中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

佳作

030422
生死一環間--斷金鍊的問題研究

臺北市立北投國民中學

作者姓名：
國二 張人予 國二 陳重達

指導老師：
黃國斌

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：生死一環間──斷金鍊的問題研究

關 鍵 詞：環節、最少刀數、最大環數

編　　號：

目　　　　錄

壹、摘要 -- **p2**

貳、研究動機 --- **p2**

參、研究目的 --- **p3**

肆、研究設備及器材 --- **p3**

伍、研究方法 --- **p3**

陸、研究過程與結果 --- **p3~p24**

柒、討論 -- **p24**

捌、結論 -- **p24~27**

玖、參考資料及其他 --- **p27~28**

壹、摘要

本研究主要是由文獻中〝巧斷金練〞一條二十三環金練一天付一環之斷金問題延伸探討一條有 k 環的鍊子，依假設每天需給付 m 環，給付環數不同情況下，推導出在每一假設條件下之項鍊最大環數、切開環各段環節的環數、被切開環的序號等公式，進而再推研一條項鍊與一圈項鍊之差異性。

首先我們先由一天付一個環、兩個環、三個環、四個環進行實驗、尋找規律、驗證推導公式，進而推導出一天付 m 個環之情況。其次我們又進一步研究若為一圈密合項鍊在與一條項鍊假設條件相同之情況變化為何進行研究。總結我們研究推導出許多可行的公式，統整後歸納於結論即討論中。

貳、研究動機

課餘時間我們常喜愛閱讀一些課外讀物，其中數學部分更是我們所偏愛的。記得有一次在「啊哈！有趣的推理」一書中，看到一則有趣的數學故事：斷掉的手鍊，興起了我們深入研究的動機。現就我們尋找到的資料，由「名人趣題妙解」一書中摘錄以下的內容：

☆巧斷金鍊

有一次，米勒從家鄉來到里昂參加一個美術討論活動，由於行前匆忙，所以沒有帶足夠支付開銷的鈔票，值錢的東西僅有他身上那一條金項鍊。

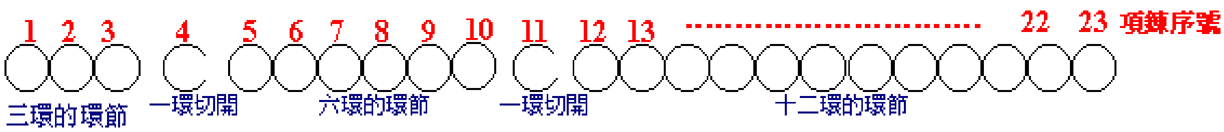
當他來到一家旅店打算住下時，才發現口袋空空的，於是他從脖子上解下金項鍊交給旅店老闆，老闆用手掂了掂，又數了數環數(共 23 環)，便說：「你每天須付一個環作為食宿費，且須每日結賬。」米勒無法，只好點了頭。

老闆剛要用剪刀剪開項鍊的環時，米勒急忙道：「您不必每天剪掉一個環，我有一個辦法讓您只要剪下其中的兩個環，便可按您的要求支付我 23 天的費用。」

旅店老闆聽後覺得簡直荒唐可笑，便說：「你若真的能做到，那麼這 23 天的食宿費我全免了！」…………………。

最後米勒真的免付他所有的住宿費，他是這樣做到的：

他將項鍊上面的第 4 個環和第 11 個環切開【如圖一】



圖一

「我可以這樣支付食宿費。」說著他在紙上畫了張表：

第 k 天	一	二	三	四	五	六	………	二十三
付款方式	+1	+1	+3 - (1+1)	+1	+1	+6 – (3+1+1)	………	1+1+3+6+12

這裡〝+〞表示米勒付給老闆的環數，而〝-〞表示老闆找回的環數。

看似不可能的解法，卻意外的為米勒省下了住宿費。於是我們開始效仿米勒的做法，去探討其他變化的問題……。其中我們應用到了一些課堂上老師教的像是等比級數這類的東西來作一些推導。

參、 研究目的

一、 找出切一條有 k 個環的鍊子所需切開的最小環數(即最小刀數 n)。
二、 找出最少刀數(n)與環節數的關係。
三、 找出一條鍊子經由最少刀數(n)切過後，各環節的環數的關係與規律。
四、 找出一條鍊子切 n 個環，與這些被切開的環的序號。
五、 找出一天付 m 環之以上第一 ~ 四項之規律。

肆、 研究設備及器材

一、 人腦
二、 紙筆
三、 計算機
四、 電腦

伍.、 研究方法

一、 用畫圖以及推測的方式，觀察〝須切開金鍊的環數〞、〝切開金環的序數〞以及〝各環節的環數〞之間的規律與關係。
二、 利用上述一的研究方式，來做一些有關代數式的討論。
未知數的定義：

(一) k：一條(一圈)項鍊總共的環數
(二) n：在任何一條(一圈)項鍊，切斷的最小環數
(三) m：每天所付的環數。(每天必須一樣)
(四) x：第 x 個環節。
(五) y：被切開的第 y 個環。
(六) a：n÷m 的商數
(七) b：n÷m 的餘數

陸、 研究過程與結果

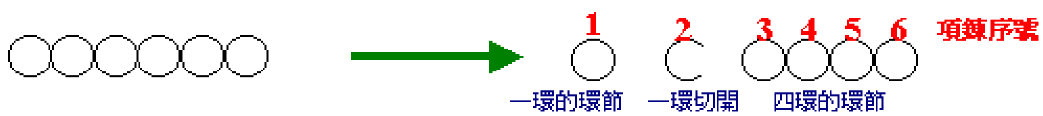
一、 *研究一：一條金鍊切環的問題：一天付兩個環*

(一)玩法

把由 k (設 k 為 2 的倍數)個環所連結起來的鍊子，以切開最少的環數來組成 2、4、6………(k-4)、(k-2)、k 這些環數的組合。

例：今有一條 6 個環連結起來的鍊子，欲切開最少的環來組成 2、4、6 這些環數的組合，請問該如何下手？

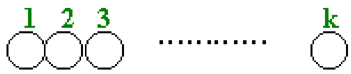
答：



將第 2 個環切開，將會得到 1、1、4 這些環與環節。組合狀況如下表：

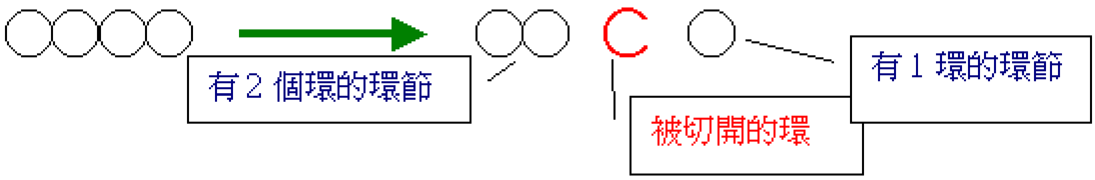
環數組合	2	4	6
須用到的環節大小	1+1	4	1+1+4

(二)規則

1. 首先將每一個環進行編號，例如：1、2、3……k。 

2. 切開一個環的定義：將欲切開的環解開來，成為一個獨立的環。
3. 在本報告中，切環的方式一律從前面開始切起(從序號小的開始)，因為從後面與前面切起的意義是一樣的，所以在本報告中只討論從前面切起的狀況。
4. 環節的定義：在本報告裡所指的〝環節〞為一條鍊子經切開後，那些未被切開的環——即〝切開環〞獨立出來後，所新形成的連結環。

