中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030423
圓舞曲

臺北縣立積穗國民中學

作者姓名：
國二 謝沂儒 國二 劉宜庭 國二 李佳蓉

指導老師：
盧祖國 陳柏瑋

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國民中學組

作品名稱：圓舞曲

關 鍵 詞：以簡馭繁、因數與倍數、相似形與三角函數

編　　號：

目錄

圓舞曲

摘要：

國一下學期時，數學老師找了許多的題目（建中通訊解題、環球城市盃等）讓我們考驗自己，其中有一題「針與線」的問題引起我們濃厚的興趣，它是關於「圓上等分點依不同間隔連線」的問題，題目中要求我們解出其所用針數、間隔數與線數的關係及圖形中產生的交點總數一般式。在解題時，我們發現整個過程中只需使用一些我們學過的觀念，加上畫出的圖形十分具藝術感，所以我們便決定利用專題課的時間，在國中教材的範圍內，延伸找出圖形中各線段的比例關係及圖形中產生的區塊數一般式，其中各線段比例關係，我們採用三角函數比出各線段比例、相似形求圖形最短對角線值，其他則使用表格找出規律解出，此方法正是我們所說的「以簡馭繁」，也是本份研究重要的研究方法之ㄧ，另外我們也設計出此研究在生活中的應用，並實際做出實物供參考、教學之用。

壹、研究動機

國一下學期時，數學老師找了許多的題目（建中通訊解題、環球城市盃等）讓我們考驗自己，其中有一題「針與線」的問題，它是把圓放上等分的針數，以不同的間隔數順時鐘纏繞，並要我們找出其所需用到線數與交點數的一般式。因為解題時發現題目只需用到推算規律和因數與倍數的觀念，加上解題時畫出的圖形令我們著迷，所以我們利用每個禮拜幾堂課的時間，著手研究起這些由圓與線共同譜出的圖形。

貳、研究目的

一、試找出圖形中所用針數、間隔數與線數的關係

二、試找出圖型中交點數的一般式

三、試找出圖形中各線段的比例關係

四、試找出圖形中區塊數的一般式

五、試找出生活中能應用此研究結果的實例

參、研究設備及器材

紙、筆、黑板、粉筆、圓規、直尺、量角器、計算機、電腦（GSP 輔助畫圖等）、頭腦

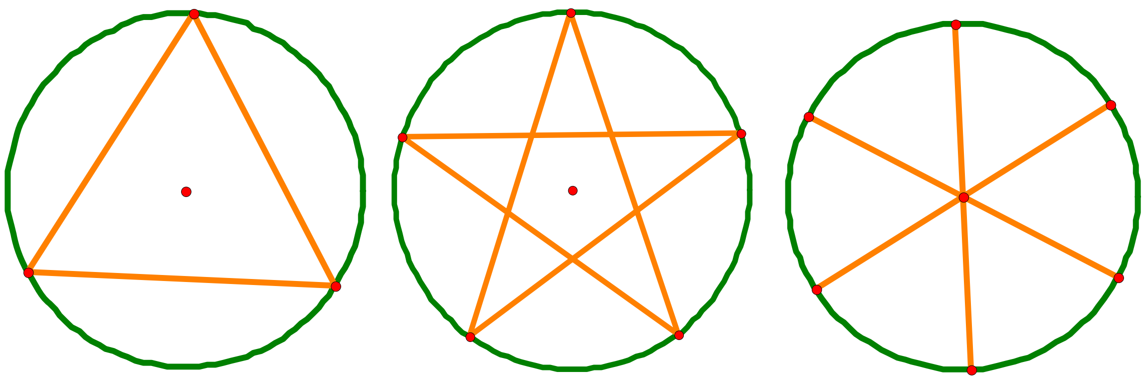
肆、研究過程

我們的研究大致上分為兩個部份，分別是原題目解答的探討（p2-p8）和利用原題目繪出的圖形所做的延伸（p9-p22），其中原題目所求的是圖形中針數、間隔數和用線數的關係（p2-p5）及圖形所形成交點數的一般式（p5-p8），而我們利用所繪的圖形深入探討圖形中各線段比例的關係（p9-p17）及試找出其分割出的區塊數一般式（p17-p22），最後是我們的研究在生活中應用所設計出來的「閃燈裝飾」（p23），我們在此分為三大點及各兩小點呈現我們大致上的研究過程。

一、以原題目為根據找出所用針數、間隔數與線數的關係及交點數的一般式

原題目：針與線

把一些針釘在圓的四周，兩個相鄰針之間的距離稱為一個間隔。現在拿一條線按著順時鐘方向，隔相同數目的間隔，綁在針上，直到綁第一根針為止，(如圖)。



3 根針，間隔 1　　5 根針，間隔 2　　6 根針，間隔 3

當繞迴第一根針時，若尚有未綁線的針，則拿第二條線依循著同樣的規則，繼續做下去。

用線綁 5 根針，每次隔 2 個間隔時，只需要一條線；以線綁 6 根針，每次隔 3 個間隔時，需要用到 3 條線。現在，請問你：所需用到的線數與線交點個數的一般式是什麼？

（一）針數、間隔數和線數的關係

因為要找出針數、間隔數和線數的關係，所以我們先手畫出圖（計算機算出角度後，用量角器點出針的位置，再使用直尺連線及記錄），採用土法煉鋼的方法，得到數據後再做出表格觀察（如下表），並試圖推出規律。

間隔／線數／針數	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1
4		1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1
5			1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1
6				1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1
7					1	1	1	1	1	1	7	1	1	1
8						1	2	1	4	1	2	1	8	1
9							1	1	3	1	1	3	1	1
10								1	2	1	2	5	2	1
11									1	1	1	1	1	1
12										1	2	3	4	1
13											1	1	1	1
14												1	2	1
15													1	1
16														1

我們發現了 7 個規律：

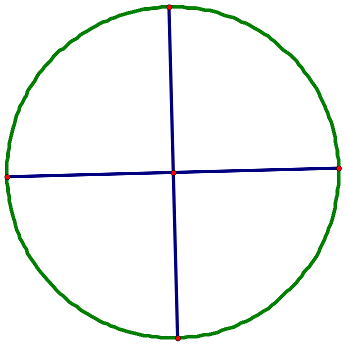
1. 當針數為偶數時，若其間隔數為針數的因數，則線數等於間隔數
2. n 根針，因為順時針和逆時針纏繞的關係，間隔數 x 和 n-x（$x < \frac{n}{2}$，$x \in N$）所用線數相同
3. 針數為偶數，扣除規則 1 後所剩的數，間隔為奇數，用針數為 1；間隔數為偶數，用針數為 2
4. 針數為奇數時，除了有因數 3 的奇數外，都只需要一條線。(驗證後有誤)
5. 針數為 3 的倍數的奇數時，間隔數同為 3 的倍數時，線數為 3。(驗證後有誤)
6. 針數為質數時，不管間隔數是多少，所用線數為 1
7. 針數如為 2^m（m 為正整數），則間隔數 $2^k (k \le \frac{m}{2}, k \in N)$由小到大對所用線數的排序為 2^0、2^1、2^2、……2^{k-1}、2^k

雖然規律都出來了，但套進針數 2~17 的數據中，發現規律 3、5 套進針數 12、15、16 時並不成立，感覺上白忙一場，但是我們發現針數、間隔數與線數的關係和因

數與倍數有極大的關聯，於是想到針數、間隔數與線數公因數，試驗成功後確定找出針數、間隔數與線數的關係：***線數等於間隔數和針數的最大公因數***。

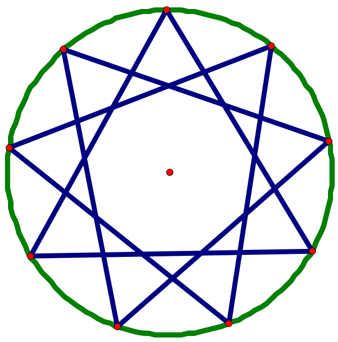
找到了三者的關係，仍然需要找到證明才能算真正的完成，所以我們決定由圖形本身的規律來找證明（算是觀察法），以下運用幾個不同針數的解釋：

針數是 2^2，間隔 1 和 3 所形成之線數沒什麼變化，因此，間隔用 2， 沒圖形產生



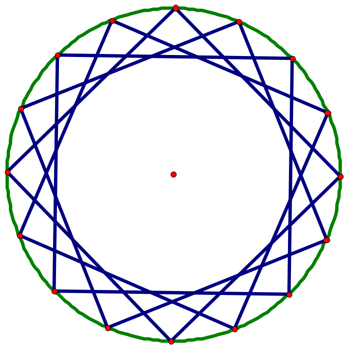
$$\begin{array}{r|l} 2 & 4\ ,\ 2 \\ \hline & 2\ ,\ 1 \end{array}$$

針數 3^2，所以我們將間隔數定爲 3，圖形是三邊形



$$\begin{array}{r|l} 3 & 9\ ,\ 3 \\ \hline & 3\ ,\ 1 \end{array}$$

同樣地，我們又將針數 4^2 間隔數定爲 4，圖形是四邊形



$$\begin{array}{r|l} 4 & 16\ ,\ 4 \\ \hline & 4\ ,\ 1 \end{array}$$

緊接著，就發現它的特質：

因數分解的列式裡 →

$$\begin{array}{r|l} e & a\ ,\ b \\ \hline & c\ ,\ d \end{array}$$

a→針數、b→間隔數、c→所畫出的圖形邊數、(例如：c=3，圖形是三邊形)、d→間隔 d 就有不同的線、e→線數。

爲了減少錯誤，所以又多列了以下幾個數據檢查：

a=12，b=4→

$$\begin{array}{r|l} 4 & 12\ ,\ 4 \\ \hline & 3\ ,\ 1 \end{array}$$

a=15，b=5→

$$\begin{array}{r|l} 5 & 15\ ,\ 5 \\ \hline & 3\ ,\ 1 \end{array}$$

a=18，b=6 →

$$\begin{array}{r|l} 6 & 18\ ,\ 6 \\ \hline & 3\ ,\ 1 \end{array}$$

因此，可得此結論：

$$\begin{array}{r|l} \text{線數} & \text{針數}\quad ,\quad \text{間隔} \\ \hline & \text{圖形邊數}\quad ,\quad \text{有下一 條線數的間隔數} \end{array}$$

會產生這樣的結果，原因如下：

＜證明＞

設針數爲 a，間格爲 b

1.

∵從起始點開始，最後必繞回原來的點

∴總間隔數必爲 a 的倍數，且以 b 間隔跳動爲 b 的倍數，故總間隔數爲〔a , b〕

2.

