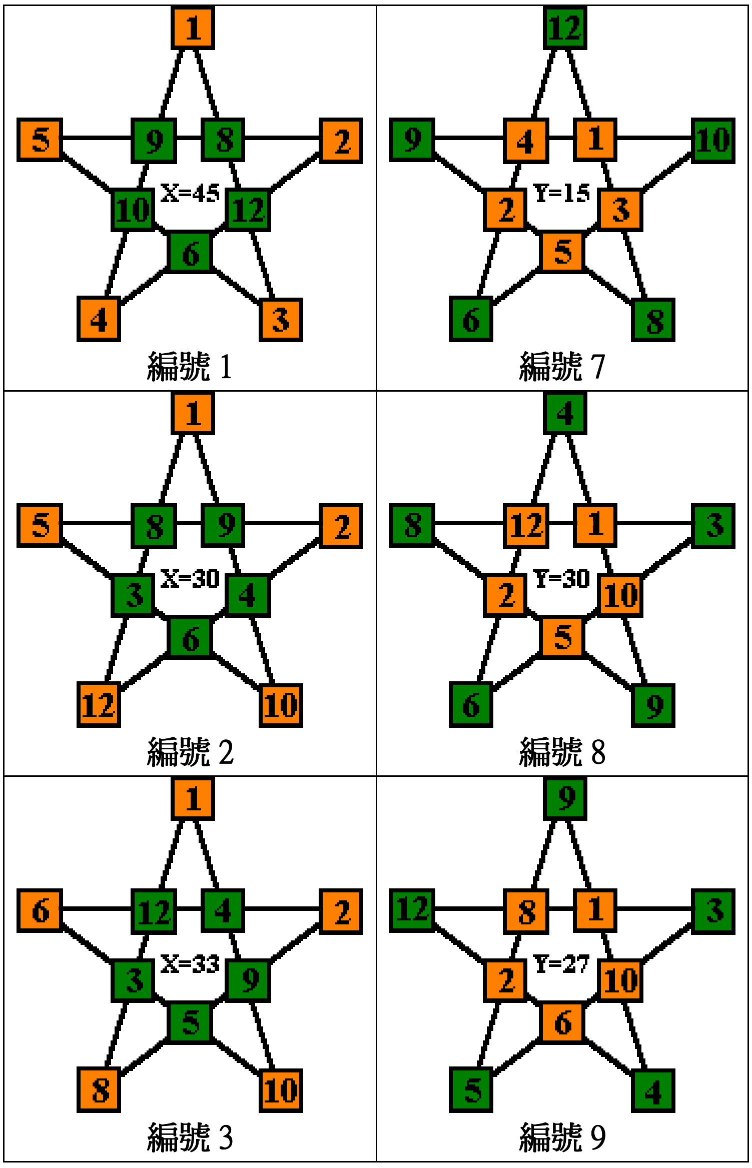
(一)、當 m＝11時，則符合 $S=24$ 只有一種情形：省略{6}

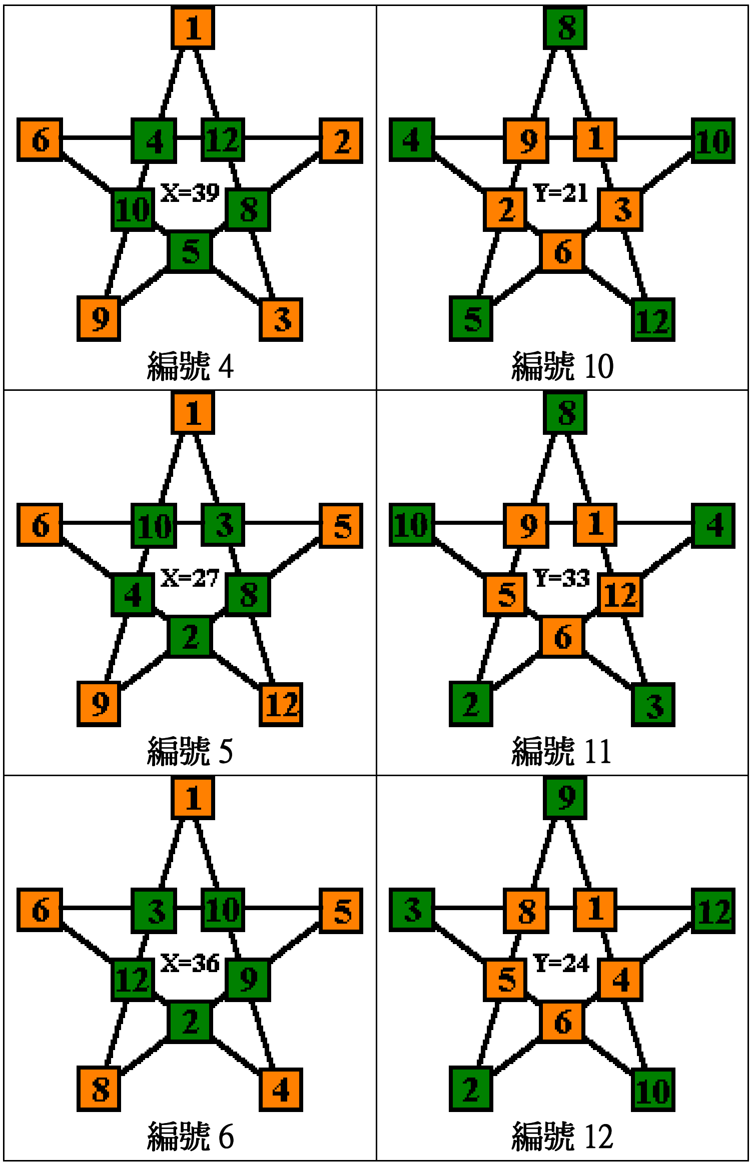
從1到11當中省略{6}選取十個數字填入五角星形的十個點中，並不構成<u>廣義的五階魔星陣</u>。

