中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

030411
「接」大歡喜

臺中縣立順天國民中學

作者姓名：
國一 許奕涵 國一 紀建豪 國一 王艾茵
國一 陳鈞彥

指導老師：
劉環毓 侯坤成

台中縣第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：「接」大歡喜

關 鍵 詞：三角形內接最大長方形

三角形內接最大正方形

正方形最大內接正三角形

編　　號：

作品名稱：「接」大歡喜

壹、 摘要

一、三角形內接最大長方形面積是三角形面積的一半，且長方形的底是其所在三角形底邊長的一半。

二、三角形內接最大正方形

（一）銳角三角形的三個內接正方形中，與三角形較小邊共邊的較大。

（二）直角三角形只能畫出二個內接正方形，且與兩股共邊的較大。

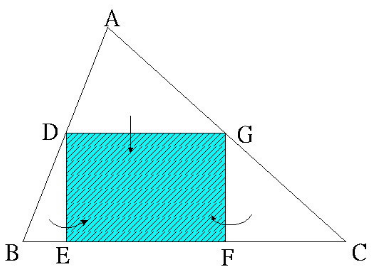
（三）鈍角三角形只有一個內接正方形，即與最大邊共邊的內接正方形。

三、三角形最大內接正方形邊長公式爲 $x_a = \dfrac{ah_a}{a+h_a} = \dfrac{2\Delta ABC}{a+h_a}$

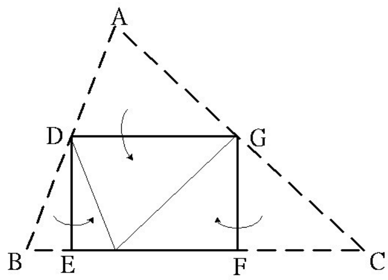
四、單位正三角形最大內接正方形的邊長等於單位正方形最大內接正三角形的面積。（這裡單位所指的是各邊長長度爲 1）。

貳、 研究動機

國中課本第二冊有提到在三角形內畫出一個最大的內接長方形，只要由任何兩邊的中點向第三邊畫垂直線即可。最大長方形的面積恰爲三角形面積的一半，且長方形的底是其所在三角形底邊長的一半。用摺紙的方式可以證明，如圖（一），剪下一三角形，沿著長方形的三個內邊摺起三個角，摺起的部分剛好嵌入長方形中，如圖（二）。這裡我們所研究對「內接」的定義是：一個多邊形「內接」在某個較大的多邊形內，表示該多邊形的每個頂點都落在外面那個多邊形的邊上。



圖〈一〉



圖〈二〉

疑問：一、如何用與摺紙不一樣的方法去證明三角形最大內接長方形是由任兩邊中點向第三邊畫垂直線而得，並求其面積？試圖畫出銳角、鈍角、直角三角形各邊上的最大內接長方形。

二、如何在不同的三角形（銳角、直角、鈍角）內找出最大內接正方形？

三、如何在正方形內找出最大內接正三角形？

四、三角形的最大內接正方形、正方形的最大內接三角形之間彼此有無關係呢？

因爲產生了上述的疑問，於是我們興起了研究的動機。

參、 研究目的

一、試圖證明三角形最大內接長方形是由任兩邊中點向第三邊畫垂線而得,並求其面積。

二、試圖用不同的方法在三角形中找出內接正方形，並證明。

三、〈一〉求出任意三角形中，內接正方形邊長和三角形對應邊長與對應高的關係。

〈二〉利用幾何繪圖軟體 GSP，比較三角形各邊所畫內接正方形的大小和其他內部正方形的大小。

（三）利用三角形內接正方形邊長和三角形對應邊長與對應高的關係的關係式，比較證明每個三角形各邊所畫的內接正方形中，哪個較大；並印證幾何繪圖軟體 GSP 模擬的結果。