如以下圖例：由 4 個環組成的鍊子，將其第 3 個環切開後，成為 1 個環及 2 個環節的組合。



(三)實作

表格請見下一頁。

金鍊的環數	須切開最少的環數值	所切金環的序號 ※：隨機(最後一個被切開的環)	其中一種切環方式及切開後的環節與切開環之組合〈紅色表切開環〉 「註」：後面會說明為何要如此切環
2	0	0	2
4	1	2	1+1+2
6	1	2	1+1+4
8	2	5、※	4+1+1+1+1
10	2	5、※	4+1+2+1+2
12	2	5、※	4+1+4+1+2
14	2	5、※	4+1+6+1+2
16	2	5、14	4+1+8+1+2
18	2	5、14	4+1+8+1+4
20	2	5、14	4+1+8+1+6
22	2	5、14	4+1+8+1+8
24	2	5、14	4+1+8+1+10
26	2	5、14	4+1+8+1+12
28	2	5、14	4+1+8+1+14
30	2	5、14	4+1+8+1+16
32	3	4、13、30	3+1+8+1+16+1+2
34	3	4、13、30	3+1+8+1+16+1+4
36	3	4、13、30	3+1+8+1+16+1+6
38	3	4、13、30	3+1+8+1+16+1+8
⋮	⋮	⋮	⋮
56	3	4、13、30	3+1+8+1+16+1+26
58	3	4、13、30	3+1+8+1+16+1+28
60	3	4、13、30	3+1+8+1+16+1+30
62	3	4、13、30	3+1+8+1+16+1+32
64	4	7、20、45、※	6+1+12+1+24+1+16+1+2
66	4	7、20、45、※	6+1+12+1+24+1+18+1+2
68	4	7、20、45、※	6+1+12+1+24+1+20+1+2
70	4	7、20、45、※	6+1+12+1+24+1+22+1+2
⋮	⋮	⋮	⋮
184	4	7、20、45、96	6+1+12+1+24+1+48+1+90
186	4	7、20、45、96	6+1+12+1+24+1+48+1+92
188	4	7、20、45、96	6+1+12+1+24+1+48+1+94
190	4	7、20、45、96	6+1+12+1+24+1+48+1+96
192	5	6、19、44、95、190	5+1+12+1+24+1+48+1+96+1+2

(四)發現

1. 在〝一條金練〞中，切斷 n 個環(不包括首尾兩個)，則會有(n+1)個環節。
2. 在此研究中若〝一條金練〞已證實需切開 n 個環，會有兩種不同情況發生，所以就分成兩大部分來講。

〈1〉 第一類 ➔ n≡1(mod 2)

第 1 個環節我們必把它切為 n 個環。因為在 n 個切開的環中，最多可付 $\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 天，所以下一個我們所需要組成的環數為 (n + 1) ，則第 1 個環節我們切為 n 個, 這樣就可以組成 2~2n 這些環數的組合. 若第 1 個環節直接為 (n+1) 個環，再加上 n 個被切開的環，就不能被 2 整除了。

第 2 個環節我們必須切為 (2n+2)，因為前面 n 個環及第 1 個環節 n 個環已可組成 2~2n 這些環數的組合，故第 2 個環節必須為 (2n+2) 才可繼續組合下去。以此類推第 3 個環節為 (4n+4)，第四個環節為 (8n+8)……。

最後歸納出切環的方式為：

第 x 個環節	*第 x 個環節的環數*	*式子簡化 1*	*式子簡化 2*
x=1	n	n	n
x=2	n +n +2	2n+2	$2^1(n+1)$
. . .	. . .	. . .	. . .
x=n+1	n + n + 〔n+n+2〕+……+第 n 個環節的環節數+2	$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\cdots\times2}_{n\text{ 個}}\times(n+1)$	$2^n(n+1)$
備註：第(n+1)個環節的環數，在這裡用其最大值來計算。因為這樣可以使 k 值達到最大。			

〈2〉 第二類 ➔ n≡0 (mod 2)

第 1 個環節我們必把它切為 (n+2) 個環。因為有了 n 個切開的環，下一個我們所需要組成的環數為 (n+2)。第 2 個環節我們必須切為 (2n+4)，因為前面 n 個環及第 1 個環節 n 個環已可組成 2~(2n+2) 這些環數的組合，故第 2 個環節必須為(2n+4) 才可繼續組合下去。以此類推第 3 個環節為 (4n+8)，第四個環節為 (8n+16) ……。

最後歸納出切環的方式為：

第 x 個環節	*第 x 個環節的環數*	*式子簡化 1*	*式子簡化 2*
x=1	n+2	n+2	n+2
x=2	n + (n+2)+2	2n+4	$2^1(n+2)$
. . .	. . .	. . .	
x=n+1	n + (n+2)+〔n+(n+2)+2〕+……+第 n 個環節的環節數+2	$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\cdots\times2}_{n\text{ 個}}\times(n+1)$	$2^n(n+2)$
備註：第(n+1)個環節的環數，在這裡用其最大值來計算。因為這樣可以使 k 值達到最大。			

(五)尋找規律

在這裡有兩種不同情況發生，所以就分成兩大類來講。

1.第一類 ➔ n≡1 (mod 2)

〈1〉 允許切開 n 環，**項鍊最大環數為：**

$$n+n+2^{1}(n+1)+2^{2}(n+1)+......+2^{n-1}(n+1)+2^{n}(n+1)$$

$$= n+n+(n+1)(2^{1}+2^{2}+......+2^{n-1}+2^{n})$$

$$= n+n+(n+1)(2^{n+1}-2)$$

$$= (n+1)\times 2^{n+1}-2$$

由上式推導，我們可得一公式：允許切開 n 環，項鍊最大環數(k)為：

$(n+1)\times 2^{n+1}-2$ **環**

〈2〉 在一條有 $(n+1)\times 2^{n+1}-2$ 環的項鍊上，**切開 n 環各段環節的環數。**

請詳見(四)發現的表格

〈3〉 在一條有 $(n+1)\times 2^{n+1}-2$ 環的項鍊上，**切開 n 環，則被切開環的序號：**我們用上面的發現與規律，做了以下的歸納：

切開的第 y 個環	*切開的第 y 個環的序號*	*式子簡化*
y=1	$n+(0+1)$	$(n+1)(2^{1}-2)+n+1$
y=2	$n+2^{1}(n+1)+(1+1)$	$(n+1)(2^{2}-2)+n+2$
y=3	$n+2^{1}(n+1)+2^{2}(n+1)+(2+1)$	$(n+1)(2^{3}-2)+n+3$
. . .	. . .	. . .
y=n	$n+2^{1}(n+1)+2^{2}(n+1)+......+2^{n-1}(n+1)+[(n-1)+1]$	$(n+1)(2^{n}-2)+n+n$

由以上推導，我們可得一公式：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(n+1)(2^{y}-2)+n+y$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的鏈環均需切開。

2. 第二類 ➔ n≡0 (mod 2)

〈1〉 允許切開 n 環，項鍊最大環數為：

$$n+2^0(n+2)+2^1(n+2)+......+2^{n-1}(n+2)+2^n(n+2)$$

$$= n+(n+2)(2^0+2^1+......+2^{n-1}+2^n)$$

$$= n+(n+2)(2^{n+1}-1)$$

$$= (n+2)\times 2^{n+1}-2$$

由上式推導，我們可得一公式：允許切開 n 環，項鍊最大環數(k)為：$(n+2)\times 2^{n+1}-2$ 環

〈2〉 在一條有 $(n+2)\times 2^{n+1}-2$ 環的項鍊上，切開 n 環各段環節的環數。

請詳見(四)發現的表格

〈3〉 在一條有 $(n+2)\times 2^{n+1}-2$ 環的項鍊上，切開 n 環，則被切開環的序號：我們用上面的發現與規律，做了以下的歸納：

切開的第 y 個環	*切開的第 y 個環的序號*	*式子簡化*
y=1	$2^0(n+2)+(0+1)$	$(n+2)(2^1-1)+1$
y=2	$2^0(n+2)+2^1(n+2)+(1+1)$	$(n+2)(2^2-1)+2$
y=3	$2^0(n+2)+2^1(n+2)+2^2(n+2)+(2+1)$	$(n+2)(2^3-1)+3$
. . .	. . .	. . .
y=n	$2^0(n+2)+2^1(n+2)+......+2^{n-1}(n+2)+[(n-1)+1]$	$(n+2)(2^n-1)+n$

以上推導，我們可得一公式：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(n+2)(2^y-1)+y$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的環均需切開。

3. 二個分類比較

〈1〉 允許切開 n 環，項鍊最大環數為：

❶第一類 ➔ n≡1 (mod 2)：$(n+1)\times 2^{n+1}-2$ 環

❷第二類 ➔ n≡0 (mod 2)：$(n+2)\times 2^{n+1}-2$ 環

〈2〉 允許切開 n 環，在擁有項鍊最大環數的鍊子上，求各段環節的環數。

❶第一類 ➔ n≡1 (mod 2)：請詳見(四)發現的表格

❷第二類 ➔ n≡0 (mod 2)：請詳見(四)發現的表格

〈3〉 允許切開 n 環，在擁有項鍊最大環數的鍊子上，求被切開環的序號：

❶第一類 ➔ n≡1 (mod 2)：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(n+1)(2^y-2)+n+y$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的鏈環均需切開。

❷第二類 ➔ n≡0 (mod 2)：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(n+2)(2^y-1)+y$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的鏈環均需切開。

