

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

第二名

030413

耍「薛骰」—— Sicherman Dice 的探討

新竹市立建功高級中學

作者姓名：

國二 陳皓嫻

指導老師：

莊朝淵 吳昌儒

作品名稱 要「薛骰^{サイコロ}」--- Sicherman Dice 的探討

摘要

Sicherman Dice 就是一對點數配置與正常骰子 (6 面正立方體，點數為 1 到 6) 不同的骰子，它所拋擲出的每一種不同點數和 (2,3,4...,12) 的機率恰好與一對正常的骰子相同。這種骰子是美國的 Col. George Sicherman 所發現的。Sicherman 更進一步指出：在不使用 *Sicherman Dice* 的情形下，不可能找到一組大於或等於三顆的非正常骰子，它們拋擲出的每一種不同點數和的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同。

本研究的目標在於

1. 尋求計算「*Sicherman Dice* 的組合和正常的骰子有相同的出現機率」的方法
2. 證明 Sicherman 結論的真偽及是否適用於其他正多面體 (4 面 / 8 面 / 12 面 / 20 面) 的標準骰子
3. *Sicherman Dice* (Crazy Dice) 的延伸探討
 - (1) 不同面數骰子的組合，是否可以找到面數組合相同，但點數配置不同的 Crazy Dice (如 4 面與 6 面的標準骰子組合，找到 4 面與 6 面的 Crazy Dice)
 - (2) 多個面數相同或不同骰子的組合，是否可以找到面數、個數及點數配置皆不同的 Crazy Dice (如 3 個 4 面標準骰子組合，找到 2 個 8 面的 Crazy Dice)

同時我們也和 Col. George Sicherman 取得聯繫，討論當年他發現 *Sicherman Dice* 的經過及其結論的限制條件，作為本研究未來發展的參考。

壹、研究動機

在一個偶然的機會中，接觸到一篇名為「骰子漫談」的文章。其中提到一種名為 *Sicherman Dice* 的骰子：就是一對點數配置與正常骰子(6面正立方體，點數為1到6)不同的骰子，它所拋擲出的每一種不同點數和(2,3,4...,12)的機率恰好與一對正常的骰子相同。之後蒐尋相關的書籍及文章，得知這種骰子是美國的 *Col. George Sicherman* 所發現的。*Sicherman* 更進一步指出：在不使用 *Sicherman Dice* 的情形下，不可能找到 1 組大於或等於 3 顆的非正常骰子，它們拋擲出的每一種不同點數和的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同。換句話說，*Sicherman* 所發現的這一對組合，是唯一的解。

這引發了我相當大的興趣，一方面覺得這種骰子真是太神奇了，另一方面也懷疑 *Sicherman* 的說法：數字的排列組合這麼多，難道真的找不出第 3 組 *Sicherman Dice*？如果可以找到其他的組合，如何證明所找到的組合和正常的骰子有相同的出現機率？*Sicherman Dice* 的組合與現象，會出現在其他正多面體(4面/8面/12面/20面)的骰子嗎？這些疑問讓我決定對 *Sicherman Dice* 做個較深入的研究。在研究與計算的過程中，我發現常會使用乘法公式與因式分解(國中數學第四冊)與一次聯立方程式(國中數學第三冊)的原理，也讓我對這個研究主題有了似曾相識的感覺。

貳、研究目的

一、 尋求計算「*Sicherman Dice*的組合和正常的骰子有相同的出現機率」的方法

二、 證明*Sicherman* 結論的真偽

(一) 即證明*Sicherman* 所述「在不使用*Sicherman Dice*的情形下，不可能找到 1 組大於或等於 3 顆的非正常骰子，它們拋擲出的每一種不同點數和的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同」的真偽

(二) 證明(一)中的敘述，是否適用於其他正多面體(4面/8面/12面/20面)的標準骰子

三、 *Sicherman Dice* 的延伸探討

(一) 不同面數骰子的組合，是否可以找到面數組合相同，但點數配置不同的 Crazy Dice [註一]

1. 4面與6面的標準骰子組合，找到4面與6面的 Crazy Dice
2. 6面與8面的標準骰子組合，找到6面與8面的 Crazy Dice
3. 4面與8面的標準骰子組合，找到4面與8面的 Crazy Dice
4. 4面、6面與8面的標準骰子組合，找到4面、6面與8面的 Crazy Dice

(二) 多個面數相同或不同骰子的組合，是否可以找到面數、個數及點數配置皆不同的 Crazy Dice

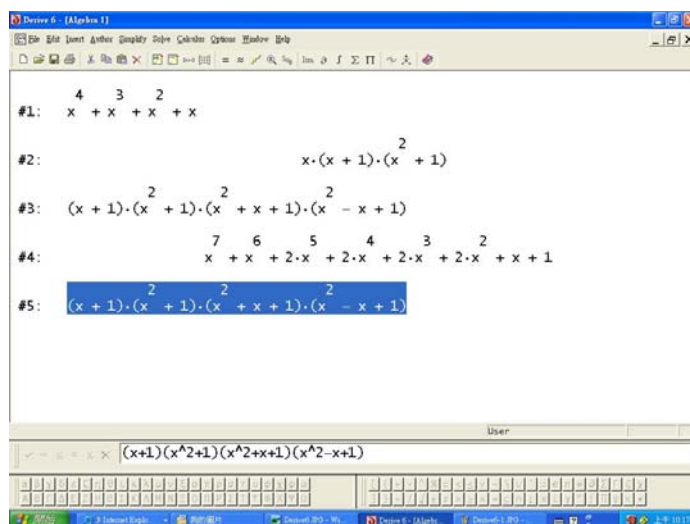
1. 3個4面的標準骰子組合，找到2個8面的 Crazy Dice
2. 4面與12面的標準骰子組合，找到6面與8面的 Crazy Dice
3. 6面與8面的標準骰子組合，找到4面與12面的 Crazy Dice

[註一]在各種參考文獻中，*Sicherman Dice* 只出現在6面標準骰子的討論中。在本報告中，*Sicherman Dice* 泛指可以取代數個正多面體標準骰子組合的同個數、同面數的非標準骰子。其他各種不同組合所產生的非標準骰子，則用 Crazy Dice 代表，以有所區別。同時，不考慮骰子任一面點數為0或負數的情形。

參、研究設備及器材

- 一、個人電腦
- 二、微軟 (Microsoft) Excel 軟體
- 三、德州儀器 (Texas Instruments) Derive 6 軟體

利用 Derive 6 軟體進行多項式的因式分解，及多個多項式的乘積與展開。



圖一 Derive 6 可以作多項式的因式分解 (#1,#2)
及多項式的展開 (#3,#4)

肆、研究過程或方法

一、背景說明

(一) Sicherman Dice 的發現

一般標準的正常骰子(正 6 面體)，其點數是由 1 至 6 點所組成。兩顆正常的骰子所擲出點數和如表一所示。而 Sicherman 所發現的 *Sicherman Dice*，其點數分別為 (1, 2, 2, 3, 3, 4) 及 (1, 3, 4, 5, 6, 8)，2 顆 *Sicherman Dice* 所擲出點數和如表二所示。經過比對後可以發現，表一和表二各點數和出現的次數是一樣的。

表一 兩顆正常的骰子所擲出點數和

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

表二 兩顆 Sicherman Dice 所擲出點數和

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

(二) 生成函數(Generating Function)

在許多參考文獻中，一個標準的6面骰子，可以用生成函數 $f(x)$ 來表示

$$f(x) = (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) \quad (1)$$

其中 x 的次方項係數，表示此一點數出現的次數。如

cx^b 表示 b 點出現 c 次。

因此，2個標準的六面骰子所擲出的點數和，則可以以兩個(1)式相乘來表示

$$\begin{aligned} (f(x))^2 &= (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)^2 \\ &= (x^{12} + 2x^{11} + 3x^{10} + 4x^9 + 5x^8 + 6x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2) \end{aligned} \quad (2)$$

比對表一、表二及(2)式，發現可以利用多項式相乘及指數相加的特性來描述投擲骰子所出現點數和的情形。

(三) 生成函數的條件

由(二)中生成函數的討論可以得知，如果 $g(x)$ 和 $h(x)$ 分別代表 Sicherman 所發現的兩個6面非正常骰子，則 $g(x)$ 和 $h(x)$ 相乘必然等於(2)式。

$$(f(x))^2 = g(x)h(x)$$

再利用 Derive 6 對 $f(x)$ 做因式分解，可以得到

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \\ g(x)h(x) &= x^2(x+1)^2(x^2 - x + 1)^2(x^2 + x + 1)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

在求 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的過程中，有兩個重要的條件，必須提出討論：

1. 由於 $g(x)$ 和 $h(x)$ 中出現的最小點數必為1，所以 $g(x)$ 和 $h(x)$ 中各僅有一個 x 項。否則其中便會出現點數為0的情形
2. 由標準六面骰子的生成函數 $f(x)$ 可知， $f(1) = 6$ 。即 $f(1)$ 代表骰子的面數