四、試圖找出正方形的最大內接正三角形與正三角形的最大內接正方形之間彼此關係。

（一）畫出正三角形最大內接正方形並求出單位正三角形最大內接正方形的邊長。

（二）畫出正方形最大內接正三角形。

（三）發現並證明單位正三角形最大內接正方形的邊長等於單位正方形最大內接正三角形的面積。

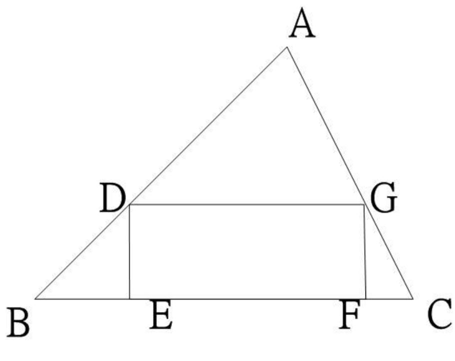
肆、 研究設備及器材

直尺、電腦、色紙、幾何繪圖軟體 GSP。

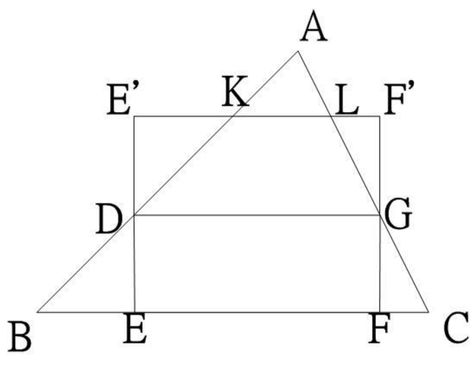
伍、 研究過程或方法

一、研究三角形內最大內接長方形，是由三角形任兩邊的中點向第三邊畫垂直線可得，其面積恰為三角形面積的一半，且長方形的長是其所在三角形底邊長的一半。

〈一〉如何在任意三角形裡畫出最大內接長方形，我們是這樣想的。如圖（三），畫一任意 ΔABC ，並以 $\overline{BC}$ 為底邊，在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上任取 D、G 兩點，且過 D、G 兩點作 $\overline{DE}$ 、 $\overline{GF}$ 垂直於 $\overline{BC}$ 上，交 $\overline{BC}$ 於 E、F 兩點，使得四邊形 DEFG 為長方形。然後我們試著證明 ΔABC 內接長方形 DEFG 要如何畫面積才會最大呢？



圖（三）



圖（四）

證明：如圖（四），若 E、F 關於 D、G 的對稱點爲 E’、F’，

則 ΔDBE面積 $= \Delta DKE'$面積，ΔGFC面積 $= \Delta GF'L$面積

所以矩形 EE’FF’ 面積=梯形 KBCL 面積=ΔABC面積 $-\Delta AKL$面積

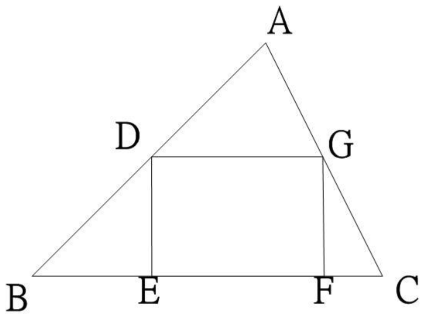
而 $2\times$長方形$DEFG$面積 $= \Delta ABC$面積 $-\Delta AKL$面積

要使長方形 DEFG 面積最大，則ΔAKL面積要越小越好，

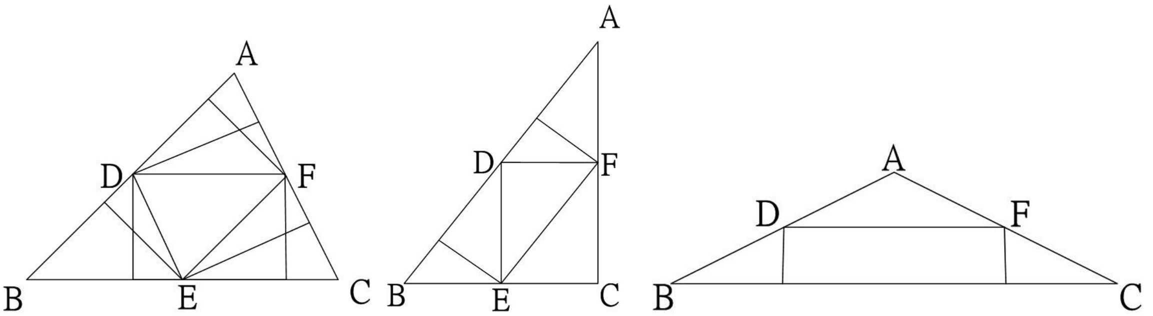
且最好$\overline{E'F'}$通過頂點 A，所以 D、G 恰好是給定的$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點，此時長方形 DEFG 面積最大，且等於ΔABC面積的一半。如果是長方形的一邊在三角形另一邊上的時候，也是一樣的。