(六)驗證

在這裡有兩種不同情況發生，所以就分成兩大部分來講。

1. 第一類 ➔ n≡1 (mod 2)

在上述條件下若有一條〝一條金鍊〞須切開的最小環數為 3 個環，套入公式後，得到金練最大環數值應為 62，分法是為：3 個切掉的環 ＋ 一組 3 個環的環節(n) ＋ 一組 8 個環的環節 (2n+2) ＋ 一組 16 個環的環節 (4n+4) ＋ 一組 32 個環的環節 (8n+8) =62。

接著我們用 64 個環的項鍊來假設其最小切開環數為 3，以 512 如套用以上分法來分，得到：1, 1, 1, 3, 8, 16, 34，在拼湊過程中會少了 32 這個數，所以驗證 64 不合，證實我們導出來的公式是可行的。即超過 62 這個環數，切開的最少環數就會超過 3。

2. 第二類 ➔ n≡0 (mod 2)

在上述的條件若有一條〝一條金鍊〞須切開的最小環數為 4 個環，套入公式後，得到環數最大可以應用在 190 個環，分法是:4 個切掉的環 ＋ 一組 6 個環的環節 (n+2) ＋ 一組 12 個環的環節 (2n+4) ＋ 一組 24 個環的環節 (4n+8) ＋ 一組 48 個環的環節 (8n+16) ＋ 一組 96 個環的環節 (16n+32) =190。

接著我們用 192 來假設其最小切開環數為 4，以 192 如套用以上分法《註：即 (n+2) 、(2n+4) 、(4n+8)……》來分，得到：1, 1, 1, 1, 6, 12, 24, 48, 98，在拼湊過程中會少了 96 這個數，所以驗證 192 不合，證實我們導出來的公式是可行的。即超過 190 這個環數，切開的最少環數就會超過 4。

二、 *研究二：一條金鍊切環的問題：一天付三個環*

(一)玩法

把由 k (設 k 為 3 的倍數)個環所連結起來的鍊子，以切開最少的環數來組成 3、6、9………(k-6)、(k-3)、k 這些環數的組合。

(二)規則

同研究過程一(二)。

(三)實作

表格請見下一頁。

金鍊的環數	須切開最少的環數值	所切金環的序號 ※：隨機(最後一個被切開的環)	其中一種切環方式及切開後的環節與切開環之組合〈紅色表切開環〉 「註」：後面會說明為何要如此切環
3	0	0	3+0
6	1	3	2+1+3
9	1	3	2+1+6
12	2	2、11	1+1+6+1+3
15	2	2、11	1+1+6+1+6
18	2	2、11	1+1+6+1+9
21	2	2、11	1+1+6+1+12
24	3	7、20、※	6+1+12+1+3+1
27	3	7、20、※	6+1+12+1+6+1
30	3	7、20、※	6+1+12+1+9+1
33	3	7、20、※	6+1+12+1+12+1
⋮	⋮	⋮	⋮
87	3	7、20、45	6+1+12+1+24+1+42
90	3	7、20、45	6+1+12+1+24+1+45
93	3	7、20、45	6+1+12+1+24+1+48
96	4	7、20、45、94	5+1+12+1+24+1+48+1+3
99	4	7、20、45、94	5+1+12+1+24+1+48+1+6
102	4	7、20、45、94	5+1+12+1+24+1+48+1+9
⋮	⋮	⋮	⋮
183	4	7、20、45、94	5+1+12+1+24+1+48+1+90
186	4	7、20、45、94	5+1+12+1+24+1+48+1+93
189	4	7、20、45、94	5+1+12+1+24+1+48+1+96
192	5	7、20、45、94、191	4+1+12+1+24+1+48+1+96+1+3
195	5	7、20、45、94、191	4+1+12+1+24+1+48+1+96+1+6
⋮	⋮	⋮	⋮
372	5	7、20、45、94、191	4+1+12+1+24+1+48+1+96+1+183
375	5	7、20、45、94、191	4+1+12+1+24+1+48+1+96+1+186
378	5	7、20、45、94、191	4+1+12+1+24+1+48+1+96+1+189
381	5	7、20、45、94、191	4+1+12+1+24+1+48+1+96+1+192
384	6	10、29、56、129、274、※	9+1+18+1+36+1+72+1+144+1+96+1+3
387	6	10、29、56、129、274、※	9+1+18+1+36+1+72+1+144+1+99+1+3
390	6	10、29、56、129、274、※	9+1+18+1+36+1+72+1+144+1+102+1+3
393	6	10、29、56、129、274、※	9+1+18+1+36+1+72+1+144+1+105+1+3

(四)發現

1. 若〝一條金練〞已證實需切斷 n 個環.我們找到三種可能所以就分成三大部分來講

〈1〉 第一類 ➔ n≡1 (mod 3)

第 1 個環節我們必把它切為 (n+1) 個環。因為 n 個環再加 (n+1) 個環的環節可以被 3 整除。

如果第一個環節只有 2 個環就太浪費了，因為只能組成 3~(n+2) 這些環數的組合。第 2 個環節我們必須切為 (2n+4) ，因為前面 n 個環及第 1 個環節 (n+1) 個環已可組成 3~(2n+1) 這些環數的組合，故第 2 個環節必須為 (2n+4) 才可繼續組合下去。以此類推第 3 個環節為 (4n+8)，第四個環節為 (8n+16) ……。

最後歸納出切環的方式為：

第 x 個環節	*第 x 個環節的環數*	*式子簡化 1*	*式子簡化 2*
x=1	n+1	n+1	n+1
x=2	n +(n+1)+3	2n+4	$2^1(n+2)$
x=3	n + (n+1) + ﹝n +(n+1)+3﹞+3	4n+8	$2^2(n+2)$
⋮	⋮	⋮	⋮
x=n+1	n + (n+2) +﹝n +(n+2)+3﹞+……+第 n 個環節的環節數+3	$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\cdots\times2}_{(n-1)個}\times(n+2)$	$2^n(n+2)$
備註：第(n+1)個環節的環數，在這裡用其最大值來計算。因為這樣可以使 k 值達到最大。			

〈2〉 第二類 ➔ n≡2 (mod 3)

第 1 個環節我們必把它切為 (n-1) 個環。因為 n 個環再加 (n-1) 個環的環節可以被 3 整除。

如果第一個環節只有 1 個環就太浪費了，因為只能組成 3~(n+1) 這些環數的組合。 第 2 個環節我們必須切為 (2n+2) ， 因為前面 n 個環及第 1 個環節 (n-1) 個環已可組成 3~(2n-1) 這些環數的組合，故第 2 個環節必須為 (2n+2) 才可繼續組合下去。以此類推第 3 個環節為 (4n+4)，第四個環節為 (8n+8) ……。

最後歸納出切環的方式為：

第 x 個環節	*第 x 個環節的環數*	*式子簡化 1*	*式子簡化 2*
x=1	n-1	n-1	n-1
x=2	n +(n-1)+3	2n+2	$2^1(n+1)$
x=3	n+ (n-1)+(n +(n-1)+3) +3	4n+4	$2^2(n+1)$
⋮	⋮	⋮	⋮
x=n+1	n+ (n-1)+(n +(n-1)+3) +……+第 n 個環節的環節數+3	$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\cdots\times2}_{n 個}\times(n+1)$	$2^n(n+1)$
備註：第(n+1)個環節的環數，在這裡用其最大值來計算。因為這樣可以使 k 值達到最大。			

〈3〉 第三類 ➔ n≡0 (mod 3)

第 1 個環節我們必把它切為 (n+3) 個環。因為 n 個環已可組成 1~ n 這些環

數的組合，故第一個環節必為 (n+3) 個環才能繼續組合下去，且不會浪費。

如果第一個環節只有 3 個環就太浪費了，因為只能組成 3~(n+3) 這些環數的組合。若第一個環節必為 (n+3) 個環，則可以組合成 3~(2n+3) 這些環數的組合。第 2 個環節我們必須切為 (2n+6) ，因為前面 n 個環及第 1 個環節 (n+2) 個環已可組成 3~(2n+3) 這些環數的組合，故第 2 個環節必須為 (2n+6) 才可繼續組合下去。以此類推第 3 個環節為 (4n+12)，第四個環節為 (8n+24) ……。