∵一條線所碰到的針數爲 $\frac{〔a,b〕}{b}$

∴線數爲 $a \div \frac{〔a,b〕}{b} = a \times \frac{b}{〔a,b〕} = \frac{ab}{〔a,b〕} = (a,b)$

證明完成後，我們認爲針數、間隔數與線數的關係已告一個段落了，所以繼續研究另一個交點數的一般式，而我們解題時畫出的所有圖形，請參閱 p26~p30

（二）交點數的一般式

因爲解針數、間隔數和線數的關係時已畫出圖形，也對畫圖有一定的熟練度，所以直接取數據到針數爲 13 的，同樣做表格利於觀察：

針數 n	間隔 n	交點	圖形	針數 n	間隔 n	交點	圖形
3	1	0	正三角形	10	5	1	無
	2	0	正三角形		5	1	無
4	1	0	正四邊形		6	30	十角星形
	2	1	無		7	20	十角星形
	3	0	正四邊形		8	10	十角星形
5	1	0	正五邊形		9	0	正十邊形
	2	5	五角星形	11	1	0	正 11 邊形
	3	5	五角星形		2	11	11 角星形
	4	0	正五邊形		3	22	11 角星形
6	1	0	正六邊形		4	33	11 角星形
	2	6	六角星形		5	44	11 角星形
	3	1	無		6	44	11 角星形
	4	6	六角星形		7	33	11 角星形
	5	0	正六邊形		8	22	11 角星形
7	1	0	正七邊形		9	11	11 角星形
	2	7	七角星形		10	0	正 11 邊形
	3	14	七角星形	12	1	0	正 12 邊形
	4	14	七角星形		2	12	12 角星形
	5	7	七角星形		3	24	12 角星形
	6	0	正七邊形		4	36	12 角星形
8	1	0	正八邊形		5	48	12 角星形
	2	8	八角星形		6	1	無
	3	16	八角星形		7	48	12 角星形
	4	1	無		8	36	12 角星形
	5	16	八角星形		9	24	12 角星形
	6	8	八角星形		10	12	12 角星形
	7	0	正八邊形		11	0	正 12 邊形
9	1	0	正九邊形	13	1	0	正 13 邊形
	2	9	九角星形		2	13	13 角星形
	3	18	九角星形		3	26	13 角星形
	4	27	九角星形		4	39	13 角星形
	5	27	九角星形		5	52	13 角星形
	6	18	九角星形		6	65	13 角星形
	7	9	九角星形		7	65	13 角星形
	8	0	正九邊形		8	52	13 角星形
10	1	0	正十邊形		9	39	13 角星形
	2	10	十角星形		10	26	13 角星形
	3	20	十角星形		11	13	13 角星形
	4	30	十角星形		12	0	正 13 邊形

我們發現了 3 個規律

1. 用針數 n 就是間隔 m 與 m＋1 交點的差（$m \neq [\frac{n}{2}]$或$[\frac{n}{2}] - 1$）

2. n 根針，因爲順時針和逆時針纏繞的關係， 間隔數 x 和 n-x（$x < \frac{n}{2}$，$x \in N$）所用

線數相同，故交點數亦相等

3. 針數爲偶數時，間隔 $\frac{n}{2}$ 的交點數爲 1

除此之外，還發現另一個公式，即

（間隔數－1）× 針數＝交點數

其間隔數爲順時針的間隔數，也就是規律 2（n 根針，因爲順時針和逆時針纏繞的關係，間隔數 x 和 n－x 所用線數相同，x 爲 $\frac{n}{2}$ 內任意間隔數）中的 x，所以像針數 9 的間隔數 7 套入此一般式時，要以 2 套入（7＝9－2），而再算總交點數時，要將間隔 1 到間隔（n－1）套入一般式的結果相加，但要注意偶數針數 n 的間隔數爲 $\frac{n}{2}$ 時只會產生 1 個交點，這便是我們對數據上「交點數的一般式」提出的解答，也可表爲

＜奇數根針＞

(其中 n 爲針數)

$$n(1+2+\dots\dots+\frac{n-3}{2})$$

$$=[\frac{(1+\frac{n-1}{2})\times\frac{n-1}{2}}{2}\times 2-n+1]\times n$$

$$=[\frac{n-1}{2}+(\frac{n-1}{2})^2-n+1]\times n$$

$$=[(\frac{n-1}{2})^2+\frac{1-n}{2}]\times n$$

$$=(\frac{n^2-2n+1+2-2n}{4})\times n$$

$$=\boxed{\frac{n^3-4n^2+3n}{4}}$$

＜偶數根針＞

$$n+1[1+2+\dots\dots+\frac{n-4}{2}]$$

$$=[\frac{(1+\frac{n}{2}-1)\times(\frac{n}{2}-1)}{2}\times 2-(n-2)]\times n+1$$

$$=[\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}-n+2]\times n+1$$

$$=[\frac{n^2}{4}-\frac{3n}{2}+2]\times n+1$$

$$=\boxed{\frac{n^3}{4}-\frac{3n^2}{2}+2n+1}$$

原以爲公式已經沒有問題了，但後來找區塊數的公式時受挫，且因爲覺得交點的一般式和區塊必定有關係，所以在五月中旬時發現兩個交點數一般式是「數據上」的結果，而不是「實際上」的結果。舉例來說，七根針的圖形總交點數帶入公式爲 21 個，但這僅是間隔爲 1、2、3 的連線各產生的交點數，而忽略了實際上間隔 2、3 的連線另外產生的交點，因爲這種情況在間隔 2 以前的連線都不會發生，所以與數據符合的只有在六根針的圖形之前的圖形，其他都需再找出另一個關於不同間隔的連線產生交點數的式子彌補此缺憾。於是我們根據間隔間連線所產生的交點數作下表觀察：（間隔數指的是「以此間隔數連出的線」）

針數	間隔數	重複的交點數	針數	間隔數	重複的交點數
三	1	0			40〈間隔三,間隔四〉
四	1	0		5	10〈間隔二,間隔五〉
	2	0			0 〈間隔三..五共點十〉
五	1	0			10〈間隔四.五共點十〉
	2	0	十一	1	0
六	1	0		2	0
	2	0		3	22〈間隔二,間隔三〉
	3	6〈間隔二,間隔三〉		4	22〈間隔二,間隔四〉
七	1	0			44〈間隔三,間隔四〉
	2	0		5	22〈間隔二,間隔五〉
	3	14〈間隔二,間隔三〉			44〈間隔三,間隔五〉
八	1	0			66〈間隔四,間隔五〉
	2	0	十二	1	0
	3	16〈間隔二,間隔三〉		2	0
	4	8 〈間隔二,間隔四〉		3	24〈間隔二,間隔三〉
九	1	0		4	24〈間隔二,間隔四〉
	2	0			24〈間隔三.四共十二點〉
	3	18〈間隔二,間隔三〉		5	24〈間隔二,間隔五〉
	4	18〈間隔二,間隔四〉			48〈間隔三,間隔五〉
		36〈間隔三,間隔四〉			減的 24〈間隔四.五共十二點〉
十	1	0		6	12〈間隔二,間隔六〉
	2	0			0 〈間隔三.六共十二點〉
	3	20〈間隔二,間隔三〉			12〈間隔四.六共十二點〉
	4	20〈間隔二,間隔四〉			0 〈間隔五.六共二四點〉

我們發現了 1 個規律

1.當針數爲奇數時，不同的間隔數（固定）對上其他間隔數（由小排列到大）時產生重複的交點數是公差 1 的等差數列乘上針數

規律推出後，因爲數據只取到 12 根針，也就是真正套用的只有五組數據，但是經過圖形的驗證後（我們畫到 20 根針的圖），確定規律無誤，因此可推導出奇數根針（n）的重複交點數公式爲

$$n\Bigg[\underbrace{\left(\frac{n-1}{2}-2\right)2+\left(\frac{n-1}{2}-3\right)4+\left(\frac{n-1}{2}-4\right)6+\left(\frac{n-1}{2}-5\right)8+\cdots}_{\frac{n-1}{2}\text{組}\left(\frac{n-1}{2}-a\right)a\ ,\ a\in N}\Bigg]$$

由這兩個公式可推出奇數根針的圖形實際上的交點數一般式

$$\frac{n^3-4n^2+3n}{4}-n\Bigg[\underbrace{\left(\frac{n-1}{2}-2\right)2+\left(\frac{n-1}{2}-3\right)4+\left(\frac{n-1}{2}-4\right)6+\left(\frac{n-1}{2}-5\right)8+\cdots}_{\frac{n-1}{2}\text{組}\left(\frac{n-1}{2}-a\right)a\ ,\ a\in N}\Bigg]$$

二、以圖形爲根據找出各線段比例關係及區塊數一般式

爲了找出針數、間隔數和線數的關係和交點數的一般式，辛苦畫出了好多圖形，因此想要自己研究這些圖形不爲人知的秘密，加上是等分圓周取針的位置，有許多線段長度是相同的，且能推出圖形的角度，看著圖，也想了解這些線會分出多少塊圖形，所以著手研究起各線段比例關係及區塊數一般式

（一）各線段比例關係

由於針所擺放的位置位於等分的圓周上，連出來的圖形均爲正 n 邊形及 n 角星形組成，且一個圓爲 360°，所以我們能確切的知道各圓周角的度數，因此我們試著找出圖形中各線段的比例關係。在此，我們分成兩種不同的方法來做線段，一種是利用「三角函數」做出圖形中各線段的比例關係，另一種則是純粹用國中的「相似形」算出圓內圖形的最短對角線之值。下列爲兩種方法的說明：

1.三角函數求線段比例

（1）算出所有角的角度，利用「三角函數」求出線段比

（2）因爲三角函數值爲萬分位的近似值，利用連比所得近似值可至億分位，而爲了方便計算，我們採四捨五入法取數值至個位。在每個連比出來的結果，用四捨五入法使連比各項中最多位數的數化爲二位數（如範例一），若最多位數的那個數爲十的正整數次方，再經四捨五入法取爲三位數，而其餘的數就經四捨五入法取爲二位數（範例二）。

範例一：

$$\begin{array}{ccccc} 100 & : & 47 & & \\ & & 53 & : & 100 \\ \hline 53\cancel{00} & : & 24\cancel{91} & : & 47\cancel{00} \\ & & \downarrow & & \\ 53 & : & 25 & : & 47 \end{array}$$