所以我們得到**三角形最大內接長方形，是由三角形任兩邊的中點向第三邊畫垂直線可得，其面積恰爲三角形面積的一半，如圖（五）。**

如圖（六），任何銳角三角形內皆可依此規則畫出三個同類的長方形，但形狀不一定相同。直角三角形則可畫出兩個，鈍角三角形只能畫出一個。接著我們想到是不是能夠在三角形內找出最大內接正方形，因此想先用摺紙的方法試試看。



圖（五）



銳角三角形　直角三角形　鈍角三角形

三角形 ABC 中，各邊中點分別爲 D、E、F

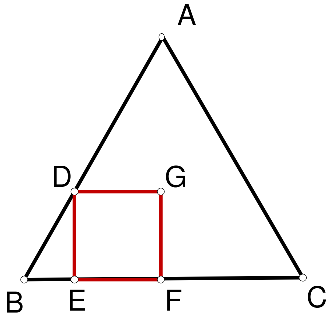
圖（六）

二、在三角形內摺出最大內接正方形

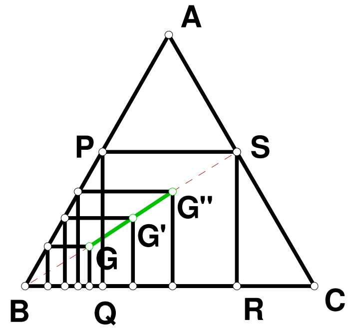
〈一〉在正三角形中摺出最大正方形

剛開始直覺的使正方形的一邊垂直三角形的一邊，摺出如圖〈七〉的正方形，但圖〈七〉的正方形明顯不是最大的，接著再慢慢把$\overline{DE}$往內摺，摺出的正方形越來越大，可以想像最大的正方形四個頂點應該會在三角形邊上，但操作結果是很難摺出剛好四點皆在三角形邊上的正方形，不過隨著摺出的正方形越來越多，我們發現一點在$\overline{AB}$上，一邊在$\overline{BC}$上的這類正方形，它們的右上

端點似乎共線，如圖〈八〉中的G、G'、G''，沿著此線對摺可摺出$\overline{AC}$上的 S 點，而此線似乎也過三角形的頂點 B，找出 S 點後，可摺出 PQRS 這個正方形。



圖（七）



圖（八）

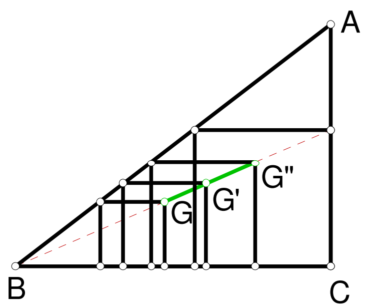
摺出正方形後，此時產生兩個問題：

1、其他三角形也有此共線且此線之延長線會過三角形一頂點的性質嗎？

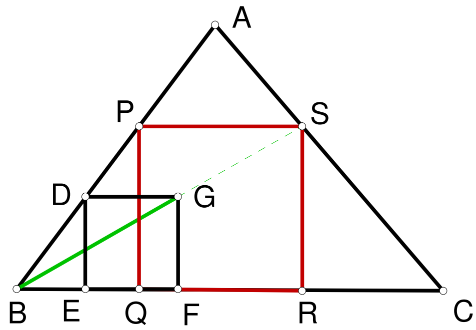
2、這真的是內部面積最大的正方形嗎？

〈二〉在任意三角形找出內接正方形

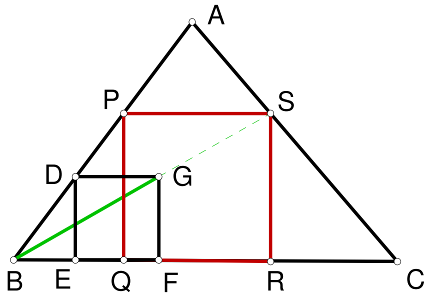
現在將正三角形，改成直角三角形，發現共線延長線過三角形一頂點的性質依舊成立，如圖〈九〉，然後實驗其他三角形發現都有此現象，因此得到一方法來找出四點均在三角形邊上的正方形，稱為內接正方形。作法是，如圖〈十〉，先在ΔABC內部作一個正方形 DEFG，D 點必須在$\overline{AB}$上，$\overline{DE}\perp\overline{BC}$，連接$\overline{BG}$並延長，交$\overline{AC}$於 S，作正方形 PQRS，即為所求。