最後歸納出切環的方式為：

第 x 個環節	*第 x 個環節的環數*	*式子簡化 1*	*式子簡化 2*
x=1	n+3	n+3	2^0n+3
x=2	n+(n+3)+3	2n+6	2^1(n+3)
x=3	n +3+(n+n+3+3)+n+3	4n+12	2^2(n+3)
. . .	. . .	. . .	. . .
x=n+1	n + (n+2)+ ﹝n+(n+2)+2﹞+…… +第 n 個環節的環節數+2	$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{\downarrow n\text{ 個}}\times(n+3)$	2^n(n+3)
備註：第(n+1)個環節的環數，在這裡用其最大值來計算。 因為這樣可以使 k 值達到最大。			

(五)尋找規律

在這裡有三種不同情況發生，所以就分成三大部分來講。

1. 第一類 ➔ n≡1 (mod 3)

〈1〉 允許切開 n 環，**項鍊最大環數為：**

$$n+(n+1)+2^1(n+2)+2^2(n+2)+2^3(n+2)+\ldots\ldots+2^n(n+2)$$
$$=2n+1+(2^{n+1}-2)(n+2)$$
$$=(n+2)\times2^{n+1}-3$$

由上式推導，我們可得一公式：允許切開 n 環，項鍊最大環數(k)為：

$(n+2)\times2^{n+1}-3$ **環**

〈2〉 在一條有 $(n+2)\times2^{n+1}-3$ 環的項鍊上，**切開 n 環各段環節的環數。**

請詳見(四)發現的表格

〈3〉 在一條有 $(n+2)\times2^{n+1}-3$ 環的項鍊上，**切開 n 環各段環節的環數。**

切開的第 y 個環	*切開的第 y 個環的序號*	*式子簡化*
y=1	$(n+1)+1=2^0(n+2)$	$2^0(n+2)$
y=2	$2^0(n+2)+2^1(n+2)+1$	(n+2)(2^2-1)+ 1
y=3	$2^0(n+2)+2^1(n+2)+2^2(n+2)+2$	(n+2)(2^3-1)+ 2
. . .	. . .	. . .
y=n	$2^0(n+2)+2^1(n+2)+\ldots\ldots+2^{n-1}(n+2)+(n-1)$	(n+2)(2^n-1)+ n-1

由以上推導，我們可得一公式：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(n+2)(2^y-1)+y-1$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的環均需切開。

2. 第二類 **n≡2 (mod 3)**

〈1〉 允許切開 n 環，**項鍊最大環數為：**

$$n+(n-1)+2^1(n+1)+2^2(n+1)+2^3(n+1)+\ldots\ldots+2^n(n+1)$$
$$=2n-1+(2^{n+1}-2)(n+1)$$
$$=(n+1)\times 2^{n+1}-3$$

由上式推導，我們可得一公式：允許切開 n 環，項鍊最大環數(k)為：
$(n+1)\times 2^{n+1}-3$ 環

〈2〉 在一條有 $(n+1)\times 2^{n+1}-3$ 環的項鍊上，**切開 n 環各段環節的環數。**

請詳見(四)發現的表格。

〈3〉 在一條有 $(n+1)\times 2^{n+1}-3$ 環的項鍊上，**切開 n 環各段環節的環數。**

切開的第 y 個環	*切開的第 y 個環的序號*	*式子簡化*
y=1	$(n-1)+(0+1)$	(n+1)(2^1 -1)+ (-1)
y=2	$(n-1)+2^1(n+1)+(1+1)$	(n+1)(2^2 -1)+ 0
y=3	$(n-1)+2^1(n+1)+2^2(n+1)+(2+1)$	(n+1)(2^3 -1)+ 1
. . .	. . .	. . .
y=n	$(n-1)+2^1(n+1)+\ldots\ldots+2^{n-1}(n+1)+[(n-1)+1]$	(n+1)(2^n -1)+ (n-2)

由以上推導，我們可得一公式：
切開的環為第 y 個時，環的序號為： $(n+1)(2^y-1)+(y-2)$
則這裡【$y=1$、2、3、……、n**】的環均需切開。**

3. 第三類 $n\equiv 0 \pmod 3$

〈1〉 允許切開 n 環，**項鍊最大環數為：**

$$n+2^0(n+3)+2^1(n+3)+2^2(n+3)+\ldots\ldots+2^n(n+3)$$
$$=(n+3)(2^0+2^1+\ldots\ldots+2^n)+n$$
$$=(n+3)(2^{n+1}-1)+n$$
$$=(n+3)\times 2^{n+1}-3$$

由上式推導，我們可得一公式：允許切開 n 環，項鍊最大環數(k)為：
$(n+3)\times 2^{n+1}-3$ 環

〈2〉 在一條有 $(n+3)\times 2^{n+1}-3$ 環的項鍊上，**切開 n 環各段環節的環數。**

請詳見(四)發現的表格。

〈3〉在一條有$(n+3)\times 2^{n+1}-3$環的項鍊上，切開 n 環各段環節的環數。

切開的第 y 個環	*切開的第 y 個環的序號*	*式子簡化*
y=1	$2^0(n+3)+(0+1)$	$(n+3)(2^1-1)+1$
y=2	$2^0(n+3)+2^1(n+3)+(1+1)$	$(n+3)(2^2-1)+2$
y=3	$2^0(n+3)+2^1(n+3)+2^2(n+3)+(2+1)$	$(n+3)(2^3-1)+3$
⋮	⋮	⋮
y=n	$2^0(n+3)+2^1(n+3)+......+2^{n-1}(n+3)+[(n-1)+1]$	$(n+3)(2^n-1)+n$

由以上推導，我們可得一公式：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(n+3)(2^y-1)+y$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的環均需切開。

4. 三個分類比較

〈1〉 允許切開 n 環，**項鍊最大環數**為：

❶第一類 ➔ n≡1 (mod 3)：$(n+2)\times 2^{n+1}-3$ 環

❷第二類 ➔ n≡2 (mod 3)：$(n+1)\times 2^{n+1}-3$ 環

❸第三類 ➔ n≡0 (mod 3)：$(n+3)\times 2^{n+1}-3$ 環

〈2〉 允許切開 n 環，在擁有**項鍊最大環數**的鍊子上，求各段環節的環數。

❶第一類 ➔ n≡1 (mod 3)：請詳見(四)發現的表格

❷第二類 ➔ n≡2 (mod 3)：請詳見(四)發現的表格

❸第三類 ➔ n≡0 (mod 3)：請詳見(四)發現的表格

〈3〉 允許切開 n 環，在擁有**項鍊最大環數**的鍊子上，**求被切開環的序號**：

❶第一類 ➔ n≡1 (mod 3)：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(n+2)(2^y-1)+(y-1)$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的環均需切開。

❷第二類 ➔ n≡2 (mod 3)：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(n+1)(2^y-1)+(y-2)$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的環均需切開。

❸第三類 ➔ n≡0 (mod 3)：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(n+3)(2^y-1)+y$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的環均需切開。

(六)驗證

在這裡有三種不同情況發生，所以就分成三大部分來講。

三、 研究三、一條金鍊的問題 ：一天付 m 個環

(一)玩法

把由 k 個環所連結起來的鍊子， k 為 m 的倍數，以切斷最少的環數來組成 m、2m、3m………(k-2m)、(k-m)、k 這些環數的組合。因為一天付 m 個環，所以付款的天數為 $\frac{k}{m}$ 天。

(二)規則

同研究過程一(二)。

(三)實作

金鍊的環數	須斷最少的環數值	所切金環的序號	其中兩種斷金環的方式及切斷後的環節與切斷環之組合〈紅色表切斷環〉「註」：後面會解說為何要如此斷環	切環的條件
m	0	0	m	無
2^1m = 2m	1	m	(m-1)+1+ m	m＞1
2^1m +m = 3m	1	m	(m-1)+1+2 m	m＞1
2^2m = 4m	2	(m-1)、3m	(m-2)+1+2m+1+m	m＞2
2^2m +m = 5m	2	(m-1)、3m	(m-2)+1+2m+1+2m	m＞2
2^2m +2m = 6m	2	(m-1)、3m	(m-2)+1+2m+1+3m	m＞2
2^2m +3m = 7m	2	(m-1)、3m	(m-2)+1+2m+1+4m	m＞2
2^3m = 8m	3	(m-2)、(3m-1)、7m	(m-3)+1+2m+1+4m +1+ m	m＞3
2^3m +m = 9m	3	(m-2)、(3m-1)、7m	(m-3)+1+2m+1+4m +1+ 2m	m＞3
2^3m +2m= 10m	3	(m-2)、(3m-1)、7m	(m-3)+1+2m+1+4m +1+ 3m	m＞3
2^3m +3m= 11m	3	(m-2)、(3m-1)、7m	(m-3)+1+2m+1+4m +1+ 4m	m＞3
2^3m +4m= 12m	3	(m-2)、(3m-1)、7m	(m-3)+1+2m+1+4m +1+ 5m	m＞3
2^3m +5m= 13m	3	(m-2)、(3m-1)、7m	(m-3)+1+2m+1+4m +1+ 6m	m＞3
2^3m +6m= 14m	3	(m-2)、(3m-1)、7m	(m-3)+1+2m+1+4m +1+ 7m	m＞3
2^3m +7m= 15m	3	(m-2)、(3m-1)、7m	(m-3)+1+2m+1+4m +1+ 8m	m＞3