由四位數
經四捨五入
變由兩位數

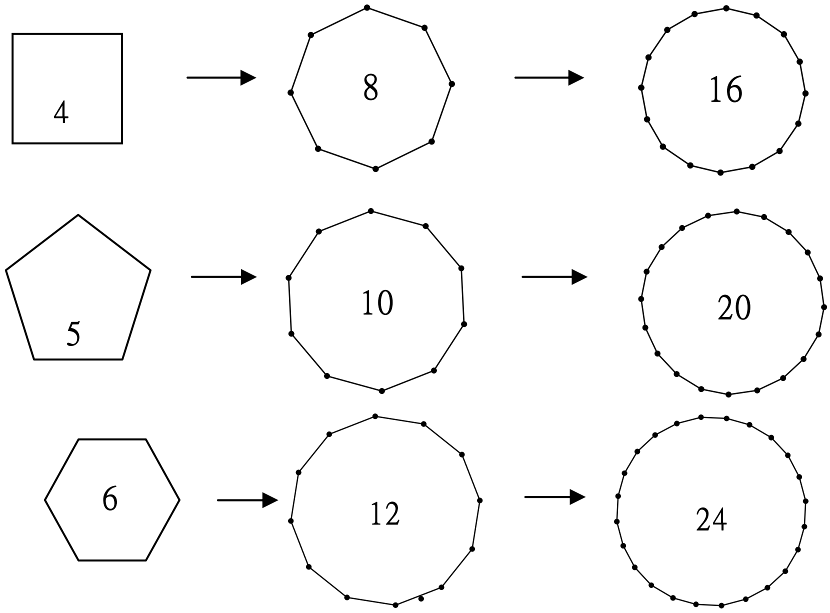
範例二：

$$\begin{array}{ccccc} 100 & : & 47 & & \\ & & 100 & : & 53 \\ \hline 100\cancel{00} & : & 47\cancel{00} & : & 24\cancel{91} \\ & & \downarrow & & \\ 100 & : & 47 & : & 25 \end{array}$$

因有十的正整數次方
所以爲了使其成爲三
位數，四捨五入至百位

2.相似形求最短對角線值

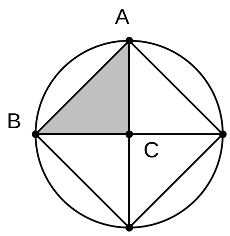
利用國一學過的正多邊形、相似形與比例的觀念，和國二學到的平方根、畢氏定理、一元二次方程式，求出圖中的最短對角線之值，而以下是我們按正多邊形的邊數分成的三個類型：



因為三角函數取的是近似值，所以我們認為沒有全部列出的必要，此只列舉出幾個圖形來說明我們實際推算的方法及發現的結果。

＜四根針＞

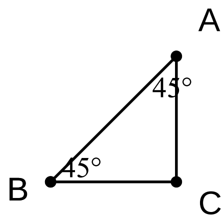
1.三角函數求線段比例



∵△ＡＢＣ為等腰直角三角形

∴ $\overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB}$

$= 1 : 1 : \sqrt{2}$



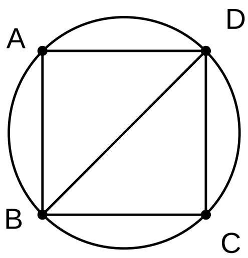
結果（各種線段比）

$\overline{AC} : \overline{AB}$

$= \sqrt{2} : 1$

2.相似形求最短對角線值

（當邊數=$4\times2^{n-1}$，$n\in N$）（**正四邊形 n=1**）



令 $\overline{AB}=1$

∵ABCD 為圓內接正四邊形 ∴ $\angle BAD = 90^\circ$ ，

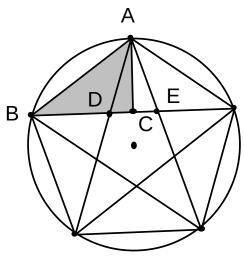
又 $\overline{AB} = \overline{AD} = 1$ ，∴ $\overline{BD} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

而若再算下去就會發現，正四邊形→正八邊形→正十六邊形→正三十二邊形的最短對角線與邊長的比值分別為：

$$\Rightarrow \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2+\sqrt{2}} \rightarrow \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \rightarrow \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$ ，會呈現出規律性。

＜五根針＞

1.三角函數求線段比例



∵　△ＡＤＥ爲等腰三角形

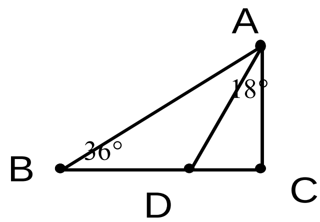
因此作 $\overline{DE}$ 的垂直平分線 $\overline{AC}$

∴　$\overline{DC}=\overline{CE}$ ，△ＡＢＣ爲直角三角形

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \sin 36^\circ = 0.5878$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \cos 18^\circ = 0.9511$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \tan 18^\circ = 0.3249$$



$\overline{AB}$ ： $\overline{AC}$

$\overline{AC}$ ： $\overline{AD}$

10000 ： 5878

9511 ： 10000

－－－－－－－－－－－　－－－－－

95110000 ： 55905658 ： 5878000

↓

$\overline{AB}$ ： $\overline{AC}$ ： $\overline{AD}$

95 ： 59 ： 56

$\overline{AB}$ ： $\overline{AD}$ ： $\overline{AC}$

$\overline{AC}$ ： $\overline{CD}$

95 ： 59 ： 56

10000 ： 32490

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

950000 ：590000 ：560000 ：181944

↓

$\overline{AB}$ ： $\overline{AD}$ ： $\overline{AC}$ ： $\overline{CD}$

95 ： 59 ： 56 ： 18

（ $\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{DE}$ ）

∵△ＡＤＢ爲等腰三角形

∴　$\overline{AD} = \overline{DB}$

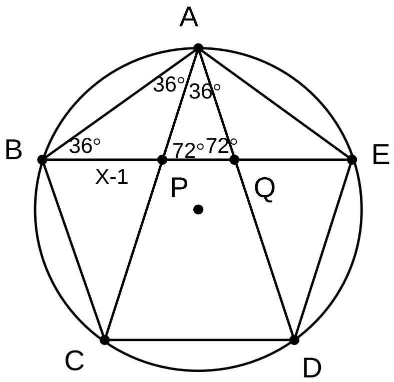
結果（各種線段比）：

$\overline{AB}$ ： $\overline{AD}$ ： $\overline{DE}$

＝ 95 ： 59 ： 36

2.相似形求最短對角線值

（當邊數$=5\times 2^{n-1}$，$n\in N$）（正五邊形 n=1）



令 $\overline{AB}=1$，令 $\overline{BE}=x$ ，$\therefore\ \overline{BP}=x-1$

$\because\triangle APB\sim\triangle BEA$

$\because\quad \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}},\therefore\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{1}{x}$

$x(x-1)=1 \qquad x^2-x-1=0$

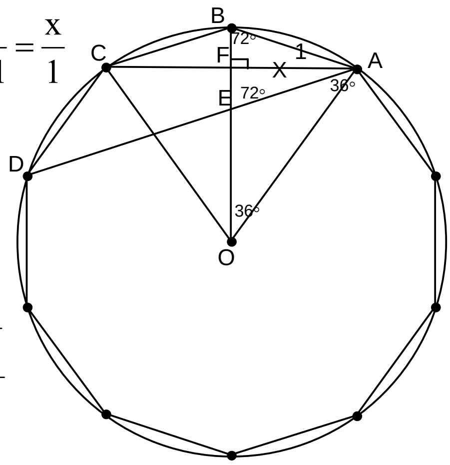
<< $x(x-1)=1$ >>

$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\quad\therefore\quad\overline{BE}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

（正十邊形 n=2）

令 $\overline{AB}=1$，令 $\overline{AO}=x$ ，$\because\ \overline{AB}=\overline{AE}=\overline{OE}=1$，$\therefore\ \overline{BE}=x-1$

$\because\triangle ABE\sim\triangle OAB \qquad \therefore\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BE}}=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}}\Rightarrow\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x}{1}$



$x(x-1)=1 \qquad x^2-x-1=0$

$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\overline{BF}=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\overline{AF}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\dfrac{16-(6-2\sqrt{5})}{16}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\overline{AC}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\times 2=\dfrac{\sqrt{8+2(1+\sqrt{5})}}{2}$

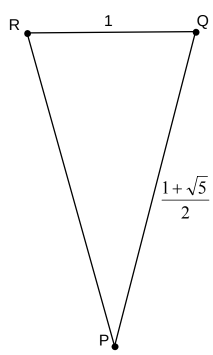
（正二十邊形 n=3）

（1）令 $\overline{AB}=1$，令 $\overline{AF}=x$ ，$\overline{AC}=2x$ ，連 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BO}$ 於 E，利用圓內接正十邊形的邊長與圓半徑得出相似關係

在△PQR 和△OAC 中，∵△PQR 和△OAC 為等腰三角形 $\angle PQR=36°=\angle AOC$，

$\therefore\triangle PQR\sim\triangle OAC$

$\dfrac{\overline{QR}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AO}}\Rightarrow\dfrac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{2x}{\overline{AO}}\Rightarrow\overline{AO}=(1+\sqrt{5})x$



（2）在△ABE 和△OAB 中

$\because\angle BAE=18°=\angle AOB$，$\angle ABE=\angle OBA$

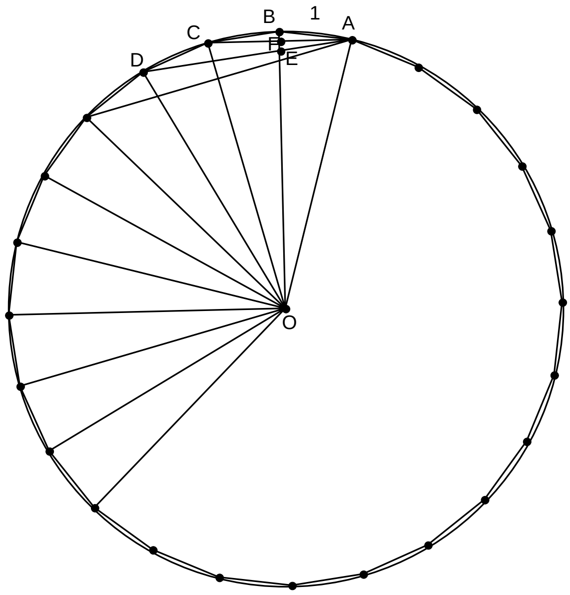
$\therefore\triangle ABE\sim\triangle OAB$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{(1+\sqrt{5})x}{1}$$

$$x\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2(1+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{5}-1}{8}$$

（3）兩邊平方得

$$x^2(1-x^2)=\frac{3-\sqrt{5}}{32}$$



令 x^2=A，可得

$$A(1-A)=\frac{3-\sqrt{5}}{32}$$

$$A^2-A+\frac{3-\sqrt{5}}{32}=0$$

$$A=\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$\overline{AC}=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{8+2(1+\sqrt{5})}}}{2}$$

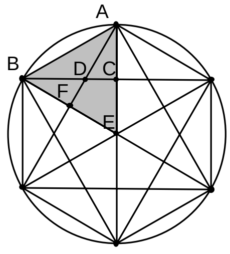
從正五邊形→正十邊形→正二十邊形，我們可以看出它的最短對角線長，呈現出規律性，接下來的正三十二邊形，我們就可以從前面的規律得出

$$\frac{\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2(1+\sqrt{5})}}}}{2}$$

，以下以此類推。

＜六根針＞

1.三角函數求線段比例



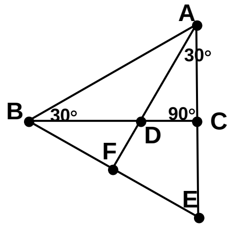
∵△ABC≅△EAF（AAS）

∴ $\overline{AC}=\overline{FE}$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\sin 30°=0.5000$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\cos 30°=0.8660$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\tan 30°=0.5774$$