所以 $g(1) = h(1) = 6$ 且 $g(1)h(1) = 2^2 \times 3^2$ 。其中2是由 $(x+1)$ 所產生，3則是由 $x^2 + x + 1$ 所產生。因此 $g(x)$ 和 $h(x)$ 中僅各有一個 $(x+1)$ 及 $(x^2 + x + 1)$ 項。對照(3)式， $g(x)$ 和 $h(x)$ 各分得一個 x , $(x+1)$ 及 $(x^2 + x + 1)$ 項，僅剩下 $(x^2 - x + 1)^2$ 項尚未討論：

1. 如果 $g(x)$ 和 $h(x)$ 各分得一個 $(x^2 - x + 1)$ 項，對照生成函數 $f(x)$ 可知， $g(x)$ 和 $h(x)$ 為標準6面骰子。
2. 如果 $g(x)$ 分得 $(x^2 - x + 1)^2$ 項，而 $h(x)$ 沒有分配到任何 $(x^2 - x + 1)$ 項，則
$$g(x) = x(x+1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)^2 = x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x$$
$$h(x) = x(x+1)(x^2 + x + 1) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$$
$$g(x) \text{ 和 } h(x) \text{ 正是 Sicherman 所發現的一對非正常 6 面骰子。[註二]}$$

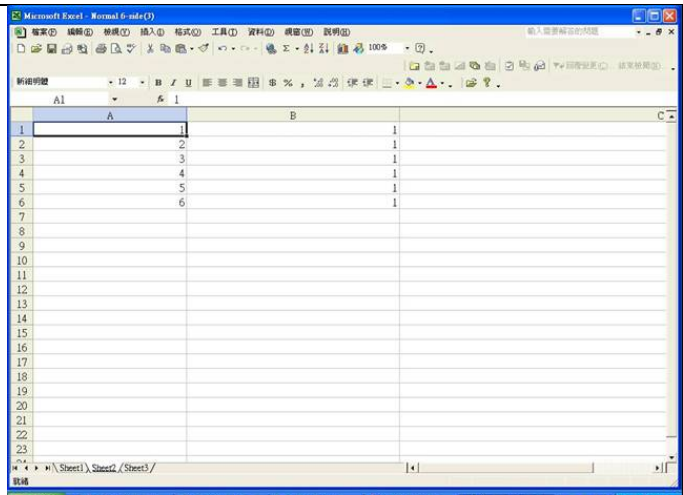
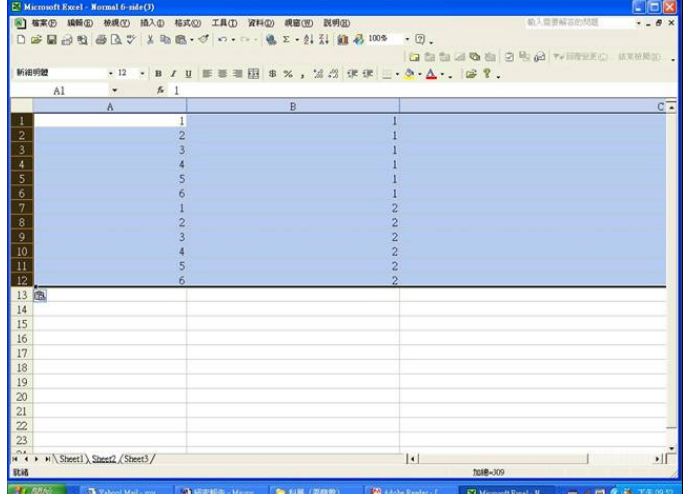
由以上的討論，將以生成函數 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 中出現的最小點數必為 1 及 $f(1)$ 代表骰子的面數等原則來進行問題的探討。

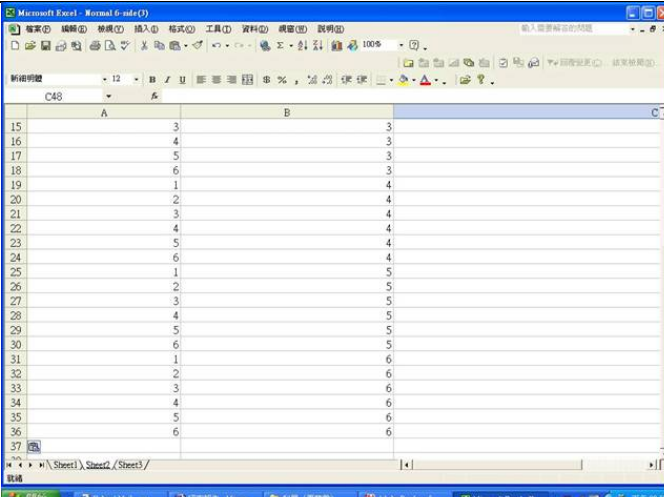
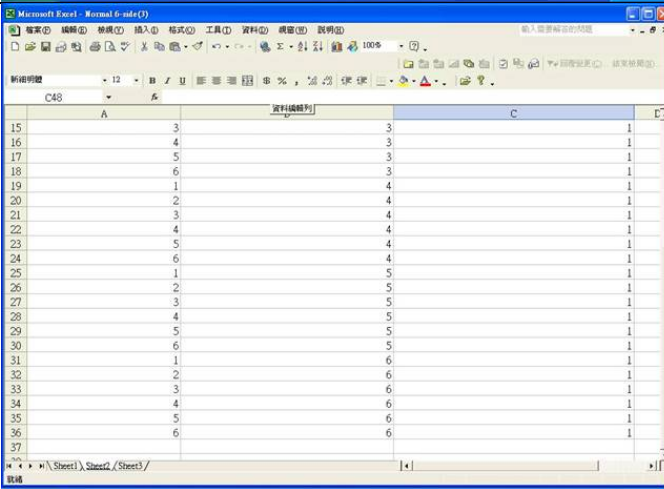
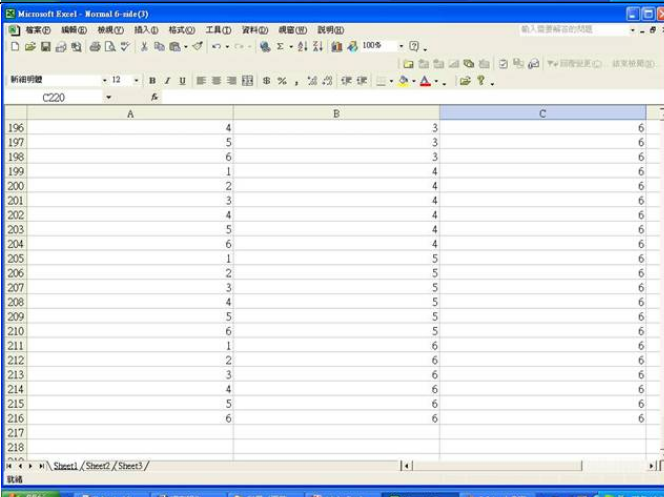
[註二] 如果將 *Sicherman Dice* 的其中一組骰子 (如 $g(x)$) 所有的點數都加 1，則點數組合成為 (2, 4, 5, 6, 7, 9)，另一組骰子 (如 $h(x)$) 所有的點數都減 1，則點數組合成為 (0, 1, 1, 2, 2, 3)。將這兩組新的骰子點數代入表二，表二點數和的出現次數依然不變 ($g(x)$ 所有的點數都減 1， $h(x)$ 所有的點數都加 1，亦成立)。因此點數為 0 (或負數) 的情形是可以藉由加減法來產生，其組合為無窮多組。這也是不考慮骰子任一面點數為 0 或負數的原因。

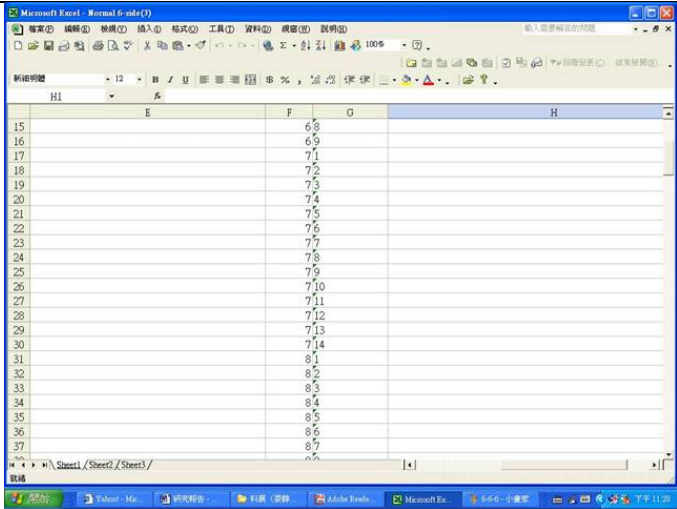
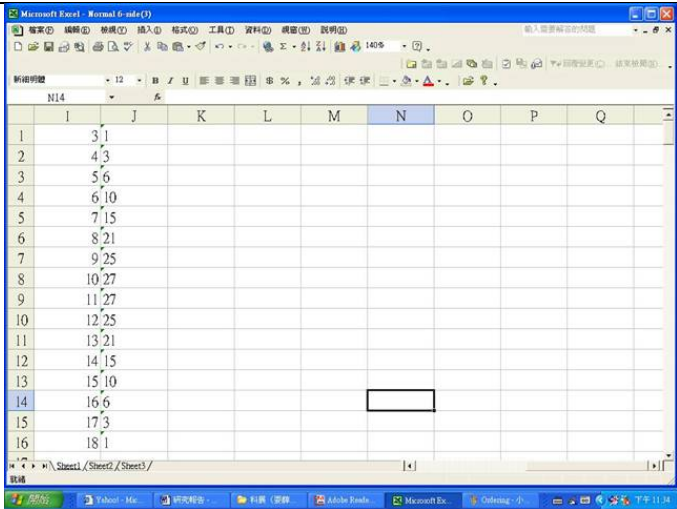
二、尋求計算「*Sicherman Dice* 的組合和正常的骰子有相同的出現機率」的方法