(二)、當 m＝12時，則符合 $S=24$ 只有二種情形：省略{8,10}或{7,11}

1.從1到12當中省略{8,10}選取十個數字填入五角星形的十個點中，並不構成<u>廣義的五階魔星陣</u>。

2.從1到12當中省略{7,11}選取十個數字填入五角星形的十個點中，所構成<u>最佳廣義的五階魔星陣</u>之解答共有12組，如(圖 13)所示。





(圖 13)

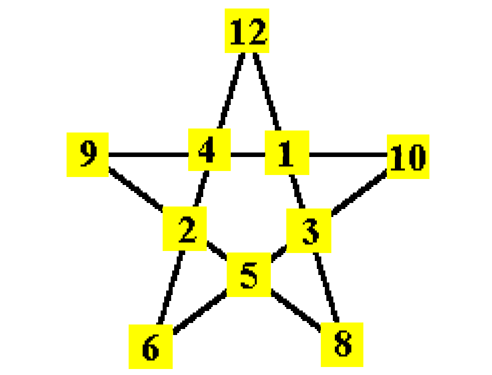
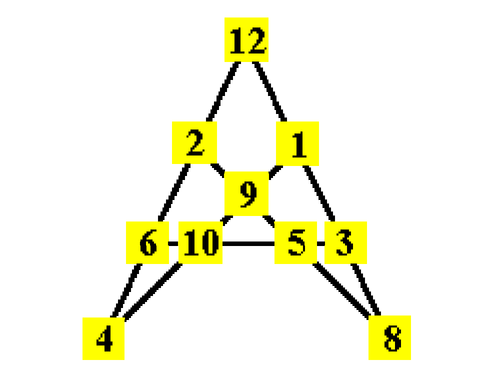
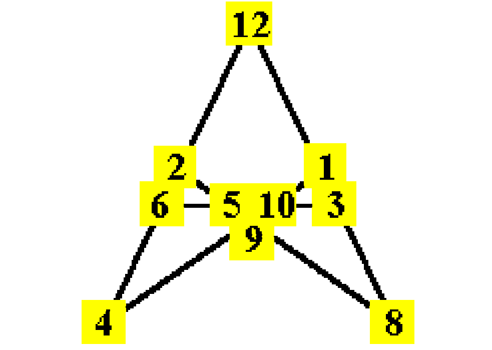
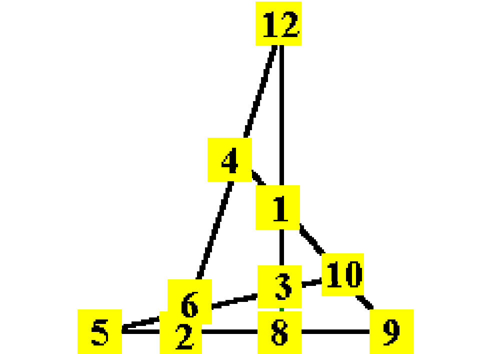
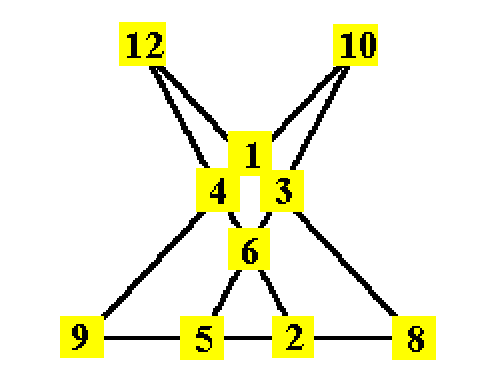
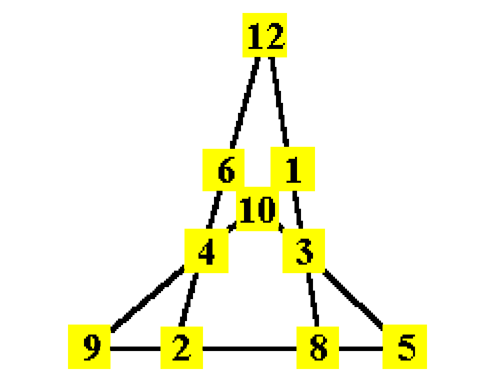
柒、討論