$\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{AD}=87:43:50$

$\overline{AB}:\overline{AD}:\overline{AC}:\overline{CD} = 87:50:43:25$

∵因爲$30°-60°-90°$直角三角形其中一三邊長比爲$1:\sqrt{3}:2$

∴ $\overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}$

＝ 43 ：74：87

↓

原本應該爲43.5，但之前比出的值爲43，所以還是以之前的爲主

∵△ABE爲正三角形

∴ $\overline{AB}=\overline{BE}=\overline{AE}$

又∵ $\overline{AB}=\overline{BE}$，$\angle ACB=90°=\angle ECB$，$\overline{BC}=\overline{BC}$(共用邊)

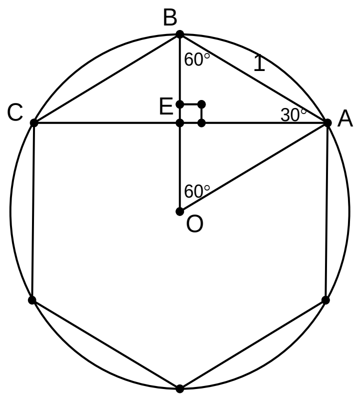
∴ $\triangle ABC \cong \triangle EBC$

因此 $\overline{AC}=\overline{CE}$

結果（各種線段比）：

$\overline{AB}:\overline{AD}:\overline{AC}:\overline{CD}$

$= 87:50:43:25$



2.相似形求最短對角線值

（當邊數$=6\times2^{n-1}$ $n\in N$）（正六邊形 n=1）

令 $\overline{AB}=1$

∵ $\angle AOB = 60°$，又 $\overline{AO}=\overline{BO}$

∴ $\overline{AE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　∴ $\overline{AC}=\sqrt{3}$

（正十二邊形 n=2）

（1）令 $\overline{AB}=1$，令 $\overline{AF}=x$，$\overline{AC}=2x$

∵ $\angle AOC = 60°$，又 $\overline{AO}=\overline{CO}$

∴△AOC 爲正三角形

∴ $\overline{OF}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AO}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 2x=\sqrt{3}x$

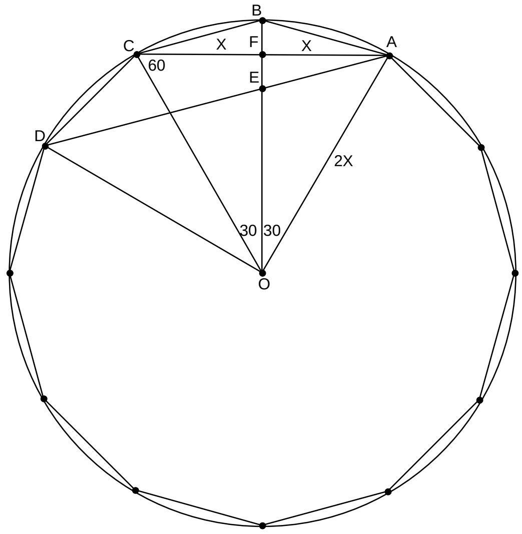
$\overline{BF}=(2-\sqrt{3})x$

（2）在△ABF 中，∵ $\overline{AF}^2+\overline{BF}^2=\overline{AB}^2$

$x^2+\left[(2-\sqrt{3})x\right]^2=1$

∴ $x^2=\dfrac{1}{8-4\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

$x=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$



$$\therefore \quad \overline{AC} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

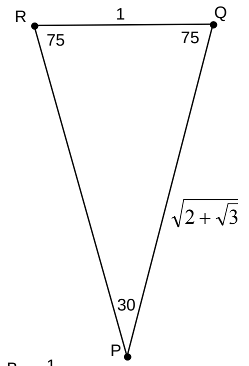
（正二十四邊形 n=3）

令 $\overline{AB}=1$，令 $\overline{AF}=x$，$\overline{AC}=2x$，連 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BO}$ 於 E，

利用圓內接正十二邊形的邊長與圓半徑得出相似關係

在△PQR 和△OAC 中，∵△PQR 和△OAC 爲等腰三角形∠RPQ=30°=∠AOC，

∴△PQR～△OAC

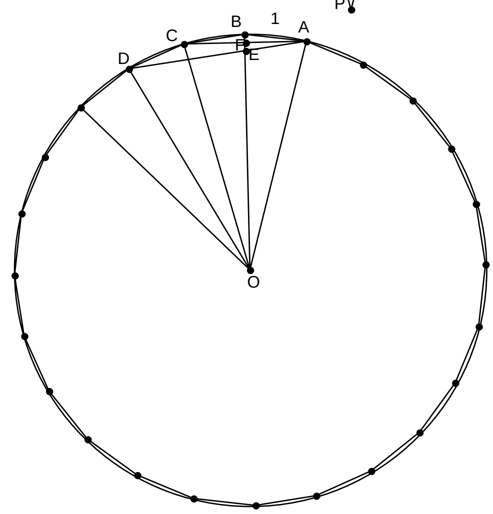


$$\frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{2x}{AO} \Rightarrow \overline{AO} = (2\sqrt{2+\sqrt{3}})x$$

在△ABE 和△OAB 中

∵ $\angle BAE = 15° = \angle AOB$，$\angle ABE = \angle OBA$

∴△ABE～△OAB



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2\sqrt{2+\sqrt{3}})x}{1}$$

$$x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{4}$$

兩邊平方得 $x^2(1-x) = \dfrac{2-\sqrt{3}}{16}$

令 x^2=A，可得 A(1-A)= $\dfrac{2-\sqrt{3}}{16}$

$$A^2 - A + \frac{2-\sqrt{3}}{16} = 0$$

$$A^2 = \frac{2+\sqrt{2+2\sqrt{3}}}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

從正六邊形→正十二邊形→正二十四邊形，我們可以看出它的最短對角線長，呈現出規律性，接下來的正四十八邊形，我們就可以從前面的規律得出

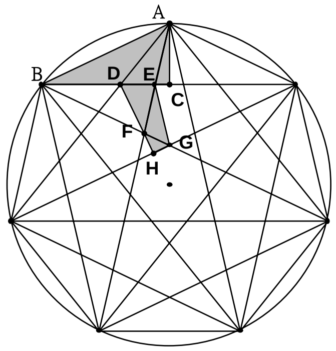
$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ ，以下以此類推。

＜七根針＞

因爲要先算出正七邊形、正十四邊形、正二十八邊形的最短對角線之値，但這需要花很多的時間來算出它的結果以找出規律，而我們在做完「六根針」的部份後，才發現時間不夠，所以只做了三角函數的部份。

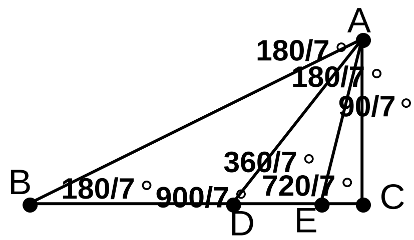
1.三角函數求線段比例

因爲角度爲分數，所以用四捨五入取進個位



運用正弦定理，比出三邊長的線段比例。先取 $\overline{EI}$ 之中點 C，連接 $\overline{AC}$；取 $\overline{GJ}$ 之中點 H，連接 $\overline{FH}$，再連 $\overline{DF}$、$\overline{EG}$，作爲輔助線

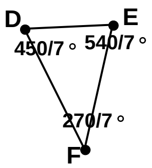
$$\overline{AB}:\overline{AD}:\overline{BD}=\sin\frac{900}{7}:\sin\frac{180}{7}:\sin\frac{180}{7}$$
$$=0.7771:0.4226:0.4226$$
$$\overline{AD}:\overline{AE}:\overline{DE}=\sin\frac{720}{7}:\sin\frac{360}{7}:\sin\frac{180}{7}$$
$$=0.9744:0.7771:0.4226$$
$$\overline{CE}:\overline{AE}=\sin\frac{90}{7}=0.2250$$



$$\overline{AB}:\overline{BD}:\overline{AD}:\overline{AE}:\overline{DE}=76:41:41:33:18$$

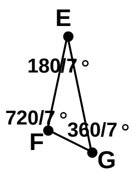
$$\overline{AB}:\overline{BD}:\overline{AD}:\overline{AE}:\overline{DE}:\overline{CE}=76:41:41:33:18:7$$

①



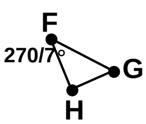
$$\overline{ED}:\overline{EF}:\overline{DF}=\sin\frac{270}{7}:\sin\frac{450}{7}:\sin\frac{540}{7}$$
$$=0.6293:0.8988:0.9744$$

②



$$\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{EG}=\sin\frac{360}{7}:\sin\frac{180}{7}:\sin\frac{720}{7}$$
$$=0.7771:0.4384:0.1736$$

③



$$\overline{GH}:\overline{FG}=\sin\frac{270}{7}=0.6293$$

④

先把 ② ③ ④ 的比值作連比

$$\overline{DE}:\overline{EF}:\overline{FG}=49:70:39$$

$$\overline{DE}:\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GH}=49:70:39:25$$

再把結果與①做連比

$$\overline{AB} : \overline{BD} : \overline{AD} : \overline{AE} : \overline{DE} : \overline{CE} : \overline{EF} : \overline{FG} : \overline{GH}$$
$$= 37 : 20 : 20 : 16 : 9 : 3 : 13 : 7 : 5$$

$\left(\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{EI}\right)$ $\left(\overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{GJ}\right)$

結果（各種線段比）：

$$\overline{AB} : \overline{AD} : \overline{AE} : \overline{DE} : \overline{EI} : \overline{EF} : \overline{FG} : \overline{GJ}$$
$$= 37 : 20 : 16 : 9 : 6 : 13 : 7 : 10$$

這便是我們研究出的「各線段比例關係」，其中用「相似形求最短對角線值」的方法，除了能知道圖形中最短對角線值的規律，也能利用尺規做圖在做出數據後，利用此線段畫出正 n 邊形，因爲這邊主要不是在討論尺規作圖畫正 n 邊形，所以不再討論。

2.相似形求最短對角線值

因爲 7 不是 360 的因數，所以不能直接整除，而我們也就不能用相似形算出它的最短對角線之値，因此我們改採用三角函數所算出的邊長相似值比出它的對角線近似值。

令 $\overline{AB}=1$， $\overline{BC}=x$

$\because \overline{BC} = 2\overline{BD} + 2\overline{DE} + \overline{EI}$

又 $\overline{BD} = \overline{AD}$

$\therefore \overline{BC} = 2\overline{AD} + 2\overline{DE} + \overline{EI}$

$\overline{AB} : \overline{BC}$

$= 37 : (40+18+6)$ <由三角函數各線段比例得知>

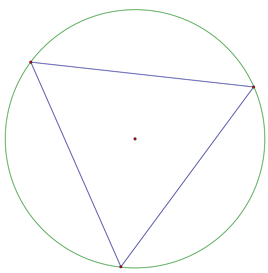
$= 37 : 64$

$1 : x = 37 : 64$

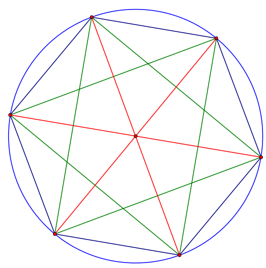
$\because x = \dfrac{64}{37}$ $\therefore \overline{BC} = \dfrac{64}{37}$