由表一和表二的計算，可以知道正常的骰子和 *Sicherman Dice* 所擲出點數和出現的次數是相同的。但是如果討論的骰子個數更多或面數更多，是否有較簡便及有效率的方法，來計算各種點數和的出現次數，藉以驗證其他 *Sicherman Dice* 的組合有和正常的骰子有相同的出現機率？由於 *Microsoft Excel* 有加法及排序的功能，藉由排列組合的安排，以下的方法，可以解決上述的問題。表三將藉由計算 3 顆 6 面標準骰子各點數和出現的次數，來說明這個計算方法的步驟。任何個數及面數(點數)骰子的點數和出現的次數都可利用這個方法來計算。

表三 使用 *Microsoft Excel* 來計算 3 顆 6 面標準骰子各點數和出現的次數

步驟	圖示	說明
(一)		開啓一個 <i>Excel</i> 的新檔案，將 1 至 6 分別填入 A1 至 A6，B1 至 B6 則填入 1。
(二)		將 1 至 6 列複製並貼至 7 至 12 列，並將 B7 至 B12 則填入 2。

(三)		依照(二)的方式將 1 至 6 列複製並依序貼至 13 至 36 列，並將 B13 至 B36，以 6 列為單位分別則填入 3 至 6。
(四)		將 C1 至 C36 填入 1。
(五)		將 1 至 36 列複製並依序貼至 37 至 216 列，並將 C37 至 C216，以 36 列為單位分別則填入 2 至 6。此 216 列代表 3 顆 6 面標準骰子所有擲出點數的組合。
(六)		將 D 行做函數運算，即 $D1=A1+B1+C$, $D2=A2+B2+C2, \dots$, $D216=A216+B216+C216$, D 行代表 3 顆 6 面標準骰子所有擲出點數組合的和。
(七)		將 D 行複製並以「值」的方式

		貼至另一行(如 F 行)，再將 F 行的值做「遞增排序」。則 Excel 會將(六)中的點數和，以从小到大排列。
(八)		將 G 行的儲存格內容改為「文字」。在 F 行各排序數字中的第一個數字所對應的 G 行的儲存格輸入 1，再將此一儲存格向下拉至最後一個數字所對應的 G 行的儲存格。以 7 為例，第一個 7 出現在 F17，則在 G17 填入 1，並將 G17 向下拉至 G30(最後一個 7 出現在 F30)，此時 G30 出現的數字是 14，由此可得知：7 一共出現 14 次。
(九)		將各數字出現的次數加以整理，便可得到 3 顆 6 面標準骰子各點數和出現的次數。
(十)		依照(一)至(九)的方法，可以算出任何點數、個數、面數骰子的組合。如果任兩種組合，其結果相同，則可以判定這兩種組合有相同的點數出現機率。

伍、研究結果

一、證明 *Sicherman* 結論的真偽

(一)、尋找3顆6面的 *Sicherman Dice*

依據第四章的研究方法，尋找3顆6面的 *Sicherman Dice*，其擲出的點數和會和3顆標準6面骰子相同。假設3顆6面的 *Sicherman Dice*，其生成函數分別為 $f(x), g(x), h(x)$ ，標準6面骰子的生成函數為 $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)$ 。

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = x^3(x+1)^3(x^2+x+1)^3(x^2-x+1)^3 \quad (4)$$

$$f(x) = x(x+1)^a(x^2+x+1)^b(x^2-x+1)^c$$

$$g(x) = x(x+1)^d(x^2+x+1)^e(x^2-x+1)^f$$

$$h(x) = x(x+1)^{3-(a+d)}(x^2+x+1)^{3-(b+e)}(x^2-x+1)^{3-(c+f)}$$

a, b, c, d, e, f 為整數， $0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 3$

由第四章「生成函數的條件」($f(x), g(x)$ 和 $h(x)$ 中出現的最小點數必為1及 $f(1), g(1), h(1)$ 代表骰子的面數)求得

$$f(1) = 2^a \cdot 3^b = 6$$

$$g(1) = 2^d \cdot 3^e = 6 \quad (5)$$

$$h(1) = 2^{3-(a+d)} \cdot 3^{3-(b+e)} = 6$$

由(5)的聯立方程式求得 $a = b = d = e = 1$ (6)

接著討論 c 和 f ，由於 $0 \leq c, f \leq 3$ ， $c(=0, 1, 2, 3)$ 和 $f(=0, 1, 2, 3)$ 一共有16種(4×4)組合

$$1. \quad c = 1, f = 1 \quad (7)$$

由(6)和(7)求得

$$f(x) = g(x) = h(x) = x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$= (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)$$

$f(x), g(x), h(x)$ 為標準六面骰子

$$2. \quad c = 2, f = 1 \quad (8)$$

由於 $c = 2, f = 1$ 和 $(c = 1, f = 2), (c = 1, f = 0), (c = 0, f = 1), (c = 0, f = 2), (c = 2, f = 0)$ 有相同的解，故一起討論。

由(6)和(8)求得

$$f(x) = x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x$$

$$g(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$$

$$h(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$$

即 $f(x), g(x), h(x)$ 為一組標準六面骰子與 *Sicherman* 所發現的一對非正常 6 面骰子的組合。

$$3. \quad c = 3, f = 0 \quad (9)$$

由於 $c = 3, f = 0$ 和 $(c = 0, f = 3), (c = 0, f = 0)$ 有相同的解。這幾組的解都會讓 $f(x), g(x), h(x)$ 中出現

$$\begin{aligned} & x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^3 \\ &= x^{10} - x^9 + 2x^8 + x^6 + x^5 + 2x^3 - x^2 + x \end{aligned} \quad (10)$$

由 (10) 可以發現，雖然 $x=1$ 代入後其值為 6，但與先前所設定所有係數必須大於或等於零的條件不符合，所以這類的解不列入考慮。為了方便起見，在之後的運算中，如果出現這類的解，皆以「出現負項」表示，並自動將這類的解去除。

$$4. \quad c = 2, f = 2 \quad (11)$$

由於 $c = 2, f = 2$ 和 $(c = 3, f = 3), (c = 2, f = 3), (c = 3, f = 2), (c = 1, f = 3), (c = 3, f = 1)$ 都會使 $3 - (c + f) < 0$ ，所以這類的解不列入考慮。

由 1 至 4 討論中發現，在 3 顆 6 面骰子的組合中，的確無法再找到另一組不同於 *Sicherman* 所發現的 *Sicherman Dice*。

(二)、尋找 4 顆 6 面的 *Sicherman Dice*

假設 4 顆 6 面的 *Sicherman Dice*，其生成函數分別為 $f(x), g(x), h(x), i(x)$ ，6 面骰子的生成函數為 $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)$

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot i(x) = x^4(x+1)^4(x^2+x+1)^4(x^2-x+1)^4$$

$$f(x) = x(x+1)^a(x^2+x+1)^b(x^2-x+1)^c$$

$$g(x) = x(x+1)^d(x^2+x+1)^e(x^2-x+1)^f$$

$$h(x) = x(x+1)^g(x^2+x+1)^h(x^2-x+1)^i$$

$$i(x) = x(x+1)^{4-(a+d+g)}(x^2+x+1)^{4-(b+e+h)}(x^2-x+1)^{4-(c+f+i)}$$

$a, b, c, d, e, f, g, h, i$ 為整數， $0 \leq a, b, c, d, e, f, g, h, i \leq 4$

由「生成函數的條件」求得

$$f(1) = 2^a \cdot 3^b = 6$$

$$g(1) = 2^d \cdot 3^e = 6$$

$$h(1) = 2^g \cdot 3^h = 6$$

$$i(1) = 2^{4-(a+d+g)} \cdot 3^{4-(b+e+h)} = 6$$

(12)

$$\text{由 (12) 的聯立方程式求得 } a = b = d = e = g = h = 1 \quad (13)$$

接著討論 c, f, i , 由於 $0 \leq c, f, i \leq 4, c(=0,1,2,3,4), f(=0,1,2,3,4), i(=0,1,2,3,4)$ 一共有125種($5 \times 5 \times 5$)組合。依據上一節尋求3顆6面的 *Sicherman Dice* 的經驗, 可以先行去除一些讓 $4 - (c + f + i) < 0$ 的組合, 並將有相同解的組合合併討論。

$$1. \quad c=1, f=1, i=1, \quad (14)$$

(13)和(14) 求得

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) = h(x) = i(x) = x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) \\ &= (x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x) \end{aligned}$$