一、問題引申

(一)、植樹問題

消遣數學問題(Recreational Mathematics Problems)曾提出將五角星形(Pentagrams)當成植樹問題(Tree Planting Problems)，也就是說將十棵樹種植在五條街道上，而每一條街道的樹木一樣多，則總共有六種不同的種植形式。

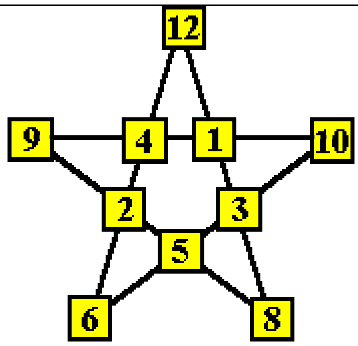
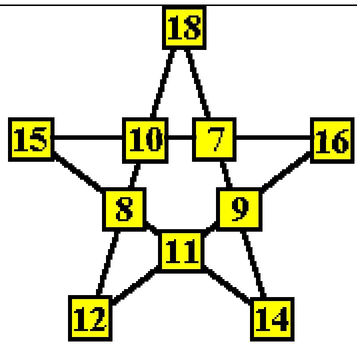
如果我們將五階魔星陣與植樹問題做結合，則產生的變化更是多采多姿，讓我們來欣賞最佳廣義的五階魔星陣中編號 7 的變化吧！

	
最佳廣義的五階魔星陣(X＝15)	變化 1
	
變化 2	變化 3
	
變化 4	變化 5

(圖 14)

(二)、異型的五階魔星陣之加值變形

將一個魔數為 S 之五階魔星陣中的每一個數字均加上某一個整數值(我們稱為加值，假設為 d)，則會產生另一個魔數為 $S+4d$ 之不同的五階魔星陣，我們稱為異型的加值變形。下圖是最佳廣義的五階魔星陣中編號 7 的異型的加值變形。

	
最佳廣義的五階魔星陣 (m＝12 省略{7,11}，S＝24)	最佳廣義的五階魔星陣的加值變形 (加值為 d＝6，S＝48)

(圖 15)

★★★參加地方科學展覽會時，評審教授在口試時曾經提出以下問題：

問題：除了本文探討的最佳廣義的五階魔星陣以外，倘若我們另行定義一種廣義的五階魔星陣如下：**如果我們將 k 到 k+9 的十個連續正整數填入一個五角星形的十個點上，其中 k＞1，使得每一條邊上的四個數字總和(魔數 S)固定，請問是否存在符合這樣規則的最小 k 值呢？**

解答：不存在。

假設存在最小 k 值，其中 k＞1，滿足將 k 到 k+9 的十個連續正整數填入一個五角星形的十個點上，使得每一條邊上的四個數字總和(魔數 *S*)固定。

利用上述異型的五階魔星陣之加值變形法，如果我們將 k 到 k+9 這十個連續的正整數同時加上一個值 d(加值)＝－k＋1，則新的十個連續正整數{1,2,...,10}必須構成一個五階魔星陣。

但事實上，{1,2,...,10}並不能構成一個五階魔星陣(狹義的五階魔星陣並不存在)，故不存在符合這樣規則的最小 k 值。

二、檢討展望

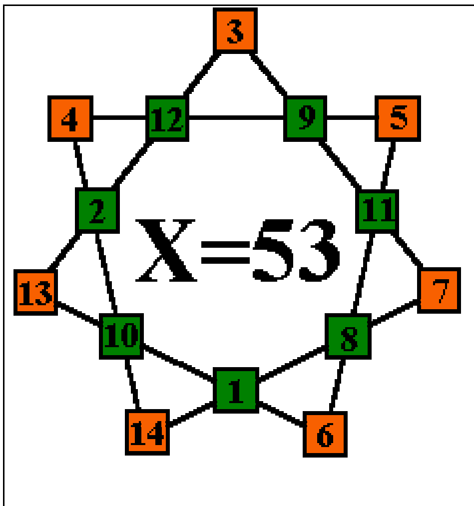
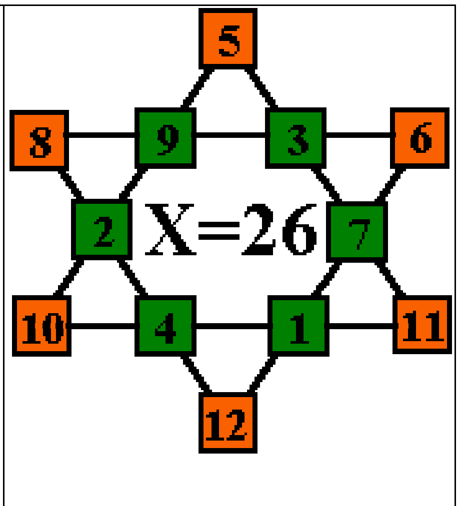
(一)、建構 n 階魔星陣