（二）區塊數一般式

區塊數指的是「周圍有線包起來的密閉區域總數」，但其密閉區域間不會存有任何的線，如例圖：



3 根針的圖
總區塊：4 塊

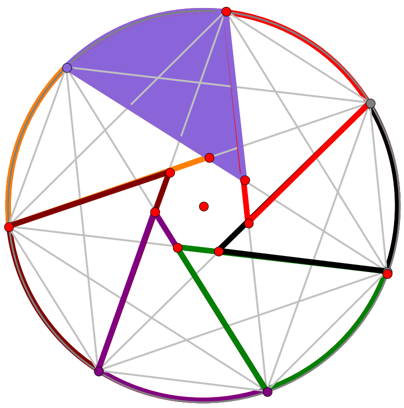


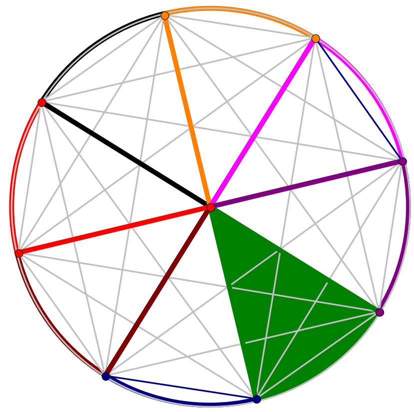
6 根針的圖
總區塊：30 塊

我們一樣是以土法煉鋼的方法一塊一塊的算出數據後，再試著套出其中的規律。在畫圖時我們發現，每個圖形都是由一塊各不相同的固定區域重複環繞 n 次而成的（n 表針數），且偶數根針以分蛋糕的方式環繞組成，而奇數的圖形則會在圖形中間出

現一個正 n 邊形，那一塊區域環繞正 n 邊形旋轉而成，如下圖：

針數爲奇數 （7 根針）　　　　　　　　　針數爲偶數（8 根針）





因此我們以兩種分法分別討論（數據如下表）：

針數	區塊數	n×a+1（奇）	n×a（偶）	n+n×b+1（奇）	n+n×b（偶）
3	4	3×1+1		3+3×0+1	
4	8		4×2		4+4×1
5	16	5×3+1		5+5×2+1	
6	30		6×5		6+6×4
7	57	7×8+1		7+7×7+1	
8	88		8×11		8+8×10
9	163	9×18+1		9+9×17+1	
10	230		10×23		10+10×22
11	386	11×35+1		11+11×34+1	
12	456		12×38		12+12×38
13	728	13x5+1		13+13x+1	

1.奇數根針圖形的區塊數

為了便於看出規律，我們採用兩者方法觀察，n×a+1 和 n+n×b+1（n 爲針數，a、b 分別爲未知常數，也就是我們要找出規律的數字），前者的分法在前面陳述過，是由於有一塊區域重覆 n 次加上奇數圖形中間特有的正 n 邊形而來，後者的分法則是拆成去掉圓周後的「正 n 邊形頂點兩兩相連」圖形和再加上圓周會產生的 n 塊區塊和奇數圖形中間特有的正 n 邊形而來，雖然拆成這兩種分法，但是還是無法看出確切的規律，於是宣告此方法失敗

2.偶數根針圖形的區塊數

同奇數根針，一樣分成 n×a 和 n+n×b（n 爲針數，a、b 分別爲未知常數，也就是我們要找出規律的數字），兩種方法的裏有皆在上面詳細說明過，所以不再說明。偶數的規律比較顯而易見，但卻也不是一般式，大致上發現兩個較主要的規律，能套用至連續四個數據，列舉如下：

（1）n×a

從 4 根針開始，a 為前一項 a 的兩倍加 1（10 根針以後不符合），寫出公式

$$n\times\{[(2\times2+1)\underbrace{\times2+1]}_{\frac{n-4}{2}\text{組}}\times2+1\}\Lambda\ \Lambda$$

n 的適用範圍：4＜n≦10，n 為偶數

（2）n+n×b

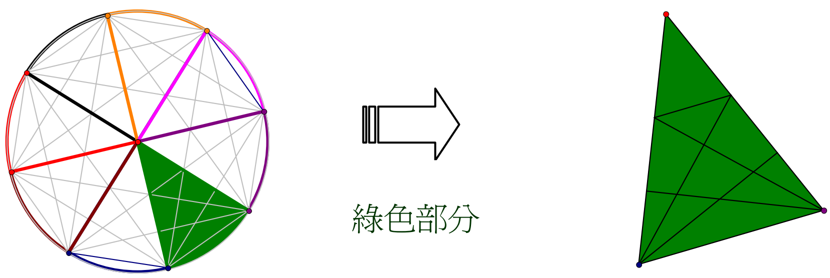
從 6 根針開始，會和前面的差 1（12 根針以後不符合），寫出公式

$$n+n[1+3(3+\underbrace{4+5}_{\frac{n-6}{2}\text{個}}\Lambda\ \Lambda)]$$

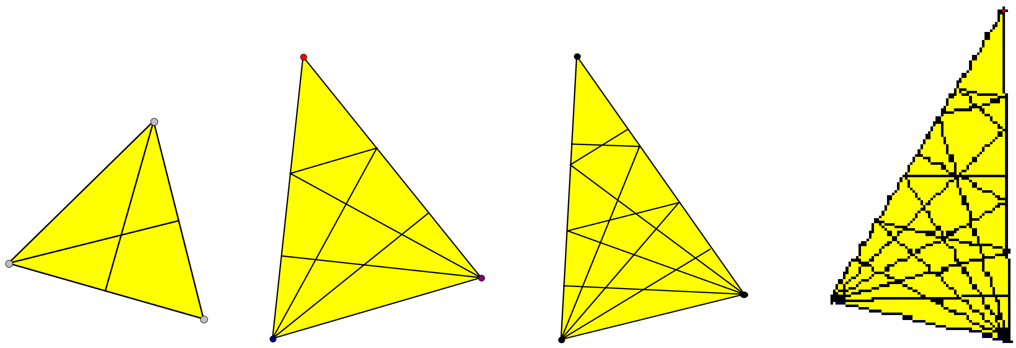
n 的適用範圍：6＜n≦12

我們決定再從圖形下手後，依照之前所發現的圖形規律，也就是上方曾提過的「每個圖形都是由一塊各不相同的固定區域重複環繞 n 次而成的（n 表針數），且偶數根針以分蛋糕的方式環繞組成……」，而進行深層的討論。

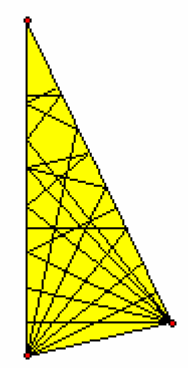
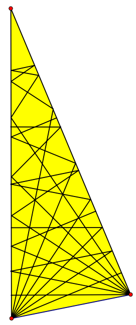
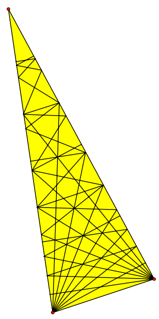
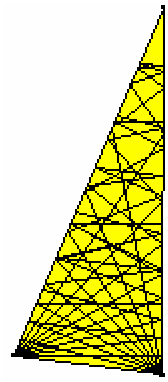
首先，我們依針數的奇偶分為兩類〈因圖形的不同〉，先討論偶數，接著，我們不再討論圓的全部，而是只取圓的一部份進行討論，也就是只取這個部分〈如右下三角形〉：



而以下是我們依上方所示的方法，列出針數是偶數的這類三角形：

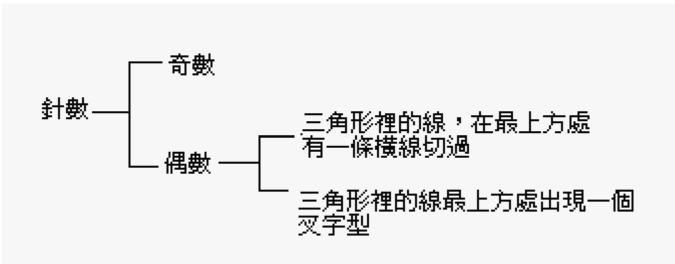


六根針　八根針　十根針　十二根針

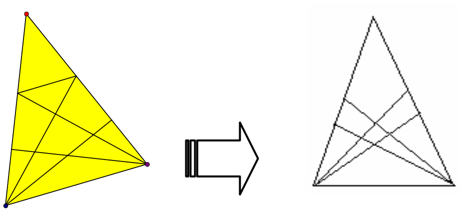





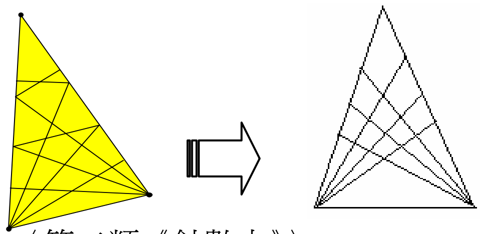
十四根針　　十六根針　　十八根針　　二十根針

接著，經我們仔細觀察後，發現在這些三角形裡所畫的線，也有一部份的規律，而它們又可分成兩類，第一類是三角形裡的線，在最上方處，有一條橫線切過的，第二類則是三角形裡的線最上方處，出現一個叉字型的，而這兩類出現的順序是交叉進行的，也就是說針數是 4.8.12.16.20 的屬於第一類，而針數是 6.10.14.18 的則是第二類，以下是我們所做的關係圖：

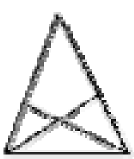
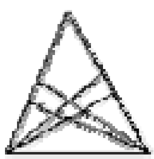
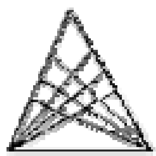
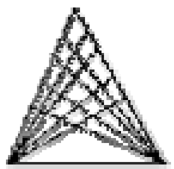


在分成兩類後，從圖形之中，去除掉某一些線後，又會發現兩類都有一個共通的性質，就是由一種有規律的例圖組成的，整理如下〈得先去除一些線，而留下有規律的線〉：

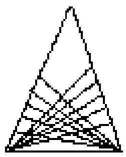

〈第一類《針數八》〉


〈第二類《針數十》〉

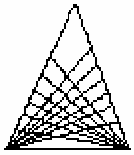
以下皆為去掉線後的圖形：

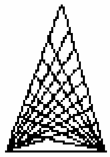
六根針　　八根針　　十根針　　十二根針



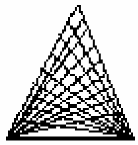
十四根針



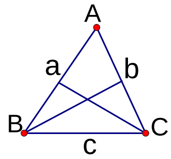
十六根針



十八根針



二十根針



接著，依我們修改過所列出的圖來看，這些三角形裡的線，〈假設圖如右〉，都是由 B、C 兩點各自向 b、a 兩邊延伸畫出線，也就是形成一個叉字型，而這類叉字型的多寡，皆會隨著針數的多寡而有所增減，以下，是我們所列出的表：