圖〈九〉



圖〈十〉



圖（十一）

所以我們知道如何做出三角形中的內接正方形，如圖（十一），已知ΔABC中，$\angle B$和$\angle C$為鋭角，求作一內接正方形，做法：

1、在$\overline{AB}$上取一點 D，作$\overline{DE}\perp\overline{BC}$，以$\overline{DE}$為邊，向右擴充成正方形 DEFG。

2、連接$\overline{BG}$並延長，交$\overline{AC}$於 S；過 S 點作一直線平行$\overline{BC}$，並交$\overline{AB}$於 P；分別過 P、S 點作$\overline{BC}$的垂線，交$\overline{BC}$於 Q、R 兩點，連接四邊形 PQRS，即爲所求。

3、證明由 1、2 所做出的四邊形 PQRS 是正方形

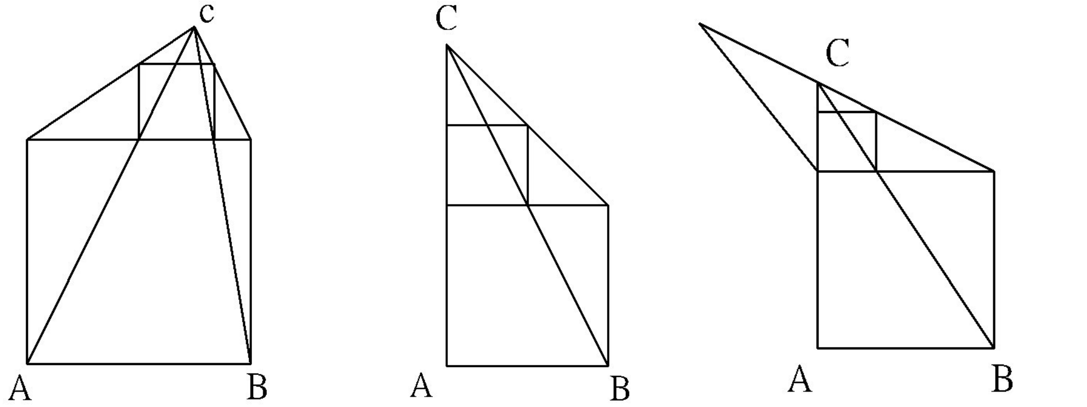
ΔBPS 中，$\because \overline{DG}$ 平行 $\overline{PS}$，$\therefore \overline{DG} : \overline{PS} = \overline{BD} : \overline{BP}$

ΔBPQ 中，$\because \overline{DE}$ 平行 $\overline{PQ}$，$\therefore \overline{DE} : \overline{PQ} = \overline{BD} : \overline{BP}$

因此 $\overline{DG} : \overline{PS} = \overline{DE} : \overline{PQ}$，

且因 $\overline{DG} = \overline{DE}$，所以 $\overline{PS} = \overline{PQ}$，即 PQRS 爲正方形。

除用上述的方法做出三角形內接最大正方形外，我們還想到可**用另一簡單方法可畫出三角形內接最大正方形，此方法可分別用在銳角、直角、鈍角三角形。這個方法是以三角形某一底邊爲正方形的邊長，向外做一個正方形，由 A 及 B 連線至 C，交三角形底邊於兩點，此兩點的連線即爲最大正方形的底邊，如圖（十二）。**

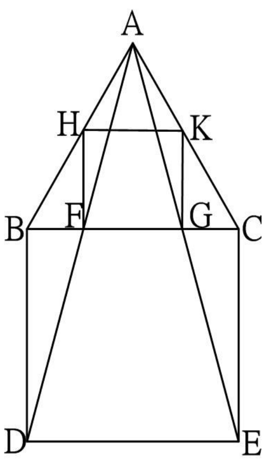


銳角三角形　直角三角形　鈍角三角形

圖〈十二〉

接著我們試著證明這樣的畫法是正確的。

如圖（十三），以ΔABC的邊$\overline{BC}$爲一邊向外側作正方形 BDEC，若$\overline{AD}$、$\overline{AE}$與$\overline{BC}$的交點分別爲 F、G，則$\overline{FG}$是ΔABC內接正方形的一邊。



圖（十三）

證明：從 F、G 各向 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 畫垂線且與 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的交點分別爲 H、K，

則 $\dfrac{\overline{HF}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{FG}}{\overline{DE}}$ ，而 $\overline{BD}=\overline{DE}$ ，$\therefore \overline{HF}=\overline{FG}$