即 $f(x), g(x), h(x), i(x)$ 為標準6面骰子

$$2. \quad c=2, f=1, i=1, \quad (15)$$

由於 $c=2, f=1, i=1$, 和 $(c=2, f=0, i=1), (c=2, f=1, i=0), (c=1, f=2, i=1), (c=0, f=2, i=1), (c=1, f=2, i=0), (c=1, f=1, i=2), (c=0, f=1, i=2), (c=1, f=0, i=2), (c=0, f=1, i=1), (c=1, f=0, i=1), (c=1, f=1, i=0)$, 有相同的解, 所以一起討論。

(13)和(15) 求得

$$\begin{aligned} f(x) &= x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x \\ g(x) &= h(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x \\ i(x) &= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x \end{aligned}$$

即 $f(x), g(x), h(x), i(x)$ 為2個標準6面骰子與 *Sicherman* 所發現的一對非正常6面骰子的組合

$$3. \quad c=2, f=2, i=0, \quad (16)$$

由於 $c=2, f=2, i=0$, 和 $(c=2, f=0, i=2), (c=0, f=2, i=2), (c=2, f=0, i=0), (c=0, f=2, i=0), (c=0, f=0, i=2)$, 有相同的解, 所以一起討論。

(16)和(13) 求得

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) = x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x \\ h(x) &= i(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x \end{aligned}$$

即 $f(x), g(x), h(x), i(x)$ 為兩對 *Sicherman* 所發現的非正常6面骰子的組合

$$4. \quad c=3, f=1, i=0, \quad (17)$$

由於 $c=3, f=1, i=0$, 和 $(c=3, f=0, i=1), (c=1, f=3, i=0), (c=0, f=3, i=1), (c=1, f=0, i=3), (c=0, f=1, i=3), (c=0, f=1, i=0), (c=0, f=0, i=1), (c=1, f=0, i=0), (c=0, f=3, i=0), (c=3, f=0, i=0), (c=0, f=1, i=0)$, 有相同的解, 所以一起討論。

由(10)得知

$$\begin{aligned} &x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^3 \\ &= x^{10} - x^9 + 2x^8 + x^6 + x^5 + 2x^3 - x^2 + x \end{aligned}$$

以上的組合, 皆會使 $f(x), g(x), h(x), i(x)$ 中的某一式「出現負項」, 因此這些

解並不符合需求。

$$5. \quad c = 4, f = 0, i = 0, \quad (18)$$

由於 $c = 4, f = 0, i = 0$, 和 $(c = 0, f = 4, i = 0), (c = 0, f = 0, i = 4), (c = 0, f = 0, i = 0)$, 有相同的解，所以一起討論。

由 *Derive 6* 的運算得知

$$\begin{aligned} & x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^4 \\ &= x^{12} - 2x^{11} + 4x^{10} - 3x^9 + 3x^8 + 3x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x \end{aligned} \quad (19)$$

以上的組合，皆會使 $f(x), g(x), h(x), i(x)$ 中的某一式「出現負項」，因此這些解並不符合需求。

由 1 至 5 討論中發現，在 4 顆標準 6 面骰子的組合中，的確無法再找到另一組不同於 *Sicherman* 所發現的 *Sicherman Dice*。

(三)、尋找 5 顆 6 面的 *Sicherman Dice*

在第一節與第二節的運算過程中發現以下的現象：

$$1. \quad (x^2 - x + 1)^n \quad n > 2 \quad (n \text{ 爲整數}) \quad (20)$$

無論 n 爲任何整數，(20) 式一定會「出現負項」。同時發現

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1 \quad (21)$$

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1 \quad (22)$$

2. 尋找第三組 *Sicherman Dice* 的關鍵，在於 $(x^2 - x + 1)^n$ 的討論。*Sicherman* 所發現的兩組 *Sicherman Dice*， n 的值分別爲 0 和 2。由 (10) 及 (19) 的現象，大膽地推論，多個 *Sicherman Dice* 的生成函數

$$x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^n \quad (23)$$

當 $n > 2$ 時，必然會「出現負項」。理由是當 $n > 2$ 時，生成函數已經沒有 $(x+1)$ 或 (x^2+x+1) 來「中和」 (x^2-x+1) 項，使其不產生負項。

綜合以上的現象與推論，尋找 5 顆 6 面的 *Sicherman Dice*，即是對 5 個生成函數中的 $(x^2 - x + 1)^n$ 項來的討論。對 5 個生成函數的 $(x^2 - x + 1)^n$ 項而言，其符合規定的分配模式如表四

表四 生成函數的 $(x^2 - x + 1)^n$ 項分配與結果

5 個生成函數中 $(x^2 - x + 1)^n$ 的 n 值分配	結果說明
(1,1,1,1,1)	5 個標準六面骰子
(2,1,1,1,0)	3 個標準六面骰子，與 <i>Sicherman</i> 所發現的一對非正常六面骰子的組合

(2,2,1,0,0)	1 個標準六面骰子，與兩對 Sicherman 所發現的非正常六面骰子的組合
-------------	--

至於尋找 6 顆(及以上)6 面的 *Sicherman Dice*，雖然組合數增加，但始終無法突破 (23) 式中，當 $n > 2$ 時，必然會「出現負項」的限制。6 顆(及以上)6 面的 *Sicherman Dice*，也僅限於標準 6 面骰子與 *Sicherman* 所發現的非正常 6 面骰子的組合，無法再找到另一組不同於 *Sicherman* 所發現的 *Sicherman Dice*。

(四)、尋找 2 顆 4 面的 *Sicherman Dice*

假設 2 顆 4 面的 *Sicherman Dice*，其生成函數分別為 $f(x), g(x)$ ，標準 4 面骰子的生成函數為 $(x^4 + x^3 + x^2 + x) = x(x+1)(x^2 + 1)$

$$f(x) \cdot g(x) = x^2(x+1)^2(x^2 + 1)^2 \quad (24)$$

$$f(x) = x(x+1)^a(x^2 + 1)^b$$

$$g(x) = x(x+1)^{2-a}(x^2 + 1)^{2-b}$$

a, b 為整數， $0 \leq a, b \leq 2$

由「生成函數的條件」求得

$$f(1) = 2^a \cdot 2^b = 4 \quad (25)$$

$$g(1) = 2^{4-(a+b)} = 4$$

由 (25) 的聯立方程式求得 $a + b = 2 \quad (26)$

接著討論 a 和 b

$$1. \quad a = 1, b = 1 \quad (27)$$

由 (24) 和 (27) 求得

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) = x(x+1)(x^2 + 1) \\ &= (x^4 + x^3 + x^2 + x) \end{aligned}$$

$f(x), g(x)$ 為標準 4 面骰子

$$2. \quad a = 2, b = 0 \quad (28)$$

由於 $a = 2, b = 0$ 和 $a = 0, b = 2$ 有相同的解，所以一起討論。

由 (24) 和 (28) 求得

$$f(x) = x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x \quad (29)$$

$$g(x) = x(x^2 + 1)^2 = x^5 + 2x^3 + x \quad (30)$$

$f(x), g(x)$ 為一組非標準 4 面骰子的 *Sicherman Dice*。其點數分別為 (1, 2, 2, 3)

及(1,3,3,5)。

(五)、尋找3顆4面的 *Sicherman Dice*

假設3顆4面的 *Sicherman Dice*，其生成函數分別為 $f(x), g(x), h(x)$ ，標準四面骰子的生成函數為 $(x^4 + x^3 + x^2 + x) = x(x+1)(x^2+1)$

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = x^3(x+1)^3(x^2+1)^3 \quad (31)$$

$$f(x) = x(x+1)^a(x^2+1)^b$$

$$g(x) = x(x+1)^c(x^2+1)^d$$

$$h(x) = x(x+1)^{3-(a+c)}(x^2+1)^{3-(b+d)}$$

a, b, c, d 為整數， $0 \leq a, b, c, d \leq 3$

由「生成函數的條件」求得

$$f(1) = 2^a \cdot 2^b = 4$$

$$g(1) = 2^c \cdot 2^d = 4 \quad (32)$$

$$h(1) = 2^{3-(a+c)} \cdot 2^{3-(b+d)} = 4$$

由(32)的聯立方程式求得 $a+b=2, c+d=2$ (33)