針數	叉叉數	區塊數	規律
6	1	4	2^2
8	2	9	3^2
10	3	16	4^2
12	4	25	5^2
14	5	36	6^2
16	6	49	7^2
18	7	64	8^2
20	8	81	9^2

在找出這樣的規律後，我們也從之前去除的線進行觀察，但卻找不出特有的規律，而奇數方面的圖形規律，困難度更高。本來我們已經放棄尋找「區塊數的一般式」，但五月中旬時，有鑒於交點數導出的「數據上」交點數一般式，我們決定把圖形依間隔數的連線分開來推導區塊數規律，先找出「數據上」區塊數一般式，再討論實際圖形上增加或減少的區塊數，並加以歸納整理，以完成完美的區塊數一般式。「數據上」區塊數一般式列為下表

針數 n	間隔 m	區塊數	規律	總區塊	針數 n	間隔 m	區塊數	規律	總區塊
3	1	4	3+1	4	11	1	12	11+1	385
4	1	5	4+1	8		2	23	2x11+1	
	2	4	相等			3	34	3x11+1	
5	1	6	5+1	16		4	45	4x11+1	
	2	11	2x5+1			5	56	5x11+1	
6	1	7	6+1	30	12	1	13	12+1	456
	2	13	2x6+1			2	25	2x12+1	
	3	6	相等			3	37	3x12+1	
7	1	8	7+1	56		4	49	4x12+1	
	2	15	2x7+1			5	61	5x12+1	
	3	22	3x7+1			6	12	相等	
8	1	9	8+1	88	13	1	14	13+1	未知
	2	17	2x8+1			2	27	2x13+1	
	3	25	3x8+1			3	40	3x13+1	
	4	8	相等			4	53	4x13+1	
9	1	10	9+1	162		5	66	5x13+1	
	2	19	2x9+1			6	79	6x13+1	

針數n	間隔m	區塊數	規律	總區塊	針數n	間隔m	區塊數	規律	總區塊
	3	28	3×9+1		14	1	15	14+1	
	4	37	4×9+1			2	29	2×14+1	
10	1	11	10+1	230		3	43	3×14+1	
	2	21	2×10+1			4	57	4×14+1	
	3	31	3×10+1			5	71	5×14+1	
	4	41	4×10+1			6	85	6×14+1	
	5	10	相等			7	14	相等	

我們發現了 3 點規律

1. n 根針的間隔 1 之區塊數皆為 n+1
2. n 若為偶數，則間隔〈n÷2〉之區塊數，必為 n
3. .排除 1.2 之條件〈n 根針的間隔 1 與 n 若為偶數，則間隔〈n÷2〉〉後，其餘的間隔數之區塊必為「間隔 n×針數 m+1」

所以我們可以推出「數據上」總區塊數的算法

＜奇數根針＞

$$\left(1+2+3+\Lambda\Lambda+\frac{n-1}{2}\right)n+\frac{n+1}{2}=\frac{n^3+3n-4}{8}$$

＜偶數根針＞

$$\left(1+2+3+\Lambda\Lambda+\frac{n-2}{2}\right)n+\frac{n-2}{2}+n=\frac{n^3-2n^2+12n-8}{8}$$

可惜的是關於交點（及區塊）其重複的問題，我們一直到五月中旬才赫然發現，所以結果不彰，因此區塊的重複公式沒有求出，還望未來有人能將這缺憾補齊。

三、找出此研究在生活中的實例

辛苦研究出的結果，除了美觀的圖外，我們更希望能找出研究在生活中的應用，苦思許久後，老師提議出「霓虹燈」的構想，且因為生活科技課恰好焊過電路板，於是我們想到兩個關於「霓虹燈」的應用設計，並嘗試做出模型，統稱為「閃燈裝飾」。

（一）不同時段閃爍的燈泡

根據生科老師的說法，如果我們要使燈泡能有順序的閃爍，除了可以去請教專門做霓虹燈的店，也可以自己去尋找可以控制的 IC 晶片，但我們覺得這樣就跟圖形（本來要當做線路的）沒有什麼關係，所以目前（六月中旬）仍在嘗試中，或許往後會小有成果。

（二）不同顏色閃爍的燈泡

我們設計為按圖形連接線路與燈泡使燈泡能以顏色分組閃爍，雖然這種效果也只需要用 IC 晶片就能解決，但至少我們可以自己利用簡單的電線、不同色的燈泡和電池及可控制的開關就可以完成。

除了可以用來當作一種裝飾外，我們也想過用在其他的地方，像時鐘上（根據時間閃爍）、彈跳版上（可以知道自己跳的位置），另外也可以拿來用於教學上，像找規律、在圓上連線、及最短對角線的求法等，其實美麗的圖形就是生活中很好的藝術品了！

伍、研究結果

一、圖形中所用針數、間隔數與線數的關係

（一）藉由圖表找出數據間的 7 個規律

1.當針數爲偶數時，若其間隔數爲針數的因數，則線數等於間隔數

2. n 根針，因爲順時針和逆時針纏繞的關係，間隔數 x 和 n-x（$x<\frac{n}{2}$, $x\in N$）所用線數相同

3.針數爲質數時，不管間隔數是多少，所用線數爲 1

4.針數如爲 2^m（m 爲正整數），則間隔數由小到大對所用線數的排序爲 2^0、2^1、2^2、……2^{k-1}、2^k

（二）藉由規律推出圖形中所用針數、間隔數與線數的關係

線數 | **針數　，　間隔**

圖形邊數　，　有下一 條線數的間隔數

二、圖型中交點數的一般式

（一）藉由圖表找出數據間的 3 個規律

1. 用針數就是間隔 m 與 m+1 交點的差（$m\neq[\frac{n}{2}]$或$[\frac{n}{2}]-1$）

2. n 根針，因爲順時針和逆時針纏繞的關係，間隔數 x 和 n-x（$x<\frac{n}{2}$，$x\in N$）所用線數相同

3. 針數爲偶數時，間隔 $\frac{n}{2}$ 的交點數爲 1

（二）藉由規律找出交點數的一般式

＜奇數根針＞已完全解答完畢的一般式

$$\frac{n^3-4n^2+3n}{4}-n\left[\underbrace{\left(\frac{n-1}{2}-2\right)2+\left(\frac{n-1}{2}-3\right)4+\left(\frac{n-1}{2}-4\right)6+\left(\frac{n-1}{2}-5\right)8+\Lambda\ \Lambda}_{\frac{n-1}{2}\text{組}\left(\frac{n-1}{2}-a\right)a\ ,\ a\in N}\right]$$

＜偶數根針＞僅爲　「數據上」的一般式

$$\frac{n^3}{4}-\frac{3n^2}{2}+2n+1$$

三、圖形中各線段的比例關係

我們將結果歸納成下表

做法 / 針數		三角函數	相似形（邊數=針數×2^{n-1}，$n\in N$）
四根針	正四邊形 n=1	$\overline{AB}:\overline{AC}=\sqrt{2}:1$	$\because \overline{BD}$(最短對角線)$=\sqrt{2}$ $\therefore \overline{AB}=1$ $\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>正八邊形
n=2</td><td></td><td>最短對角線 $= \sqrt{2+\sqrt{2}}$</td></tr>
<tr><td>正十六邊形 n=3</td><td></td><td>最短對角線 $=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. 因爲三角函數值爲近似值，所以無法找出規律
2. 從上方右欄的相似形表格中，可以看出它的規律，並推論正三十二邊形（n=4）的最短對角線爲 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">五根針</td><td>正五邊形
n=1</td><td>$\overline{AB}:\overline{AD}:\overline{DE}=95:59:36$</td><td>$\because \overline{BE}$（最短對角線）$=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\therefore\ \overline{AB}=\dfrac{95}{154}\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{95(1+\sqrt{5})}{308}$
$\overline{AD}=\dfrac{59}{154}\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{59(1+\sqrt{5})}{308}$
$\overline{DE}=\dfrac{18}{154}\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{9(1+\sqrt{5})}{154}$</td></tr>
<tr><td>正十邊形
n=2</td><td></td><td>$\overline{AC}$（最短對角線）$=\dfrac{\sqrt{8+2(1+\sqrt{5})}}{2}$</td></tr>
<tr><td>正二十邊形 n=3</td><td></td><td>$\overline{AC}$（最短對角線）$=\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{8+2(1+\sqrt{5})}}}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">1. 因爲三角函數值爲近似值，所以無法找出規律
2. 從上方右欄的相似形表格中，可以看出它的規律，並推論正四十邊形（n=4）的最短對角線爲 $\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{8+2(1+\sqrt{5})}}}}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">六根針</td><td>正六邊形
n=1</td><td>$\overline{AB}:\overline{AD}:\overline{AC}:\overline{CD}=87:50:43:25$</td><td>$\because \overline{AC}$（最短對角線）$=\sqrt{3}$
$\therefore\ \overline{AB}=\dfrac{87}{150}\times\sqrt{3}=\dfrac{29\sqrt{3}}{50}$
$\overline{AD}=\dfrac{50}{150}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$\overline{AC}=\dfrac{43}{150}\times\sqrt{3}=\dfrac{43\sqrt{3}}{150}$
$\overline{CD}=\dfrac{25}{150}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$</td></tr>
<tr><td>正十二邊形 n=2</td><td></td><td>$\overline{AC}$（最短對角線）$=\sqrt{2+\sqrt{3}}$</td></tr>
<tr><td>正二十四邊形 n=3</td><td></td><td>$\overline{AC}$（最短對角線） $=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$</td></tr>
</table>

	1. 因為三角函數值為近似值，所以無法找出規律 2. 從上方右欄的相似形表格中，可以看出它的規律，並推論正四十八邊形（n=4）的最短對角線為 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$		
七根針		$\overline{AB}:\overline{AD}:\overline{AE}:\overline{DE}:\overline{EI}:\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GJ}$ $=37:20:16:9:6:13:7:10$	$\because \overline{BC}=\frac{64}{37}$ $\therefore \overline{AB}=64, \overline{AD}=\frac{1280}{37}, \overline{AE}=\frac{1024}{37}$ $\overline{DE}=\frac{576}{37}, \overline{EI}=\frac{384}{37}, \overline{EF}=\frac{832}{37}$ $\overline{FG}=\frac{448}{37}, \overline{GJ}=\frac{640}{37}$
	1. 因為三角函數值為近似值，所以無法找出規律 2. 因為用相似形無法算出 7 根針的最短對角線，所以用線段比例比出最短對角線之值		