$2^4 m$ = 16m	4	(m-3)、(3m-2)、(7m-1)、15m	(m-4)+1+2m+1+4m +1+ 8m+1+ m	m＞4
$2^4 m$+m = 17m	4	(m-3)、(3m-2)、(7m-1)、15m	(m-4)+1+2m+1+4m +1+ 8m+1+ 2m	m＞4
$2^4 m$+2m= 18m	4	(m-3)、(3m-2)、(7m-1)、15m	(m-4)+1+2m+1+4m +1+ 8m+1+ 3m	m＞4
$2^4 m$+3m= 19m	4	(m-3)、(3m-2)、(7m-1)、15m	(m-4)+1+2m+1+4m +1+ 8m+1+ 4m	m＞4
$2^4 m$+4m= 20m	4	(m-3)、(3m-2)、(7m-1)、15m	(m-4)+1+2m+1+4m +1+ 8m+1+ 5m	m＞4
$2^4 m$+5m= 21m	4	(m-3)、(3m-2)、(7m-1)、15m	(m-4)+1+2m+1+4m +1+ 8m+1+ 6m	m＞4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$2^5 m$+2m= 34m	5	(m-4)、(3m-3)、(7m-2)、(15m-1)、31m	(m-5)+1+2m+1+4m +1+ 8m+1+ 16m+1+ 3m	m＞5
⋮		⋮	⋮	⋮
$2^5 m$+28m = 60m	5	(m-4)、(3m-3)、(7m-2)、(15m-1)、31m	(m-5)+1+2m+1+4m +1+ 8m+1+ 16m+1+ 29m	m＞5
$2^5 m$+29m = 61m	5	(m-4)、(3m-3)、(7m-2)、(15m-1)、31m	(m-5)+1+2m+1+4m +1+ 8m+1+ 16m+1+ 30m	m＞5
$2^5 m$+30m = 62m	5	(m-4)、(3m-3)、(7m0-2)、(15m-1)、31m	(m-5)+1+2m+1+4m +1+ 8m+1+ 16m+1+ 31m	m＞5
$2^5 m$+31m = 63 m	5	(m-4)、(3m-3)、(7m-2)、(15m-1)、31m	(m-5)+1+2m+1+4m +1+ 8m+1+ 16m+1+ 32m	m＞5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2^m m	m	(2m+1)、(6m+2)、(14m+3)、⋯、〔$(2^m-2)m+m$〕	2m+1+4m+1+8m +⋯+1+ $2^{m-1}m$+1+ m	無
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$2^m m$+ (2^m-m) = (2^{m+1}-1)m	m	(2m+1)、(6m+2)、(14m+3)、⋯、〔$(2^m-2)m+m$〕	2m+1+4m+1+8m +⋯+1+ 2^mm	無
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(四)發現

1. 若〝*一條金鍊*〞已證實需切斷 n 個環，則會有兩種狀況發生。

我們使用下面這一個式子，來做一些探討。

$n \div m = a \ldots b \qquad (n = am + b)$

〈1〉 第一類 ➔ $n \equiv b \pmod m$ ($b \neq 0$ 時)

在這裡切 n 個環已可組成 1 ~ am 的組合，則第一個環節我們便切為 (am+m-b) 個環。其實第 1 個環只要是 (am+m) 就可以繼續組合下去了，但切 n 個時環還餘 b，所以原先的 (am+m) 還需減掉 b，才能和 n 個環組合成可以整除 m 的環節數，也就是 1~(2am+m) 這些環數的組合。如果 (am+m) 個環不減掉 b 而加上（m – b），則其與 n 個環相加時，可組合成 1~(2am+2m) 這些環數的組合，但其中不能組合成 (2am+2m) 這個環數的組合，故第一個環節不可能為 (2am+2m-b)。

第 2 個環節我們必須切為 (2am+2m)，因為前面 n 個環及第 1 個環節 (am+m-b) 個環已可組成 1~(2am+m) 這些環數的組合，故第 2 個環節必須為 (2am+2m) 才可繼續組合下去。以此類推第 3 個環節為 (4am+4m)，第四個環節為 (8am+8m) ……。

最後歸納出切環的方式為：

第 x 個環節	*第 x 個環節的環數*	*式子簡化 1*	*式子簡化 2*
x=1	am+m-b	am+m-b	(a+1)m-b
x=2	n + (am+m-b) +m	2m(a+1)	$2^1 m(a+1)$
x=3	n + (am+m-b)+〔n + (am+m-b) +m〕+m	4m(a+1)	$2^2 m(a+1)$
⋮	⋮	⋮	⋮
x=n+1	n + (am+m-b)+〔n + (am+m-b) +m〕+……+第 n 個環節的環節數+m	$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{n\text{ 個}}\times(a+1)$	$2^n m(a+1)$
備註：第(n+1)個環節的環數，在這裡用其最大值來計算。因為這樣可以使 k 值達到最大。			

〈2〉 第二類 ➔ $n \equiv 0 \pmod m$ ($b = 0$ 時)

在這裡切 n 個環已可組成 1 ~ n 的組合，則第一個環節我們便切為 (n+m) 個環。才可繼續組合下去。

第 2 個環節我們必須切為 (2n+2m)，因為前面 n 個環及第 1 個環節 (n+m) 個環已可組成 1~(2n+m) 這些環數的組合，故第 2 個環節必須為 (2n+2m) 才可繼續組合下去.以此類推第 3 個環節為 (4n+4m)，第四個環節為 (8n+8m) ……。

第 x 個環節	*第 x 個環節的環數*	*式子簡化 1*	*式子簡化 2*
x=1	n+m	n+m	$2^0(n+m)$
x=2	n + (n+m)+m	2n+2m	$2^1(n+m)$
x=3	n + (n+m)+ 〔n + (n+m)+m〕+m	4n+4m	$2^2(n+m)$
. . .	. . .	. . .	. . .
x=n+1	n + (n+m)+ 〔n + (n+m)+m〕+‧‧‧‧‧‧+第 n 個環節的環節數+m	$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\cdots\times2}_{n\text{ 個}}\times(n+m)$	$2^n(n+m)$
備註：第(n+1)個環節的環數，在這裡用其最大值來計算。因為這樣可以使 k 值達到最大。			

(五)尋找規律

雖然在「發現」的部分我們分成兩個部份來討論，但其實 b＝0 以及 b≠0 這兩個條件下討論的式子會是一樣的，只不過 b＝0 的部分我們做了簡化的過程。以下「尋找規律」就把他們合併在一起討論，因為餘數不一定為正整數有時也可為 0。

1. 允許切開 n 環，**項鍊最大環數為：**

$$n+[(a+1)m-b]+2^1m(a+1)+2^2m(a+1)+2^3m(n+3)+\ldots\ldots+2^{n-1}m(a+1)+2^nm(a+1)$$

$$=(am+b)+[(a+1)m-b]+2^1m(a+1)+2^2m(a+1)+2^3m(n+3)+\ldots\ldots+2^{n-1}m(a+1)+2^nm(a+1)$$

$$=(2am+m)+m(a+1)(2^1+2^2+\ldots\ldots+2^{n-1}+2^n)$$

$$=(2am+m)+m(a+1)(2^{n+1}-2)$$

$$=m[2^{n+1}(a+1)-1)]$$

由上式推導，我們可得一公式：允許切開 n 環，項鍊最大環數(k)為：
$m[2^{n+1}(a+1)-1)]$**環**

2. 在一條有 $m[2^{n+1}(a+1)-1)]$環的項鍊上，**切開 n 環各段環節的環數**。《註：注意它還有 n 個被切開的環》

第 1 段	第 2 段	‧‧‧‧‧‧	第 n 段	第(n+1)段
(a+1)m-b	$2^1m(a+1)$	‧‧‧‧‧‧	$2^2m(a+1)$	$2^n(n+m)$