接著討論 a, b, c, d 的9種組合 $((a, b))$ 有3種組合 $(2, 0), (1, 1), (0, 2)$ ， (c, d) 亦同)，先去除 $a+b>3, c+d>3$ 的情形，並將有相同解的組合合併討論

$$1. \quad a=b=c=d=1 \quad (34)$$

求得

$$f(x) = g(x) = h(x) = x(x+1)(x^2+1) = (x^4 + x^3 + x^2 + x)$$

即 $f(x), g(x), h(x)$ 為標準4面骰子

$$2. \quad a=2, b=0, c=d=1 \quad (35)$$

由於 $a=2, b=0, c=d=1$ 和 $(a=0, b=2, c=d=1)$ ， $(a=b=1, c=0, d=2)$ ， $(a=b=1, c=2, d=0)$ ， $(a=0, b=2, c=2, d=0)$ ， $(a=2, b=0, c=0, d=2)$ 有相同的解，所以一起討論

求得

$$f(x) = x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x$$

$$g(x) = x(x+1)(x^2+1) = (x^4 + x^3 + x^2 + x)$$

$$h(x) = x(x^2+1)^2 = x^5 + 2x^3 + x$$

即 $f(x), g(x), h(x)$ 為一組標準4面骰子與先前由(29) (30)所發現的一對非標準4面骰子的組合。

(六)、尋找4顆4面的 *Sicherman Dice*

假設4顆4面的 *Sicherman Dice*，其生成函數分別為 $f(x), g(x), h(x), i(x)$ ，標準4

面骰子的生成函數為 $(x^4 + x^3 + x^2 + x) = x(x+1)(x^2 + 1)$

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot i(x) = x^4(x+1)^4(x^2+1)^4 \quad (36)$$

$$f(x) = x(x+1)^a(x^2+1)^b$$

$$g(x) = x(x+1)^c(x^2+1)^d$$

$$h(x) = x(x+1)^e(x^2+1)^f$$

$$i(x) = x(x+1)^{4-(a+c+e)}(x^2+1)^{4-(b+d+f)}$$

a, b, c, d, e, f 為整數， $0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 4$

由「生成函數的條件」求得

$$f(1) = 2^a \cdot 2^b = 4$$

$$g(1) = 2^c \cdot 2^d = 4$$

$$h(1) = 2^e \cdot 2^f = 4$$

$$i(1) = 2^{4-(a+c+e)} \cdot 2^{4-(b+d+f)} = 4$$

(37)

由(37)的聯立方程式求得 $a+b=2, c+d=2, e+f=2$ ，其組合共有 27 組 $((a, b))$ 有 3 種組合 $(2, 0), (1, 1), (0, 2), (c, d), (e, f)$ 亦同)。由第五節的推演， a, b, c, d, e, f 的最大值為 2。因此所有的解只能分為以下三種類型

$$1. \quad a = b = c = d = e = f = 1$$

$f(x), g(x), h(x), i(x)$ 為 4 個標準 4 面骰子。

$$2. \quad a = 2, b = 0, c = 0, d = 2, e = f = 1$$

$f(x), g(x), h(x), i(x)$ 為 2 個標準 4 面骰子與 (29) (30) 所發現的一對非標準 4 面骰子的組合

$$3. \quad a = 2, b = 0, c = 0, d = 2, e = 2, f = 0$$

即 $f(x), g(x), h(x), i(x)$ 為兩對 (29) (30) 所發現的非標準 4 面骰子的組合。

至於尋找 5 顆(及以上) 4 面的 *Sicherman Dice*，雖然組合數增加，但始終無法突破「生成函數中的各項，其次方數最大值為 2」的限制。5 顆(及以上) 4 面的 *Sicherman Dice*，也僅限於標準 4 面骰子與 (29) (30) 所發現的非正常 4 面骰子的組合，無法再找到另一組不同於 (29) (30) 所發現的 *Sicherman Dice*。

(七)、尋找 2 顆 8 面的 *Sicherman Dice*

假設 2 顆 8 面的 *Sicherman Dice*，其生成函數分別為 $f(x), g(x)$ ，標準 8 面骰子的生成函數為 $(x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) = x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ 。

$$f(x) \cdot g(x) = x^2(x+1)^2(x^2+1)^2(x^4+1)^2 \quad (38)$$

$$f(x) = x(x+1)^t(x^2+1)^u(x^4+1)^v$$

$$g(x) = x(x+1)^{2-t}(x^2+1)^{2-u}(x^4+1)^{2-v}$$

t, u, v 為整數， $0 \leq t, u, v \leq 2$

由「生成函數的條件」求得

$$\begin{aligned} f(1) &= 2^t \cdot 2^u \cdot 2^v = 8 \\ g(1) &= 2^{6-(t+u+v)} = 8 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\text{由(39)的聯立方程式求得 } t+u+v=3 \quad (40)$$

接著討論 t, u, v ，共有 10 種組合， $((t, u, v)=(1, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 0, 1), (3, 0, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 2), (0, 3, 0), (0, 0, 3), (1, 2, 0), (1, 0, 2))$ ，先去除 $t, u, v > 3$ 的情形，並將有相同解的組合合併討論

$$1. \quad t = u = v = 1 \quad (41)$$

求得

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) = x(x+1)(x^2+1)(x^4+1) \\ &= (x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) \end{aligned}$$

即 $f(x), g(x)$ 為標準 8 面骰子

$$2. \quad t = 2, u = 1, v = 0 \quad (42)$$

由於 $t = 2, u = 1, v = 0$ 和 $t = 0, u = 1, v = 2$ 有相同的解，所以一起討論。

求得

$$f(x) = x(x+1)^2(x^2+1) = (x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x) \quad (43)$$

$$g(x) = x(x^2+1)(x^4+1)^2 = (x^{11} + x^9 + 2x^7 + 2x^5 + x^3 + x) \quad (44)$$

即 $f(x), g(x)$ 為一對非標準 8 面骰子的 *Sicherman Dice*。其點數分別為 $(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)$ 及 $(1, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 11)$

$$3. \quad t = 2, u = 0, v = 1 \quad (45)$$

由於 $t = 2, u = 0, v = 1$ 和 $t = 0, u = 2, v = 1$ 有相同的解，所以一起討論。

求得

$$f(x) = x(x+1)^2(x^4+1) = (x^7 + 2x^6 + x^5 + x^3 + 2x^2 + x) \quad (46)$$

$$g(x) = x(x^2+1)^2(x^4+1) = (x^9 + 2x^7 + 2x^5 + 2x^3 + x) \quad (47)$$

即 $f(x), g(x)$ 為第 2 對非標準 8 面骰子的 *Sicherman Dice*。其點數分別為 $(1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7)$ 及 $(1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9)$

$$4. \quad t = 1, u = 2, v = 0 \quad (48)$$

由於 $t = 1, u = 2, v = 0$ 和 $t = 1, u = 0, v = 2$ 有相同的解，所以一起討論。

求得

$$f(x) = x(x+1)(x^4+1)^2 = (x^{10} + x^9 + 2x^6 + 2x^5 + x^2 + x) \quad (49)$$

$$g(x) = x(x+1)(x^2+1)^2 = (x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x) \quad (50)$$

即 $f(x), g(x)$ 為第3對非標準8面骰子的 *Sicherman Dice*。其點數分別為 $(1, 2, 5, 5, 6, 6, 9, 10)$ 及 $(1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6)$

由1至4討論中發現，在2顆標準8面骰子的組合中，可以找到3對完全不同的 *Sicherman Dice*。

(八)、尋找3顆8面的 *Sicherman Dice*

假設3顆8面的 *Sicherman Dice*，其生成函數分別為 $f(x), g(x), h(x)$,

$$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = x^3(x+1)^3(x^2+1)^3(x^4+1)^3 \quad (51)$$

$$f(x) = x(x+1)^a(x^2+1)^b(x^4+1)^c$$

$$g(x) = x(x+1)^d(x^2+1)^e(x^4+1)^f$$

$$h(x) = x(x+1)^{3-(a+d)}(x^2+1)^{3-(b+e)}(x^4+1)^{3-(c+f)}$$

a, b, c, d, e, f 為整數， $0 \leq a, b, c, d, e, f \leq 3$

由「生成函數的條件」求得

$$f(1) = 2^a \cdot 2^b \cdot 2^c = 8$$

$$g(1) = 2^d \cdot 2^e \cdot 2^f = 8 \quad (52)$$

$$h(1) = 2^{3-(a+d)} \cdot 2^{3-(b+e)} \cdot 2^{3-(c+f)} = 8$$

$$\text{由(52)的聯立方程式求得 } a+b+c=3, d+e+f=3 \quad (53)$$

接著討論 a, b, c, d, e, f 的100種組合(由(40)式可以得知 (a, b, c) 共有10種組合， (d, e, f) 亦同)，先去除 $a+d>3, b+e>3, c+f>3$ 的情形，並將有相同解的組合合併討論。一共得到10種不同組合

$$1. \quad f(x) = x(x^2+1)^3 = (x^7 + 3x^5 + 3x^3 + x)$$

$$g(x) = x(x^4+1)^3 = (x^{13} + 3x^9 + 3x^5 + x)$$

$$h(x) = x(x+1)^3 = (x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x)$$

其點數分別為 $(1, 3, 3, 3, 5, 5, 7), (1, 5, 5, 5, 9, 9, 13), (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4)$

$$2. \quad f(x) = x(x^2+1)^3 = (x^7 + 3x^5 + 3x^3 + x)$$

$$g(x) = x(x+1)(x^4+1)^2 = (x^{10} + x^9 + 2x^6 + 2x^5 + x^2 + x)$$

$$h(x) = x(x+1)^2(x^4+1) = (x^7 + 2x^6 + x^5 + x^3 + 2x^2 + x)$$

其點數分別為 $(1, 3, 3, 3, 5, 5, 7), (1, 2, 5, 5, 6, 6, 9, 10), (1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7)$

$$3. \quad f(x) = x(x^4+1)^3 = (x^{13} + 3x^9 + 3x^5 + x)$$

$$g(x) = x(x+1)(x^2+1)^2 = (x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x)$$

$$h(x) = x(x+1)^2(x^2+1) = (x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x)$$