四、圖形中區塊數的一般式

（一）藉由圖表規律找出區塊數的「數據上」一般式

＜奇數根針＞

$$\frac{n^3+3n-4}{8}$$

＜偶數根針＞

$$\frac{n^3-2n^2+12n-8}{8}$$

（二）通用於「實際上」區塊數的小公式

因為沒有確切的研究出一般式，所以列舉兩個只通用 4 個數據的公式

＜n×a＞

從 4 根針開始，a 為前一項 a 的兩倍加 1（10 根針以後不符合），寫出公式

$$n\times\{[(2\times2+1)\underbrace{\times2+1]}_{\frac{n-4}{2}\text{組}}\times2+1\}\cdots\cdots$$

n 的適用範圍：4＜n≦10，n 為偶數

＜n+n×b＞

從 6 根針開始，會和前面的差 1（12 根針以後不符合），寫出公式

$$n+n[1+3(3+\underbrace{4+5}_{\frac{n-6}{2}\text{個}}\cdots\cdots)]$$

n 的適用範圍：6＜n≦12

其他的發現請見研究過程（p17-p22）

五、所有數據的總圖

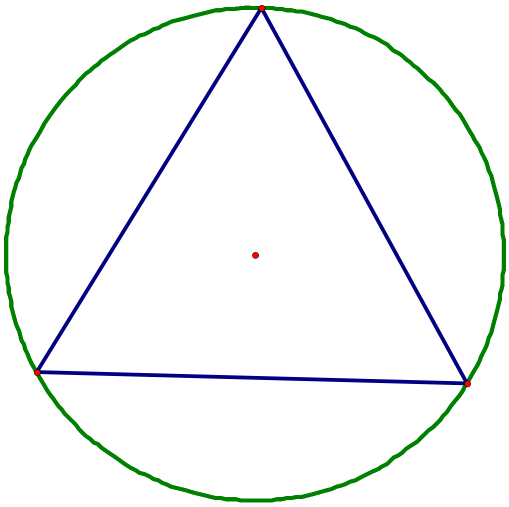
針數	間隔	線數	交點	區塊	針數	間隔	線數	交點	區塊
3	1	1	0	4		5	5	1	
	2	1	0			6	2	30	
4	1	1	0	8		7	1	20	
	2	2	1			8	2	10	
	3	1	0			9	1	0	
5	1	1	0	16	11	1	1	0	386
	2	1	5			2	1	11	
	3	1	5			3	1	22	
	4	1	0			4	1	33	
6	1	1	0	30		5	1	44	
	2	2	6			6	1	44	
	3	3	1			7	1	33	
	4	2	6			8	1	22	
	5	1	0			9	1	11	
7	1	1	0	57		10	1	0	
	2	1	7		12	1	1	0	456
	3	1	14			2	2	12	
	4	1	14			3	3	24	
	5	1	7			4	4	36	
	6	1	0			5	1	48	
8	1	1	0	88		6	6	1	
	2	2	8			7	1	48	
	3	1	16			8	4	36	
	4	4	1			9	3	24	
	5	1	16			10	2	12	
	6	2	8			11	1	0	
	7	1	0		13	1	1	0	780
9	1	1	0	163		2	1	13	
	2	1	9			3	1	26	
	3	3	18			4	1	39	
	4	1	27			5	1	52	
	5	1	27			6	1	65	
	6	3	18			7	1	65	
	7	1	9			8	1	52	
	8	1	0			9	1	39	
10	1	1	0	230		10	1	26	
	2	2	10			11	1	13	
	3	1	20			12	1	0	
	4	2	30						