3. 在一條有 $m[2^{n+1}(a+1)-1)]$ 環的項鍊上，切開 n 環，則被切開環的序號：我們用上面的發現與規律，做了以下的歸納：

切開的第 y 個環	*切開的第 y 個環的序號*	*式子簡化*
y=1	$(am+m-b)+(0+1)$	$(a+1)(2^1-1)m+1-b$
y=2	$(am+m-b)+2^1m(a+1)+(1+1)$	$(a+1)(2^2-1)m+2-b$
y=3	$(am+m-b)+2^1m(a+1)+2^2m(a+1)+(2+1)$	$(a+1)(2^3-1)m+3-b$
. . .	. . .	. . .
y=n	$(am+m-b)+2^1m(a+1)+......+2^{n-1}m(a+1)+[(n-1)+1]$	$(a+1)(2^n-1)m+n-b$

由以上推導，我們可得一公式：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(a+1)(2^y-1)m+y-b$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的環均需切開。

(六)驗證

1. 當 m 值及 n 值固定時，項鍊最大環數的公式驗證：

在 m = 4 時我們有做過推導，有一條〝一條金鍊〞須切開的最小環數為 5 個環。則套入公式後，得到金練最大環數值應為 508。

$m[2^{n+1}(a+1)-1)]$ = $4[2^{5+1}(1+1)-1)]$ = 508

分法為：5 個切掉的環 + 一組含 7 個環的環節 (n+2) + 一組含 16 個環的環節 (2n+6) + 一組含 32 個環的環節(4n+12) + 一組含 64 個環的環節(8n+24) + 一組含 128 個環的環節 (16n+48) + 一組含 256 個環的環節 (32n+96) = 508。

接著我們用 512 來假設其最小切開環數為 5，以 512 如套用以上分法《即(n+2)、(2n+6)、(4n+12)……》來分，得到：1, 1, 1, 1, 1, 7,16, 32, 64, 128, 260 在拼湊過程中會少了 256 這個環數的組合，所以驗證 512 不合。即超過 508 這個環數，切開的最少環數就會超過 5。

2. 當 m 值及 n 值固定，且 k 值為最大時，切開 n 環各段環節的環數的公式驗證：

在 m = 4 時，有一條〝一條金鍊〞須切開的最小環數為 5 個環。

利用第一項的證明，我們知道這時 k 值最大為 508。

開始套入公式(見下表)。

第 1 段	第 2 段	……	第 n 段	第(n+1)段
(a+1)m-b	$2^1m(a+1)$	……	$2^{n-1}m(a+1)$	$2^n(n+m)$

↓

第 1 段	第 2 段	第 3 段	第 4 段	第 5 段	第 6 段
(1+1)X4 - 1	$2^1\times4\times(1+1)$	$2^2\times4\times(1+1)$	$2^3\times4\times(1+1)$	$2^4\times4\times(1+1)$	$2^5\times4\times(1+1)$

↓

第 1 段	第 2 段	第 3 段	第 4 段	第 5 段	第 6 段
7	16	32	64	128	256

各環節的環數用公式倒出來後，我們做了一些證明，數據完全相符，證實我們導出來的公式是可行的。

且將這些環節的環數加起來剛好會等於 508，也就是 k 值最大的時候。

3. 當 m 值及 n 值固定，且 k 值為最大時，**被切開環的序號**的公式驗證：

在 m = 4 時，有一條〝*一條金鍊*〞須切開的最小環數為 5 個環。

利用第一項證明，我們知道這時 k 值最大為 508。

開始套入公式(見下表)。

切開的第 y 個環	*切開的第 y 個環的序號*
y=1	$(n+3)(2^1-2)+n+3$
y=2	$(n+3)(2^2-2)+n+4$
y=3	$(n+3)(2^3-2)+n+5$
. . .	. . .
y=n	$(n+3)(2^n-2)+n+(n+2)$

↓

切開的第 y 個環	*切開的第 y 個環的序號*
y=1	$(5+3)(2^1-2)+5+3$
y=2	$(5+3)(2^2-2)+5+4$
y=3	$(5+3)(2^3-2)+5+5$
y=4	$(5+3)(2^4-2)+5+6$
y=5	$(5+3)(2^5-2)+5+(5+2)$

↓

切開的第 y 個環	*切開的第 y 個環的序號*
y=1	8
y=2	25
y=3	58
y=4	123
y=5	252

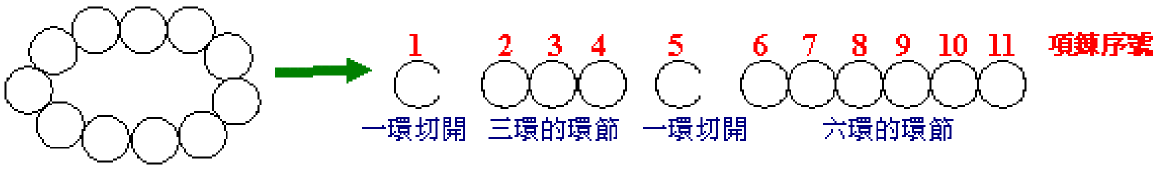
各環節的環數在公式導出來後，經驗證我們導出來的公式是可行的。

四、 *研究四：一圈金鍊的問題：一天付一個環*

(一)玩法

把由 k 個環所連結成一圈的鍊子，切開最少的環數來組成 1、2、3………k-2、k-1、k 這些組合。

例：今有一條 11 個環連結起來的鍊子，欲切開最少的環來組成 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11 這些組合，請問該如何下手？

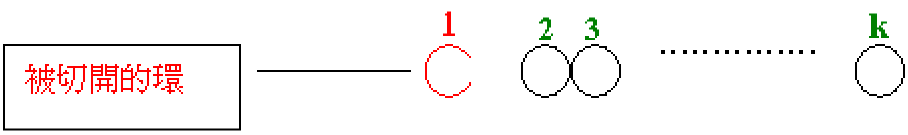


答：先將任意一個環切開，再將得到的一個含有 10 個環的新環節，切開此環節的第四個環。最後總共得到 2 個環及 2 個環節。如何組成 1~11 的環數的組合，如下表：

環數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
切開的環與環節組合	1	1+1	3	1+3	1+1+3	6	1+6	1+1+6	3+6	1+3+6	1+1+3+6

(二)規則

1. 切開一個環的定義：將欲切開的環解開來，成為一個獨立的環。
2. 在本報告中，切環的方式一律從前面開始切起(從序號小的開始)。
3. 環節的定義：在本報告裡所指的〝環節〞，為鍊子經切開後，那些未被切開的環——即〝切開環〞獨立出來後，所新形成的連結環。
4. 當〝*一圈金鍊*〞第一個被切開的環，我們定義其序號為 1，其它剩下的則依序由 2 開始編號。



(三)實作

金鍊的環數	須切最少的環數值	所切金環的序號	切環方式及切開後的環節與切開環之組合〈紅色表切開環〉「註」：後面會解說為何要如此切環
3	1	1	1+2
4	2	1、3	1+1+1+1
5	2	1、4	1+2+1+1
6	2	1、5	1+3+1+1
7	2	1、5	1+3+1+2
8	2	1、5	1+3+1+3
9	2	1、5	1+3+1+4
10	2	1、5	1+3+1+5
11	2	1、5	1+3+1+6

12	3	1、6、11	1+4+1+4+1+1
13	3	1、6、12	1+4+1+5+1+1
14	3	1、6、13	1+4+1+6+1+1
15	3	1、6、14	1+4+1+7+1+1
16	3	1、6、15	1+4+1+8+1+1
17	3	1、6、15	1+4+1+8+1+2
18	3	1、6、15	1+4+1+8+1+3
19	3	1、6、15	1+4+1+8+1+4
20	3	1、6、15	1+4+1+8+1+5
21	3	1、6、15	1+4+1+8+1+6
22	3	1、6、15	1+4+1+8+1+7
23	3	1、6、15	1+4+1+8+1+8
24	3	1、6、15	1+4+1+8+1+9
25	3	1、6、15	1+4+1+8+1+10
26	3	1、6、15	1+4+1+8+1+11
27	3	1、6、15	1+4+1+8+1+12
28	3	1、6、15	1+4+1+8+1+13
29	3	1、6、15	1+4+1+8+1+14
30	3	1、6、15	1+4+1+8+1+15
31	3	1、6、15	1+4+1+8+1+16
32	4	1、7、18、31	1+5+1+10+1+12+1+1