定義 6：將一個正 n 邊形(n＞4)的每一個邊延長，就可以圍成一個 n 角星形。如果在 n 角星形的 2n 個點(n 個尖頂及原正 n 邊形的 n 個頂點)上，把它填入 1 到 2n 的數字，使得每一條邊上的四個數字總和等於一個定數(我們稱為魔和數 Magic Sum，簡稱魔數，假設為 S，則 S＝4n＋2)，則符合這樣規則的圖形，我們把它稱作狹義的幻 n 角星形或狹義的 n 階魔星陣(Pure Order-n Magic Stars)；相反地，廣義的幻 n 角星形或廣義的 n 階魔星陣(Impure Order-n Magic Stars)只要數字不重複即可。

趙文敏教授所使用的內層數字總和建構法，可以應用到所有奇數階魔星陣(Order-odd Magic Stars)，如(圖 16)所示；至於偶數階魔星陣(Order-even Magic Stars)建構的情形有兩點說明：

1.魔數 S 不必是偶數，但內層 n 個數字總和(X)必須與 $\frac{nS}{2}$ 同為奇數或偶數。

2.填寫外層 n 個數字必須仿照奇數階魔星陣的情形做兩次才能求出，如(圖 17)所示。

	
狹義的七階魔星陣(S＝30)	狹義的六階魔星陣(S＝26)
(圖 16)	(圖 17)

(二)、期待狹義的六階魔星陣的探討

本文探討之狹義的五階魔星陣並不存在，由(圖 17)可知構成最小之狹義的 n 階魔星陣(Pure Order-*n* Magic Stars)為狹義的六階魔星陣(Pure Order-6 Magic Stars)，除了趙文敏教授所介紹的內層數字總和建構法以外，是否有其他較好的建構方法呢？而狹義的六階魔星陣又有多少組解答呢？我們期待進一步探討哩！

(三)、展望其他特殊魔星陣的探索

【尤怪之家】告訴我們一般的魔方陣要求每行、每列及對角線上的數字之總和為定數，所以又稱為【和幻方】或【和魔方陣】。網站並介紹質數魔方陣(Magic Square of Primes)、平方和魔方陣(Magic Square of Squares 或 Bimagic Magic Square)、積魔方陣(Multiplication Magic Squares)、雙重魔方陣(Double Magic Squares)，那是否存在這些性質的魔星陣呢？

捌、結論

此次科展我們僅探討五階魔星陣這個小星星家庭，對於學識淺薄的我們早已眼花撩亂、頭冒「星星」了，似乎無法洞悉整個大星星家族，「星星的秘密」期望更多「追星族」一起努力，讓我們也能如夜幕低垂仰望滿天星辰，訴說如希臘神話般一樣的感人肺腑。

玖、參考資料

一、參考書籍

1.**魔方陣**。載於**國民中學數學課本第一冊第三章學習廣角**(113~114 頁)。康軒文教事業 92 年修訂版。

2.**等量公理**。載於**國民中學數學課本第二冊 4-2**。康軒文教事業 93 年修訂版。

3.**集合的基本概念**。載於**高級中學數學課本第一冊 1-1**。南一書局 93 修訂版。

4.**排列組合**。載於**高級中學數學課本第四冊第二章**。南一書局 93 修訂版。

5.趙文敏(民 84)。**30.魔術星形**。載於**寓數學於遊戲第二輯**(82~84 頁)。臺北市：九章出版。

二、參考網路

1.巫光楨(民 88)。**尤怪魔宮**。**【尤怪之家】**。民 94 年 6 月,取自：http://www.shes.hcc.edu.tw/~oddest/

2.Harvey D. Heinz(1998). **Magic Stars.**【**Magic Squares, Magic Stars & Other Patterns**】. Retrieved June,2005, from：http://www.geocities.com/~harveyh/magicstar.htm

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

國中組　數學科

030401
星星的秘密

縣立麥寮中學(附設國中)

評語：
考慮五角星形魔方陣,對某些特定數字提出了建構的方式,討論的手法雖然不失為是一有系統的作法，但略嫌繁瑣。能對數字的奇偶性作一些分析，並參考之前已有的建構方式，將可減少討論的過程，另一方面，對於解的存在性並未多做討論,若能在這上面做深入的探究將會更好。