六、研究時所有繪出的圖

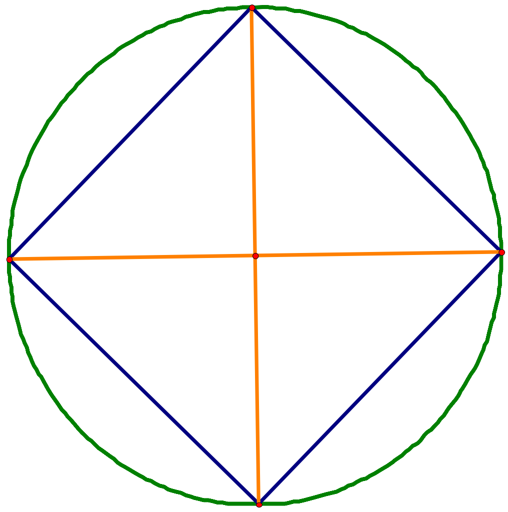
因爲版面（頁數限制）的關係，所以圖都縮小，如果有看不清楚或糊成一團的，敬請

見諒！

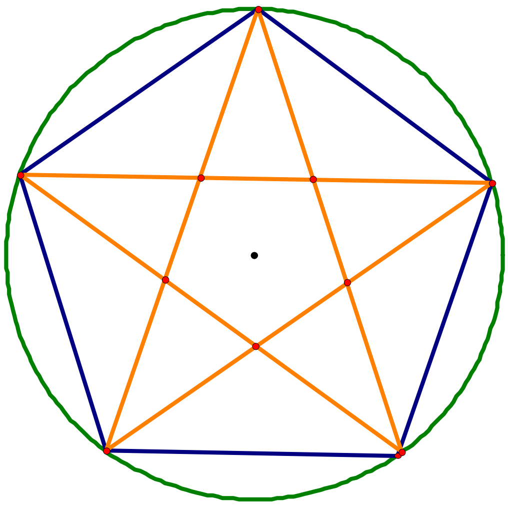
3 根針



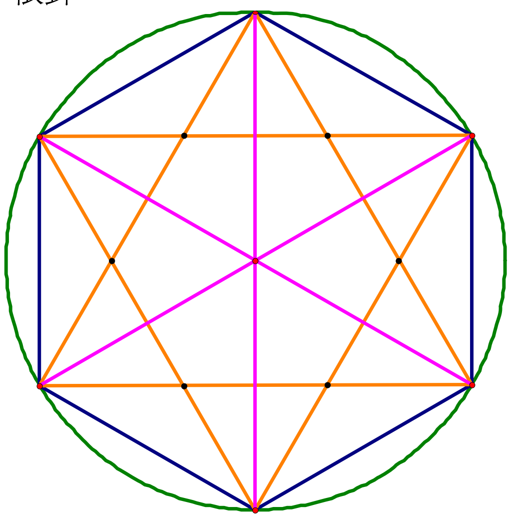
4 根針



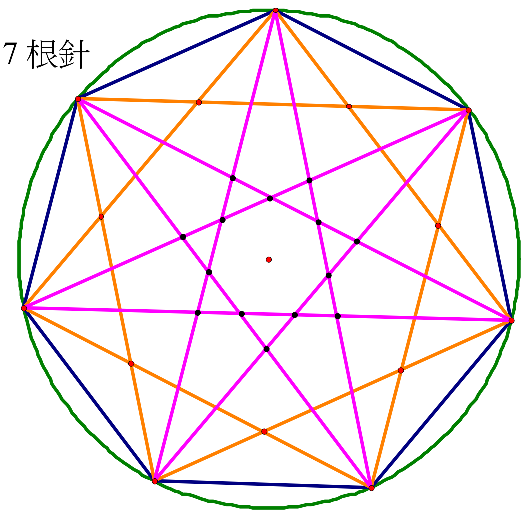
5 根針



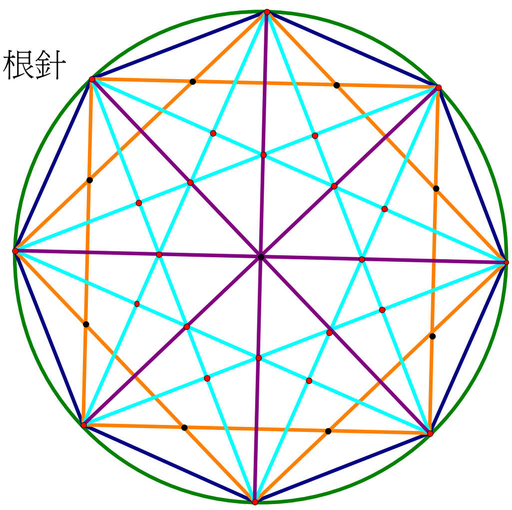
6 根針



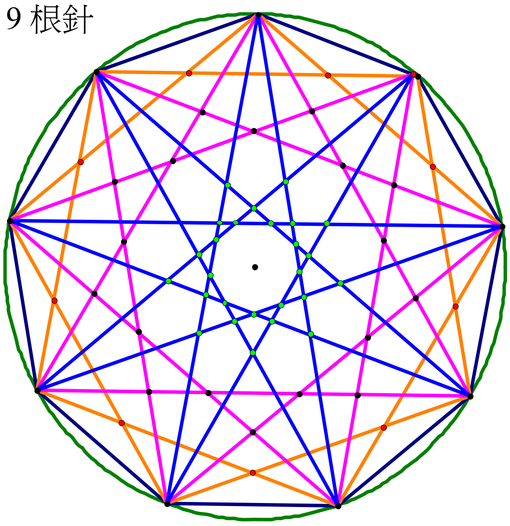
7 根針



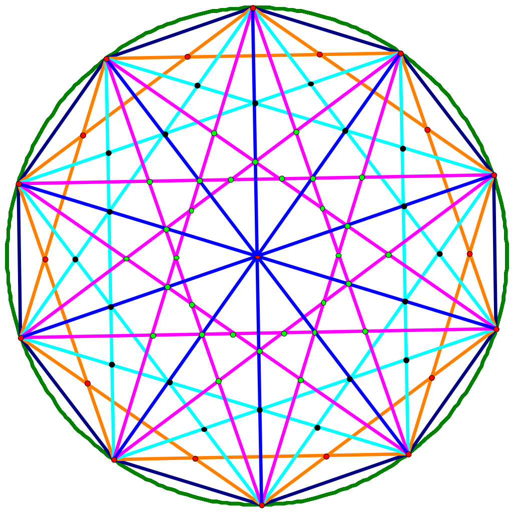
8 根針



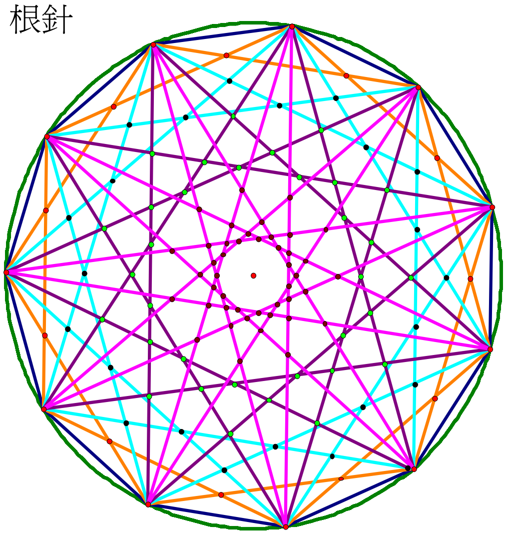
9 根針



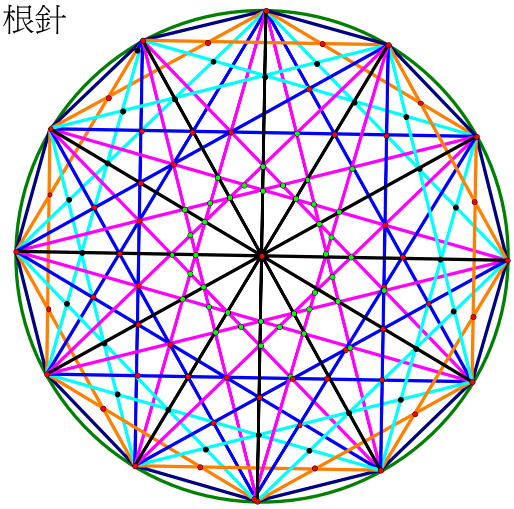
10 根針



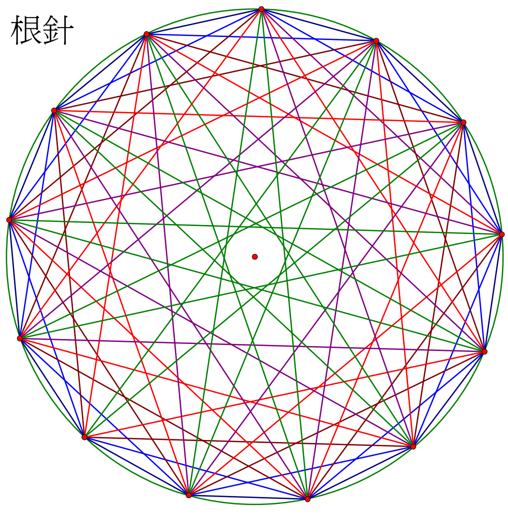
11 根針



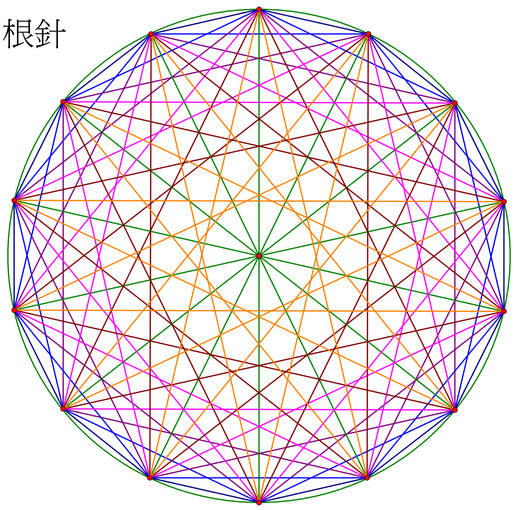
12 根針



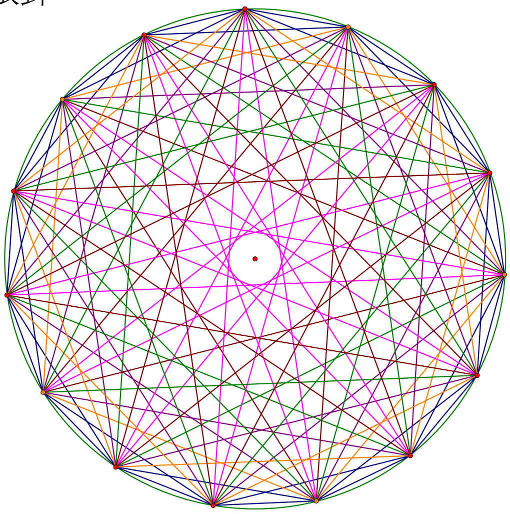
13 根針



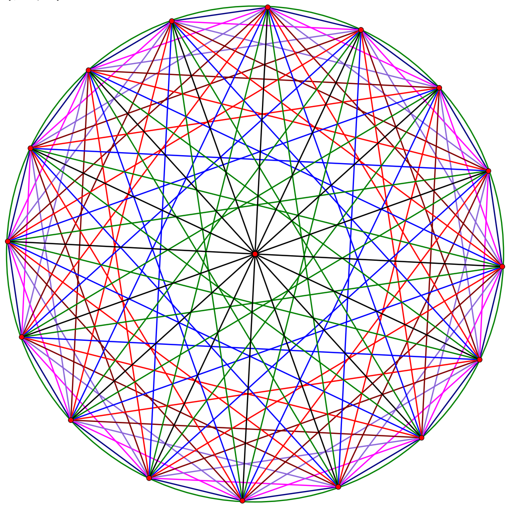
14 根針



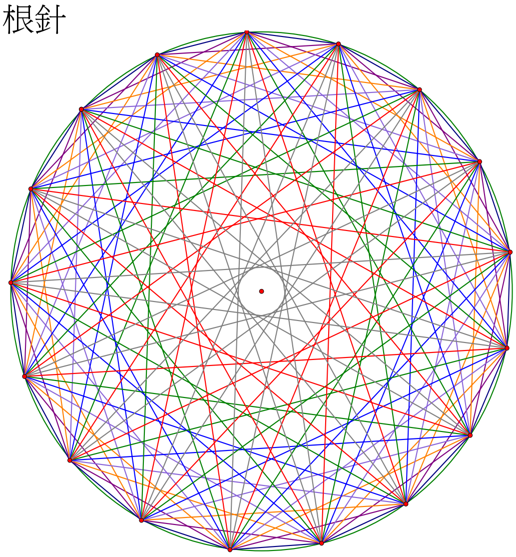
15 根針



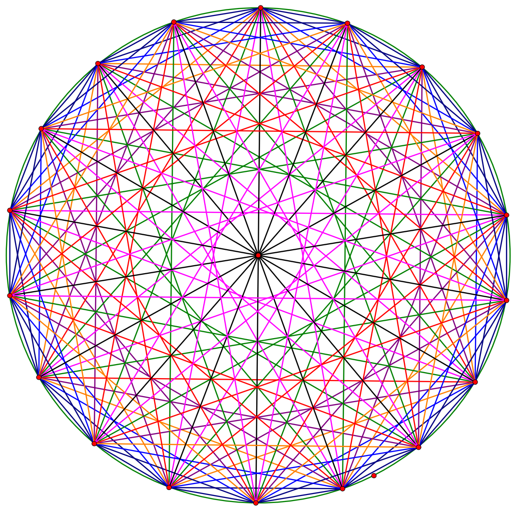
16 根針



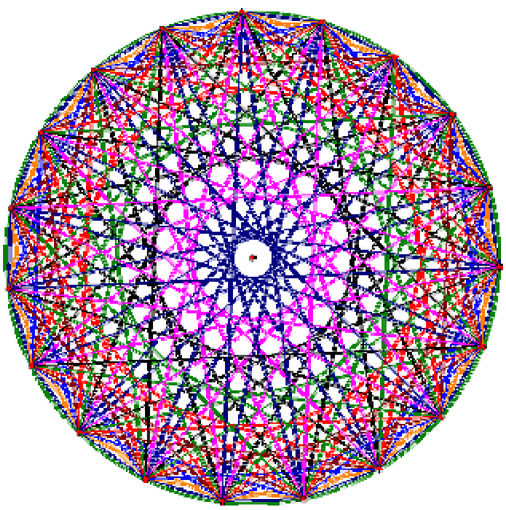
17 根針



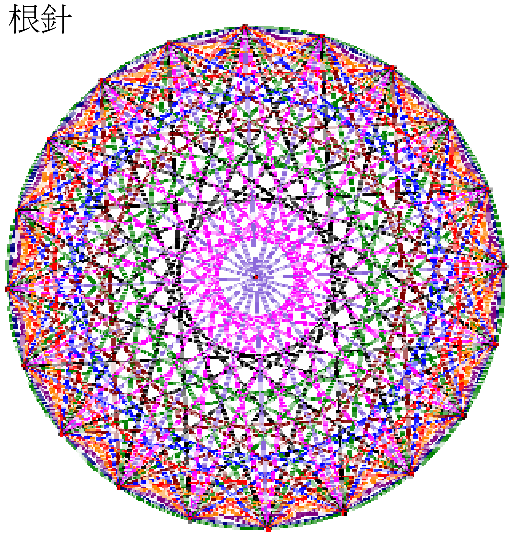
18 根針



19 根針



20 根針



陸、討論

（一）研究時大多都是使用「表格找規律」的觀察法，除了這一種方法外，還有別的研究

方法嗎？

當然有，就如這份說明書一開頭表示，我們是因爲能夠用我們現在的所學才深入研究的，所以主要研究方式還是選擇我們現在學到的「表格找規律」的觀察法，也可以說是「以簡馭繁」－用簡單的規律推廣至一般式，另外還有直接推導、圖形檢驗（我們也有用到）等方法。

（二）每個人對題目都會有不同的做法，是如何決定該用哪種方法深入研究的呢？

討論，像展開辯論般各自陳述自己的方法，在找出最好的辦法來，有時候方法沒辦法分出優劣，我們就會一起進行，雙管齊下，以達到最好的結果。

（三）爲什麼線段比例的相似形推導中，要用圖形中的「最短對角線」呢？

因爲研究對角線時，發現它有一定的規律。當初會研究對角線，是因爲可以利用對角線來畫出圖形（逆推回去），在這裡限於版面問題，所以就不討論了！

柒、結論

這份研究是關於「圓上等分點依不同間隔連線的圖形」的問題，因此我們將它取名爲「圓舞曲」。研究中，我們找出點數、間隔數及用線數的關係，實際使用三角函數和相似形的方法算出圖形中各線段比例、最短對角線的近似值，也推算出交點數與區塊數「數據上」的一般式，而其中「實際上」的奇數點圖形的交點數一般式已解畢，但偶數點圖形的交點數因爲牽扯到「共點」的問題，使得五月中旬才發現「實際與數據上不同」這個缺憾的我們來不及解決，區塊的重覆問題更不用說了，這也是這份研究待解決的缺憾。另外在生活上時應用方面也是我們後來才加上去的，因此「閃燈裝飾」的出現更是令我們驚喜。因爲我們還是國中生的關係，所以我們整份研究都是使用簡單且在我們能力範圍所及的觀念進行，因此我們並沒有做的很勉強，雖然研究到最後還是產生缺憾，但我們已經試圖把報告做到最完整、透徹，而這也正是這份研究最珍貴的價值之ㄧ囉！

捌、參考資料及其他

國立編譯館（民 89）。國民中學選修數學教科書第六冊（P.34）臺北市：國立編譯館

南一書局（民 93）。國民中學數學（陳版）第一冊。台南市：南一書局

南一書局（民 93）。國民中學數學第二冊。台南市：南一書局

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

國中組 數學科

030423
圓舞曲

臺北縣立積穗國民中學

評語：
有趣的研究主題，但似乎不是一個困難的問題，整個計算的方式似乎仍有改進的空間，應該有更好的方式來簡單說明計算的結果。