(四)發現

1. 在〝*一圈金鍊*〞中，切開 n 個環，但序號為 2 及最後一個的環不可切開，則會有 n 個環節。

2. 若〝*一圈金鍊*〞已證實需切開 n 個環，則第 1 個環可任意切，因為不論切哪一個環其意義都一樣。接下來，第 1 個環節我們必須把它切為含有（n+1）個環的環節，因為切下 n 個環代表已可組成 1、2、……n 這些環數的組合，所以若要繼續組合下去，則第 1 個環節必須要有（n+1）個環，如此才可使 k 值最後達到最大。第 2 個環節我們必須切為（2n+2）的環，因為前面 n 個環及第 1 個環節（n+1）個環已可組成 1、2、……(2n+1)這些環數的組合，故第 2 個環節必須為（2n+2）個環才可繼續組合下去。以此類推第 3 個環節為（4n+4）個環，第 4 個環節為（8n+8）個環……。

總結以上發現，所以在研究五裡，若此鍊已證實須切開 n 個環，則歸納出切環的方式為：

第 x 個環節	*第 x 個環節的環數*	*式子簡化 1*	*式子簡化 2*
x=1	n+1	n+1	$2^0(n+1)$
x=2	n + (n+1)+1	2n+2	$2^1(n+1)$
x=3	n + (n+1)+ 〔n+(n+1)+1〕+1	4n+4	$2^2(n+1)$
. . .	. . .	. . .	. . .
x=n	n + (n+1)+ 〔n+(n+1)+1〕+……+第(n-1)個環節的環節數+1	$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\cdots\times2}_{(n-1)個}\times(n+1)$	$2^{n-1}(n+1)$
備註：第 n 個環節的環數，在這裡用其最大值來計算。因為這樣可以使 k 值達到最大。			

(五)尋找規律

總結以上發現，歸納出一些可行的公式為：

1. 若允許切開 n 環，**項鍊最大環數為**：

$$
\begin{aligned}
& n+2^0(n+1)+2^1(n+1)+......+2^{n-2}(n+1)+2^{n-1}(n+1) \\
= \ & n+(n+1)(2^0+2^1+......+2^{n-2}+2^{n-1}) \\
= \ & n+(n+1)(2^n-1) \\
= \ & (n+1)\times 2^n-1
\end{aligned}
$$

2. 在〝*一圈*〞有 $(n+1)\times 2^n-1$ 環的項鍊上，**切開 n 環各段環節的環數。**

第 1 段	第 2 段	……	第(n-1)段	第 n 段
$2^0(n+1)$	$2^1(n+1)$	……	$2^{n-2}(n+1)$	$2^{n-1}(n+1)$

3. 在一條有 $m(2^{n+1}-1)$ 環的項鍊上，切開 n 環，**則被切開環的序號**：我們用上面的發現與規律，做了以下的歸納：

切開的第 y 個環	*切開的第 y 個環的序號*	*式子簡化*
y=1	$2^0(n+1)+(0+1)$	$(n+1)(2^1-1)+1$
y=2	$2^0(n+1)+2^1(n+1)+(1+1)$	$(n+1)(2^2-1)+2$
y=3	$2^0(n+1)+2^1(n+1)+2^2(n+1)+(2+1)$	$(n+1)(2^3-1)+3$
. . .	. . .	. . .
y=n	$2^0(n+1)+2^1(n+1)+2^2(n+1)+......+2^{n-2}(n+1)+[(n-2)+1]$	$(n+1)(2^n-1)+n$

由以上推導，我們可得一公式：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(n+1)(2^y-1)+y$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的環均需切開。

(六)驗證

若有一條〝一圈項鍊〞須切開的最小環數為 4 個環，套入公式後，得到金練最大環數值應為 79，分法為：4 個切掉的環 ＋ 一組 5 個環的環節(n+1) ＋ 一組 10(2n+2)個環的環節 ＋ 一組 20 個環的環節 (4n+4) ＋一組 40 個環的環節 (8n+8) = 79

接著我們用 80 來假設其最小切開環數為 4，以 80 如套用以上分法《即 n、(n+1)、(2n+2)……》來分，80 可分成 1, 1, 1, 1, 5, 10, 20, 41，在拼湊上少了 40 這個數，所以驗證 80 不合，證實我們導出來的公式是可行的。即超過 79 這個環數，切開的最少環數就不可能為是 4。

柒、 討論

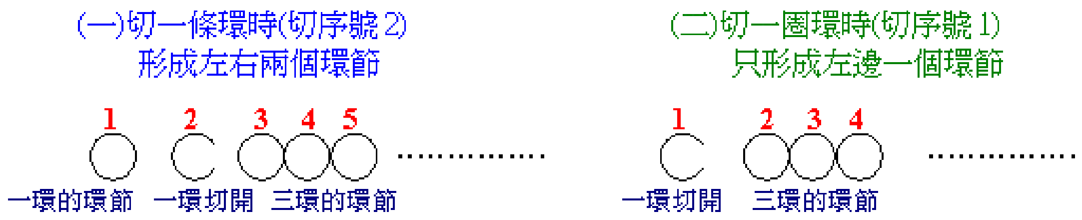
一、 〝一條金鍊〞與 〝一圈金鍊〞切環的差異

我們由一開始的實作發現無論是〝一條金鍊〞或是 〝一圈金鍊〞切環的規律若為切 n 個環，第一個環節的環數就會是原本可以組成的環數再多 m 個、第二個環節的環數為第一個環節的環數加上 n 個環在加 m ………，以下以此類推。

這兩個研究有差異的部份，就在於一條金鍊切 n 個環，可得到 (n+1) 個環節；一圈金鍊切 n 個環，可得到 n 個環節。為什麼會這樣呢？因為切〝一圈環〞第一刀切下去的必為序號 1 的環(規定的)，所以只有它的右邊會形成一個環節。 (註：在不切序號 2 及序號最後 1 號的情況下)

而〝一條環〞，切一刀下去(註：在不切序號 1 及序號最後 1 號的情況下)，在此環的左右兩邊各會形成一個環節，即形成兩個環節。由上可推論切〝一圈環〞時自然會比切 〝一條環〞時少了一個環節！

例：



捌、 結論

一、 關於〝一條金鍊〞一天付 m 環的式子推導結果

從每天付 1 個環開始作測試，慢慢的推導，終於我們推出了有關每天切 m 個環的一些公式，以下就這個部分做一個總整理。

我們使用下面這一個式子，來做一些探討。

$$n \div m = a \ldots b \qquad (n = am + b)$$

(一)允許切開 n 環，對於**項鍊最大環數**我們做了以下的歸納：

1. 允許切開 n 環，**項鍊最大環數為**：$m[2^{n+1}(a+1)-1)]$環。

這是從研究三推論出來的結果，欲知詳細推論過程請見研究三的(五)。

2. 允許切開 n 環，項鍊最大環數為：$[n+(m-b)]\times 2^{n+1}-m$ 環。

我們將每個研究中做過〝項鍊最大環數〞實作紀錄歸納的結果，逐一放上來比較……

❶ m = 1

n≡0 (mod 1)：最大環數為 $(n+1)\times 2^{n+1}-1$ 環

❷ m = 2

第一類 ➔ n≡1 (mod 2)：最大環數為 $(n+1)\times 2^{n+1}-2$ 環

第二類 ➔ n≡0 (mod 2)：最大環數為 $(n+2)\times 2^{n+1}-2$ 環

❸ m = 3

第一類 ➔ n≡1 (mod 3)：最大環數為 $(n+2)\times 2^{n+1}-3$ 環

第二類 ➔ n≡2 (mod 3)：最大環數為 $(n+1)\times 2^{n+1}-3$ 環

第三類 ➔ n≡0 (mod 3)：最大環數為 $(n+3)\times 2^{n+1}-3$ 環

❹ m = 4

第一類 ➔ n≡1 (mod 4)：最大環數為 $(n+3)\times 2^{n+1}-4$ 環

第二類 ➔ n≡2 (mod 4)：最大環數為 $(n+2)\times 2^{n+1}-4$ 環

第三類 ➔ n≡3 (mod 4)：最大環數為 $(n+1)\times 2^{n+1}-4$ 環

第四類 ➔ n≡0 (mod 4)：最大環數為 $(n+4)\times 2^{n+1}-4$ 環

經過上面的列表，發現這些數字都是有規律的。而那個規律正是 $[n+(m-b)]\times 2^{n+1}-m$。即允許切開 n 環，項鍊最大環數為：$[n+(m-b)]\times 2^{n+1}-m$ 環。