其點數分別為 $(1, 5, 5, 5, 9, 9, 13), (1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6), (1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)$

4. $f(x) = x(x^2 + 1)(x^4 + 1)^2 = (x^{11} + x^9 + 2x^7 + 2x^5 + x^3 + x)$
 $g(x) = x(x^2 + 1)^2(x^4 + 1) = (x^9 + 2x^7 + 2x^5 + 2x^3 + x)$
 $h(x) = x(x + 1)^3 = (x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x)$
其點數分別為 (1, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 11), (1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9), (1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4)
5. $f(x) = x(x^2 + 1)(x^4 + 1)^2 = (x^{11} + x^9 + 2x^7 + 2x^5 + x^3 + x)$
 $g(x) = x(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = (x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)$
 $h(x) = x(x + 1)^2(x^2 + 1) = (x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x)$
其點數分別為 (1, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 11), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), (1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)
6. $f(x) = x(x^2 + 1)(x^4 + 1)^2 = (x^{11} + x^9 + 2x^7 + 2x^5 + x^3 + x)$
 $g(x) = x(x + 1)(x^2 + 1)^2 = (x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x)$
 $h(x) = x(x + 1)^2(x^4 + 1) = (x^7 + 2x^6 + x^5 + x^3 + 2x^2 + x)$
其點數分別為 (1, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 11), (1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6), (1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7)
7. $f(x) = x(x^2 + 1)^2(x^4 + 1) = (x^9 + 2x^7 + 2x^5 + 2x^3 + x)$
 $g(x) = x(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = (x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)$
 $h(x) = x(x + 1)^2(x^4 + 1) = (x^7 + 2x^6 + x^5 + x^3 + 2x^2 + x)$
其點數分別為 (1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), (1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7)
8. $f(x) = x(x^2 + 1)^2(x^4 + 1) = (x^9 + 2x^7 + 2x^5 + 2x^3 + x)$
 $g(x) = x(x + 1)(x^4 + 1)^2 = (x^{10} + x^9 + 2x^6 + 2x^5 + x^2 + x)$
 $h(x) = x(x + 1)^2(x^2 + 1) = (x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x)$
其點數分別為 (1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9), (1, 2, 5, 5, 6, 6, 9, 10), (1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)
9. $f(x) = g(x) = h(x) = x(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$
 $= (x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)$
 $f(x), g(x), h(x)$ 為標準 8 面骰子
10. $f(x) = x(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = (x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)$
 $g(x) = x(x + 1)(x^4 + 1)^2 = (x^{10} + x^9 + 2x^6 + 2x^5 + x^2 + x)$
 $h(x) = x(x + 1)(x^2 + 1)^2 = (x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x)$
其點數分別為 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), (1, 2, 5, 5, 6, 6, 9, 10), (1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6)

在 3 顆標準 8 面骰子的組合中，可以找到 10 對(每對 3 組) *Sicherman Dice*。但是，經過仔細的觀察比對後，其中許多對是由標準 8 面骰子與在 2 顆標準 8 面骰子的組合中曾經出現的 *Sicherman Dice* (如 (43), (44), (46), (47), (49), (50)) 所組合而成。因此，真正符合原則(即未曾在 2 顆的組合中出現過)的 *Sicherman Dice*，僅有 4 組(即上述的 1, 2, 3, 4)。

(九)、尋找 12 面的 *Sicherman Dice*

由 2 顆 8 面 *Sicherman Dice* 的推演，可以預期 2 顆 12 面的 *Sicherman Dice* 的組合

可能更多。由於，本研究的目的是不在於找到所有可能的 *Sicherman Dice*。因此，嘗試轉換另一種方式，來驗證 *Sicherman* 的推論是否正確。如果可以找到 3 顆 12 面的 *Sicherman Dice* 中的某一組，並證明其不同於 2 顆 12 面的 *Sicherman Dice*，即證明 *Sicherman* 的推論並不適用於 12 面的骰子。

假設 3 顆 12 面的 *Sicherman Dice*，其生成函數分別為 $f(x), g(x), h(x)$,

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) &= (x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)^3 \\ &= x^3(x+1)^3(x^2+1)^3(x^2+x+1)^3(x^2-x+1)^3(x^4-x^2+1)^3 \end{aligned} \quad (54)$$

$$f(x) = x(x+1)^a(x^2+1)^b(x^2+x+1)^c(x^2-x+1)^d(x^4-x^2+1)^e \quad (55)$$

$$g(x) = x(x+1)^f(x^2+1)^g(x^2+x+1)^h(x^2-x+1)^i(x^4-x^2+1)^j \quad (56)$$

$$h(x) = x(x+1)^{3-(a+f)}(x^2+1)^{3-(b+g)}(x^2+x+1)^{3-(c+h)}(x^2-x+1)^{3-(d+i)}(x^4-x^2+1)^{3-(e+j)}$$

$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ 為整數， $0 \leq a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \leq 3$

由「生成函數的條件」求得

$$\begin{aligned} f(1) &= 2^a \cdot 2^b \cdot 3^c = 12 \\ g(1) &= 2^f \cdot 2^g \cdot 3^h = 12 \\ h(1) &= 2^{3-(a+f)} \cdot 2^{3-(b+g)} \cdot 3^{3-(c+h)} = 12 \end{aligned} \quad (57)$$

由 (57) 的聯立方程式求得 $a+b=2, f+g=2, c+h=1$ (58)

由先前的推演經驗，影響 *Sicherman Dice* 能否形成的關鍵，通常在於含有負項式的討論，如 $(x^2-x+1), (x^4-x^2+1)$ 。再由 *Derive 6* 的運算，得到以下的式子

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1$$

$$(x^2+1)(x^4-x^2+1) = x^6+1$$

$$(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1$$

$(x^2-x+1), (x^4-x^2+1)$ 都可以找到特定的式子，相乘之後讓負項消失。

選定 (x^4-x^2+1) 作為討論的目標。

令 $a=0, b=2, f=g=1, c=d=h=i=1, e=2, j=1$ 。這樣的安排是特意讓 (x^4-x^2+1) 產生平方項，並讓 $(x^2+1)^2$ 去「中和」它，使其不會出現負項。同時，讓 $g(x)$ 成為標準 12 面的骰子，以簡化複雜度。得到

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^2+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)^2 \\ &= (x^{17} + x^{15} + x^{13} + 2x^{11} + 2x^9 + 2x^7 + x^5 + x^3 + x) \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1) \\ &= (x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} h(x) &= x(x+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1) \\ &= (x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x) \end{aligned} \quad (61)$$

由先前的推演經驗，(59) (61) 是 2 顆 12 面的 *Sicherman Dice*，同時也證明了 $(x^4 - x^2 + 1)$ 平方項是可以形成 *Sicherman Dice*。接下來的問題是， $(x^4 - x^2 + 1)$ 的 3 次方項可以形成 *Sicherman Dice* 嗎？。如果 $(x^4 - x^2 + 1)$ 的 3 次方項可以形成 *Sicherman Dice*，這一組 *Sicherman Dice* 是絕對不會出現在 2 顆 12 面的 *Sicherman Dice* 的組合中，同時也證明 *Sicherman* 的推論並不適用於 12 面的骰子。

由 *Derive* 6 的運算，得到

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1) = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = x^8 + x^4 + 1$$

於是又找到一個「中和」 $(x^4 - x^2 + 1)$ 使其不會出現負項的組合。

因此將 (60) 中的 $(x^4 - x^2 + 1)$ 移轉給 (59)，形成 $(x^4 - x^2 + 1)$ 的 3 次方項，得到

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^2 + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)^3 \\ &= (x^{21} + x^{17} + 2x^{15} + x^{13} + 2x^{11} + x^9 + 2x^7 + x^5 + x) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \\ &= (x^8 + x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x) \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} h(x) &= x(x + 1)^2(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \\ &= (x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x) \end{aligned} \quad (64)$$

(62) (63) (64) 代表一對可以取代 3 顆 12 面標準骰子的 *Sicherman Dice*，其中 (62) 不可能在 2 顆 12 面的 *Sicherman Dice* 的組合中出現。因此，可以證明 *Sicherman* 的推論並不適用於 12 面的骰子。

(十)、尋找 20 面的 *Sicherman Dice*

由 12 面的 *Sicherman Dice* 的推演經驗，再加上 20 面骰子的生成函數非常相似

$$\begin{aligned} &(x^{20} + x^{19} + x^{18} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) \\ &= x(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

而且

$$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = (x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)$$

$$(x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) = x^{10} + 1$$

$$(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = x^5 + 1$$

$$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) = (x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1)$$

因此大膽地仿照 (62) (63) (64)

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^2 + 1)^2(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1)^3 \\ &= (x^{37} + x^{33} + x^{29} + 2x^{27} + x^{25} + 2x^{23} + x^{21} + 2x^{19} + x^{17} + 2x^{15} + x^{13} + 2x^{11} + x^9 + x^5 + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \\ &= (x^{12} + x^{11} + 2x^{10} + 2x^9 + 2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= x(x+1)^2(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \\
&= (x^{11} + 2x^{10} + 2x^9 + 2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x)
\end{aligned}$$

如同在(九)中所觀察的組合， $f(x)$ 不可能在 2 顆 20 面的 *Sicherman Dice* 的組合中出現，所以 *Sicherman* 的推論並不適用於 20 面的骰子。

二、Sicherman Dice 的延伸探討

在 *Sicherman Dice* 的延伸探討中，我們嘗試以不同面數的骰子加以組合，找出符合 *Sicherman Dice* 原則的點數組合；即各個骰子 (*Crazy Dice*) 的點數和及出現次數與標準骰子的組合相同。運算原則則是第四章所提到的生成函數中最小點數必為 1 及 $f(1)$ 代表骰子的面數。表四則說明各種 *Crazy Dice* 的點數組合。

表四 各種 *Crazy Dice* 的點數組合

標準骰子的組合	<i>Crazy Dice</i> 的組合
4 面與 6 面 (1,2,3,4)及(1,2,3,4,5,6)	(1,3,4,6)及(1,2,2,3,3,4) (1,2,3,4)及(1,2,3,4,5,6)(標準骰子) (1,2,4,5)及(1,2,3,3,4,5) (1,2,2,3)及(1,3,3,5,5,7)
6 面與 8 面 (1,2,3,4,5,6)及(1,2,3,4,5,6,7,8)	(1,2,3,4,5,6)及(1,2,3,4,5,6,7,8) (標準骰子) (1,2,2,3,3,4)及(1,3,4,5,6,7,8,10) (1,3,3,5,5,7)及(1,2,2,3,5,6,6,7) (1,2,3,3,4,5)及(1,2,4,5,5,6,8,9) (1,3,5,5,7,9)及(1,2,2,3,3,4,4,5) (1,2,3,5,6,7)及(1,2,3,4,4,5,6,7)
4 面與 8 面 (1,2,3,4)及(1,2,3,4,5,6,7,8)	(1,2,2,3)及(1,3,3,5,5,7,7,9) (1,3,3,5)及(1,2,2,3,5,6,6,7) (1,2,3,4)及(1,2,3,4,5,6,7,8) (標準骰子) (1,2,5,6)及(1,2,3,3,4,4,5,6) (1,3,5,7)及(1,2,2,3,3,4,4,5,)
4 面、6 面與 8 面 (1,2,3,4) (1,2,3,4,5,6) (1,2,3,4,5,6,7,8)	1. (1,2,2,3) (1,2,3,4,5,6) (1,3,3,5,5,7,7,9) 2. (1,3,3,5) (1,2,3,4,5,6) (1,2,2,3,5,6,6,7) 3. (1,2,5,6) (1,2,3,4,5,6) (1,2,3,3,4,4,5,6) 4. (1,2,3,4) (1,2,3,4,5,6) (1,2,3,4,5,6,7,8) (標準骰子) 5. (1,3,5,7) (1,2,3,4,5,6) (1,2,2,3,3,4,4,5) 6. (1,2,4,5) (1,2,2,3,3,4) (1,3,3,5,5,7,7,9) 7. (1,3,3,5) (1,2,2,3,3,4) (1,2,4,5,5,6,8,9) 8. (1,4,5,8) (1,2,2,3,3,4) (1,2,3,3,4,4,5,6) 9. (1,2,5,6) (1,2,2,3,3,4) (1,3,3,4,5,6,6,8) 10. (1,3,4,6) (1,2,2,3,3,4) (1,2,3,4,5,6,7,8) 11. (1,2,3,4) (1,2,2,3,3,4) (1,3,4,5,6,7,8,10) 12. (1,3,5,7) (1,2,2,3,3,4) (1,2,3,4,4,5,6,7)

	13. (1,2,2,3) (1,3,3,5,5,7) (1,2,3,4,5,6,7,8) 14. (1,2,5,6) (1,3,3,5,5,7) (1,2,2,3,3,4,4,5) 15. (1,2,3,4) (1,3,3,5,5,7) (1,2,2,3,5,6,6,7) 16. (1,3,5,7) (1,3,3,5,5,7) (1,2,2,2,3,3,3,4) 17. (1,2,4,5) (1,2,3,3,4,5) (1,2,3,4,5,6,7,8) 18. (1,2,2,3) (1,2,3,3,4,5) (1,3,4,5,6,7,8,10) 19. (1,4,5,8) (1,2,3,3,4,5) (1,2,2,3,3,4,4,5) 20. (1,2,5,6) (1,2,3,3,4,5) (1,2,3,4,4,5,6,7) 21. (1,3,4,6) (1,2,3,3,4,5) (1,2,2,3,5,6,6,7) 22. (1,2,3,4) (1,2,3,3,4,5) (1,2,4,5,5,6,8,9) 23. (1,3,5,7) (1,2,3,3,4,5) (1,2,2,3,4,5,5,6) 24. (1,2,2,3) (1,3,5,5,7,9) (1,2,3,3,4,4,5,6) 25. (1,3,3,5) (1,3,5,5,7,9) (1,2,2,2,3,3,3,4) 26. (1,2,3,4) (1,3,5,5,7,9) (1,2,2,3,3,4,4,5) 27. (1,2,4,5) (1,2,3,5,6,7) (1,2,3,3,4,4,5,6) 28. (1,2,2,3) (1,2,3,5,6,7) (1,3,3,4,5,6,6,8) 29. (1,3,3,5) (1,2,3,5,6,7) (1,2,2,3,4,5,5,6) 30. (1,3,4,6) (1,2,3,5,6,7) (1,2,2,3,3,4,4,5) 31. (1,2,3,4) (1,2,3,5,6,7) (1,2,3,4,4,5,6,7)
3 個 4 面 (1,2,3,4) (1,2,3,4) (1,2,3,4)	2 個 8 面 (1,3,3,3,5,5,5,7)及(2,3,3,3,4,4,4,5)[註三] (1,2,3,3,4,4,5,6)及(2,3,3,4,4,5,5,6) (1,2,2,3,3,4,4,5)及(2,3,4,4,5,5,6,7) (1,2,2,2,3,3,3,4)及(2,4,4,4,6,6,6,8)
4 面與 12 面 (1,2,3,4) (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)	6 面與 8 面 (1,2,2,3,3,4)及(1,3,4,6,7,9,10,12) (1,2,5,6,9,10)及(1,2,3,3,4,4,5,6) (1,2,3,4,5,6)及(1,2,3,4,7,8,9,10) (1,2,3,3,4,5)及(1,2,4,5,7,8,10,11) (1,3,5,7,9,11)及(1,2,2,3,3,4,4,5) (1,2,3,7,8,9)及(1,2,3,4,4,5,6,7) (1,3,3,5,5,7)及(1,2,2,3,7,8,8,9)
6 面與 8 面 (1,2,3,4,5,6) (1,2,3,4,5,6,7,8)	4 面與 12 面 (1,2,2,3)及(1,3,3,5,5,5,7,7,9,9,11) (1,2,4,5)及(1,2,3,3,4,5,5,6,7,8,9) (1,3,5,7)及(1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7)

	(1,2,3,4)及(1,2,3,4,5,5,6,6,7,8,9,10)
	(1,3,4,6)及(1,2,2,3,3,4,5,6,6,7,7,8)
	(1,2,5,6)及(1,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,8)
	(1,4,5,8)及(1,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,6)