將得到的新結果做了驗算之後發現真的可行，雖然和上一個公式的運算過程不太一樣，但是得到的結果卻會是一樣的。

(二)在一條有 $m[2^{n+1}(a+1)-1)]$ 環的項鍊上，**切開 n 環各段環節的環數**。《註：注意它還有 n 個被切開的環》

第 1 段	第 2 段	……	第 n 段	第(n+1)段
(a+1)m-b	$2^1 m(a+1)$	……	$2^{n-1} m(a+1)$	$2^n m(a+1)$

(三)有 $m[2^{n+1}(a+1)-1)]$ 環的項鍊上，切開 n 環，**則切開的環為第 y 個時，環的序號為**：$(a+1)(2^y-1)\mathrm{m}+y-b$

這裡【y = 1、2、3、……、n】的環均需切開。

二、 關於〝一圈金鍊〞一天付 m 環的式子推導結果

雖然上面有關於〝一圈金鍊〞的研究我們只推出了一天付一個環的情形，但是

由於〝一圈金鍊〞的切環方式與〝一條金鍊〞十分相似，所以我們直接由〝一條金鍊〞切 m 個環的研究，推出了有關〝一圈金鍊〞每天切 m 個環的一些公式。我們利用討論裡面的方法(詳見討論第一項)，扣除〝一條金鍊〞多的那最後一個環節的環數，就得到一圈金鍊的最大環數公式，進而推出以下所有的公式。

我們使用下面這一個式子，來做一些探討。

$$n \div m = a \ldots b \qquad (n = am + b)$$

(一)允許切開 n 環，對於**項鍊最大環數我們做了以下的歸納：**

1. 允許切開 n 環，**項鍊最大環數為：**$m[2^n(a+1)-1)]$環。

$$\begin{aligned}
& n+[(a+1)m-b]+2^1m(a+1)+2^2m(a+1)+2^3m(n+3)+\ldots\ldots+2^{n-1}m(a+1) \\
= \; & (am+b)+[(a+1)m-b]+2^1m(a+1)+2^2m(a+1)+2^3m(n+3)+\ldots\ldots+2^{n-1}m(a+1) \\
= \; & (2am+m)+m(a+1)(2^1+2^2+\ldots\ldots+2^{n-1}+2^{n-1}) \\
= \; & (2am+m)+m(a+1)(2^n-2) \\
= \; & m[2^n(a+1)-1)]
\end{aligned}$$

2. 允許切開 n 環，**項鍊最大環數為：**$[n+(m-b)]\times 2^n - m$環。

我們利用討論裡面的方法(詳見討論第一項)，扣除〝一條金鍊〞多的那最後一個環節的環數，再配合〝一條金鍊〞中項鍊最大環數的歸納方式 2。在這個項目裡運用歸納的方法得到了$[n+(m-b)]\times 2^n - m$這個在〝一圈金鍊〞中找項鍊最大環數的規律。

因為在〝一條金鍊〞的結論中，對於最大環數歸納第 2 種方法中，最大環數為：$[n+(m-b)]\times 2^{n+1} - m$環。

而若為〝一圈金鍊〞，應該將上述的式子減掉第(n+1)環節的環數，則答案就會是〝一圈金鍊〞切 n 個環時，項鍊最大的環數了。經過紙上許多的實作後，我們確定那個推導出來的式子就是——〝一圈金鍊〞切 n 個環時，**項鍊最大環數為**

$[n+(m-b)]\times 2^n - m$**環**。

最後多次用數字代入這個式子中，發現雖然和上一個算法的運算過程不太一樣，但是得到的結果卻會是一樣的，答案都是正確的。

(二)在一圈有$m[2^n(a+1)-1)]$環的項鍊上，**切開 n 環各段環節的環數**。

第 1 段	第 2 段	……	第(n-1)段	第 n 段
(a+1)m-b	$2^1m(a+1)$	……	$2^{n-2}m(a+1)$	$2^{n-1}(a+1)$

(三)在一圈有$m[2^n(a+1)-1)]$環的項鍊上，切開 n 環，則**被切開環的序號**：我們用上面的發現與規律，做了以下的歸納：

切開的第 y 個環	切開的第 y 個環的序號	式子簡化
y=1	1	1
y=2	$(\mathrm{am}+\mathrm{m}-\mathrm{b})+(1+1)$	$(a+1)(2^1-1)m+2-b$
y=3	$(\mathrm{am}+\mathrm{m}-\mathrm{b})+2^1 m(a+1)+(2+1)$	$(a+1)(2^2-1)m+3-b$
⋮	⋮	⋮
y=n	$(\mathrm{am}+\mathrm{m}-\mathrm{b})+2^1 m(a+1)+\ldots\ldots+2^{n-2}m(a+1)+[(\mathrm{n}-1)+1]$	$(a+1)(2^{n-1}-1)\mathrm{m}+n-b$

由以上推導，我們可得一公式：

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(a+1)(2^{y-1}-1)\mathrm{m}+y-b$

則這裡【y = 2、3、……、n】的環均需切開。

y =1 時，切的序號必為第 1 個，因為一圈環的玩法中有規定：第一個被切開的環，我們定義其序號為 1，其它剩下的則依序由 2 開始編號。

故 y =1 時不能套用上面的算式，而是必為 1。

玖、 參考資料及其他

一、 資料來源

【書中的一篇文章】

葛登能(Martin Gardner) 著(民 90)。啊哈！有趣的推理 1---**斷掉的手鍊**（77-80 頁)。天下出版社

吳振奎、吳旻（民 91)。名人趣題妙解---**五十三、米勒斷掉的手鍊**（254-258 頁)。九章出版社

【網站】

www.21maths.com

二、 文獻探討

因為網路及書本上對於一條金鍊一天付一個環的題目，大多有所解答，故我們把這個範圍列入參考文獻中。

下面是我們從對於書籍及網路上〝一條金鍊一天付一個環〞有關的資料，我們的研究有用這裡的一些想法來進行推導。

(一)在一條金鍊中，切開 n 個環，若首尾環不可切，則會有(n+1)個環節。

(二)若一條金鍊已證實需切開 n 個環，則第 1 個環節須把它切為含有（n+1）個環的環節。因為切下 n 個環代表已可組成 1、2、……n 這些環數的組合，所以第 1 個環節的環數需要比切開的環數再多一個，才能在所切環數最少的情況下繼續組合下去，並可使 k 值最後能達到最大。第 2 個環節須切為含有（2n+2）環數的環節，因為前面 n 個環及第 1 個環節（n+1）個環已可組成 1、2、……(2n+1)這些環數的組合，故第 2 個環節必須為（2n+2）個環才可繼續組合下去。以此類推第 3 個環節為（4n+4）個環，第 4 個環節為（8n+8）個環……。

(三)允許切開 n 環，**項鍊最大環數**〈按例中付款方式最多可付天數〉為：

$(n+1)\times 2^{n+1}-1$ **環**

(四)在一條有 $(n+1)\times 2^{n+1}-1$ 環的項鍊上，**切開 n 環各段環節的環數**。《註：注意它還有 n 個被切開的環》

切開的環為第 y 個時，環的序號為：$(\mathrm{n}+1)(2^{\mathrm{y}}-1)+\mathrm{y}$

則這裡【y = 1、2、3、……、n】的鏈環均需切開。

三、未來展望

此次我們所探討的為一條金鍊及一圈金鍊在每天付 m 個環的情形下，若切開 n 個環，則其鍊的最大環數可為多少，以及付環的方式。以上研究歸納的皆為一個維度的情形，經過我們跟老師不斷的討論之後，希望能將這個主題延伸擴充到二個維度：平面上像是：若又沒有帶錢，但是剛好帶了一件金縷衣，想以其做為房租，又該如何將它拆解較為省時省力呢？以上的情形，讓研究的範圍更加廣泛。

金縷衣的圖片如下：金縷衣以玉製成，並以銅線縫補，不僅組裝費時，拆解當然也費時，故可以成為我們下一個研究的主題。

(圖片摘自：**www.ttvs.cy.edu.tw/ kcc/88stone/stone1.htm**)

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國中組 數學科

佳作

030422

生死一環間--斷金鍊的問題研究

臺北市立北投國民中學

評語：

研究主題具趣味性，探究內容層次分明，說理清晰，惟若能在難度與廣度上更進一步地提昇，將更具價值。