[註三] 3 個正 4 面體的標準骰子組合其擲出最小的點數和為 3，Crazy Dice 中出現的最小點數必為 1 和 2，否則其中便會出現點數為 0 的情形。

陸、討論

- 一、在第五章中，分別證明了在不同個數的4面及6面標準骰子組合下，的確如 *Sicherman* 所推論：無法找到第3顆不同點數的 *Sicherman Dice*。在4面標準骰子組合中，無法找到的原因是「生成函數中的各項，其次方數最大值為2」的限制。而6面標準骰子組合中，無法找到的原因是「生成函數中已經沒有 $(x+1)$ 或 (x^2+x+1) 來「中和」 (x^2-x+1) 項，使其不產生負項。」。而這些原因背後的關鍵便是 $4(2^2)$ 和 $6(2 \times 3)$ 的數字太小，使其因數分解之後的組合太少，無法提供足夠的資源來產生變化。
- 二、8面標準骰子的生成函數與4面標準骰子的生成函數型態極為類似，但組成項較多，再加上沒有「負項」(如 (x^2-x+1) 項)的干擾及限制，使其在兩個 *Sicherman Dice* 的組合中，便已產生多對的組合。
- 三、12及20面標準骰子的生成函數與6面標準骰子的生成函數型態極為類似，其因數分解皆為2的乘方(2^n)乘以一個質數，及「負項」(如 (x^2-x+1) ， (x^4-x^2+1) 項)的產生。其差異在於12及20面標準骰子的因數分解含有 $4(2^2)$ ，產生較多的組合(如 $(x+1)$ ， (x^2+1))來「中和」「負項」。
- 四、尋找3顆8面的 *Sicherman Dice* 過程中，得到10個各有3組 *Sicherman Dice* 的組合。經過仔細的整理與比對(詳見表五及表六)，發現這30組 *Sicherman Dice* 中，大部分都是2顆 *Sicherman Dice* 與標準8面骰子的組合，只有3組 $((1,2,2,2,3,3,3,4)$ ， $(1,3,3,3,5,5,5,7)$ ， $(1,5,5,5,9,9,9,13))$ 是未曾出現在2顆 *Sicherman Dice* 的組合中。而這3組 *Sicherman Dice* 的生成函數分別為 $x(x+1)^3$ ， $x(x^2+1)^3$ ， $x(x^4+1)^3$ 。這個發現給我很大的啓發與靈感，因為這些3次方項的確不會出現在2顆 *Sicherman Dice* 的組合中。而這個想法也運用在12及20面 *Sicherman Dice* 的證明中。

表五 2顆正八面體的 *Sicherman Dice*

12233445	1355779(11)
12235667	13355779
1255669(10)	12334456

表六 3顆正八面體的 *Sicherman Dice* (*)為標準八面骰子

13335557	1555999(13)	12223334
13335557	1255669(10)	12235667
1555999(13)	12334456	12233445
1355779(11)	13355779	12223334
1355779(11)	12345678 (*)	12233445
1355779(11)	12334456	12235667

13355779	12345678(*)	12235667
13355779	1255669(10)	12233445
12345678(*)	12345678(*)	12345678(*)
12345678(*)	1255669(10)	12334456

- 五、雖然在 8 面、12 面及 20 面的討論與推演中，至少都可以找到 3 組不同的 *Sicherman Dice*，來證明 *Sicherman* 的推論並不適用。但隨著骰子數的增加，我們可以不斷地找到新的點數組合的 *Sicherman Dice* 嗎？答案可能是否定的。以尋找 4 顆 8 面的 *Sicherman Dice* 為例，如果有新點數組合的 *Sicherman Dice*，必然出現在 4 次方項(如 $(x^2 + 1)^4$)。但是當 $x = 1$ 代入時，4 次方項必定為 $2^4 = 16$ ，與面數 8 的條件不合。因此，4 個 8 面體新點數組合的 *Sicherman Dice*，可能就無法出現，更不用說 5 個以上的情形。而在尋找 4 顆 12 面及 20 面的 *Sicherman Dice* 的例子中，可能無法找到足夠的正項(如 $(x+1), (x^2 + 1)$)，來「中和」負項(如 $(x^4 - x^2 + 1)$)的 4 次方項。因此，4 個 12 面及 20 面新點數組合的 *Sicherman Dice*，可能就無法出現，更不用說 5 個以上的情形。
- 六、在 *Sicherman Dice* 的延伸探討「多個面數相同或不同骰子的組合，是否可以找到面數、個數及點數配置皆不同的 *Crazy Dice*」中，不同組合配對的原則是這些組合有相同的「排列組合數」，如正 4 面體與正 12 面體有 48 種的點數排列組合，與正 6 面體與正 8 面體排列組合數相同。這也是尋找 *Sicherman Dice* (*Crazy Dice*) 最基本的原則。一般而言，*Sicherman Dice* 的延伸探討中的各個組合，都不難找到解答，這與討論一中所提到的資源多寡有關。資源愈多，限制條件就愈寬鬆，找到解答的機會就愈大。特別值得注意的是，正 4 面體與正 12 面體和正 6 面體與正 8 面體互求 *Crazy Dice*，是「可逆」的。而「3 個正 4 面體的標準骰子組合，找到 2 個正 8 面體的 *Crazy Dice*」則是「不可逆」的。因為「2 個正 8 面體的標準骰子組合，找到 3 個正 4 面體的 *Crazy Dice*」中，3 個正 4 面體的 *Crazy Dice* 中必須有一個點數出現零的組合，這和原先設定「不考慮骰子任一面點數為 0 或負數的情形」的原則是相違背的。
- 七、雖然利用生成函數可以找到對應標準骰子的 *Sicherman Dice*，但是所得到的 *Sicherman Dice* 真的和標準骰子有相同的點數和及相同出現次數嗎？利用第四章第二節 *Microsoft Excel* 的方法，我們可以將所得到的 *Sicherman Dice* 和標準骰子作計算比對，得到「眼見為憑」的證明效果。這個方法是針對已求出的結果進行驗算證明，而非利用它來求得未知的 *Sicherman Dice* 組合。
- 八、同時，我們也和 Col. George Sicherman 取得聯繫，討論當年他發現 *Sicherman Dice* 的經過及其結論的限制條件，作為本研究未來發展的參考。電子郵件之內容，請參閱附件。

柒、結論

- 一、我們由以上的證明與討論可以知道 Sicherman 的推論「在不使用 *Sicherman Dice* 的情形下，不可能找到一組大於或等於 3 顆的非正常骰子，它們拋擲出的每一種不同點數和的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同。」[註四]僅適用於 4 面體及 6 面體標準骰子，但對於 8 面體、12 面體及 20 面體標準骰子的情形則不適用。
- 二、我們可以將 Sicherman 的推論修正為「對於正多面體的標準骰子，在某一個數量 L (L 為正整數，稱為 Sicherman 極限) 的骰子個數下，在不使用已發現的 *Sicherman Dice* 的情形下，不可能找到一組大於或等於 L 顆的非正常骰子，它們拋擲出的每一種不同點數和的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同。」。在我們的研究中可以得到：4 面標準骰子及 6 面體標準骰子的 L 為 3；8 面標準骰子、12 面標準骰子及 20 面標準骰子，其 L 為 4。
- 三、在研究的過程中，我們對於生成函數的特性與組合，有了更深一層的瞭解。對於本研究未來發展，也有了較清楚的方向。未來的研究目標將拓展至其他正多面體 (n 面體， n 為自然數) 的骰子的探討。雖然，其他面數的骰子並不存在於真實世界，但可以藉助類似輪盤的觀念來解釋。在 George Sicherman 的網站中，也提供了一個可以計算 n 面骰子其對應 *Sicherman Dice* 的程式。因此，我們並不會繼續討論及尋找 n 面骰子所對應的 *Sicherman Dice*，而是去探討 n 面骰子其對應的 Sicherman 極限 ($L(n)$) 以及 Crazy Dice 組合中是否也存在 Sicherman 極限。

[註四]原文為「Sicherman also found that it is impossible to redesign a set of three or more dice that have the same odds as ordinary dice without utilizing his two dice. For example, Sicherman's pair plus one conventional die have the same odds as three ordinary dice, two pair of Sicherman dice behave like four ordinary dice and so on.」

捌、參考資料及其他

- 一、 孫文先（無日期）。**骰子漫談**。民 90 年 10 月 28 日，取自：
<http://www.chiuchang.org.tw/download/docu/club/dice.pdf>
- 二、 Martin Gardner, William Watkins (1997). **Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers : And the Return of Dr Matrix (Spectrum)**, Sicherman Dice, the Kruskal Count and other Curiosities (pp. 265-267). The Mathematical Association of America .
- 三、 **Crazy Dice**, Chrix from Bloomington, MN,US, (2000, July 20) :
From <http://www.mathnerds.com/mathnerds/best/crazydice/solution.asp>
- 四、 From <http://www.mathpuzzle.com/Dicepolynomials.txt>
- 五、 **Nick's Mathematical Miscellany**
From <http://www.qbyte.org/puzzles/p041s.html>

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國中組 數學科

第二名

030413

耍「薛骰」—— Sicherman Dice 的探討

新竹市立建功高級中學

評語：

作品運用非常標準化的骰子，討論點數應如何安排配置才能和標準化的骰子產生相同的機率。作者同時對 3 顆、4 顆和 5 顆骰子進行完整的分析，對於正四面、八面、十二面、及廿面的骰子也做一些討論，分析問題方法及採用生成函數，處理問題都十分恰當，是很好的作品。