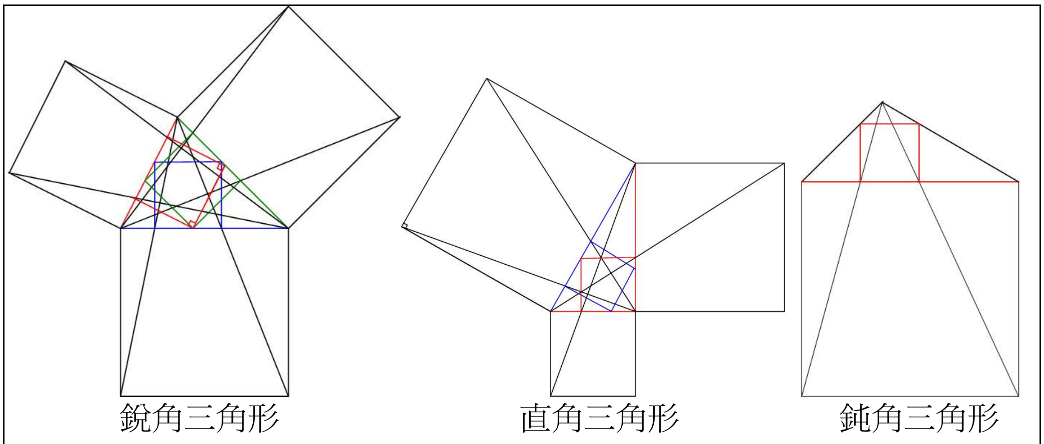
同理， $\overline{FG}=\overline{GK}$ ，$\therefore \overline{HF}=\overline{GK}$

又 $\overline{HF}$ 平行 $\overline{GK}$ ，$\therefore HFGK$ 是平行四邊形。

而 $\angle HFG=90°$ ，且 $\overline{HF}=\overline{FG}$ ，$\therefore$ 四邊形 HFGK 是正方形。

接著我們發現在各邊上做出的最大內接正方形，每一個面積都不一樣，如圖（十四），這與三角形最大內接長方形的情形不同。所以又出現兩個問題：

1. 是否能求出三角形最大內接正方形的邊長。
2. 三角形各邊上做出的最大內接正方形面積不一定相等，哪一個內接正方形面積最大？



圖（十四）

三、（一）求出三角形最大內接正方形的邊長

與三角形最大內接長方形一樣，這種正方形必有一邊落在三角形的一邊上，稱爲這一邊爲三角形的底邊。如圖〈十五〉，令 a 爲三角形底邊長度，h_a 爲對應邊的高，三角形內接正方形邊長爲 x_a 。

求證**三角形內接正方形邊長的公式** $x_a=\dfrac{ah_a}{a+h_a}$ 。

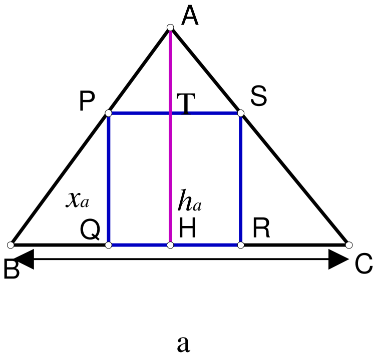
證明：∵ΔAPS 與ΔABC 相似，

$$\therefore \frac{\overline{AT}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{PS}}{\overline{BC}} \quad \text{即} \quad \frac{h_a-x_a}{h_a}=\frac{x_a}{a}$$

$$\Rightarrow \quad x_ah_a=ah_a-ax_a \quad \Rightarrow \quad ax_a+x_ah_a=ah_a$$

$$\Rightarrow x_a(a+h_a)=ah_a$$

$$x_a=\frac{ah_a}{a+h_a}=\frac{2\Delta ABC}{a+h_a}$$



圖〈十五〉

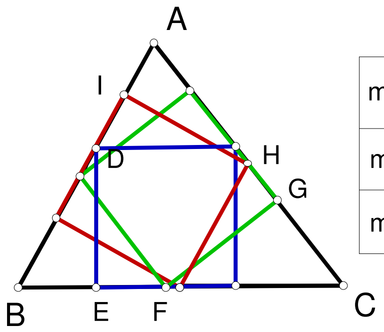
所以我們找出任意三角形中，內接正方形邊長和三角形對應邊長與對應高的關係爲 $x_a=\dfrac{ah_a}{a+h_a}=\dfrac{2\Delta ABC}{a+h_a}$ 。

因爲我們發現在各邊上做出的最大內接正方形，面積不一定相等，這與最大內接長方形的情形不同，所以我們想用幾何 GSP 軟體來比較三角形各邊所做的內接正方形，哪一個最大。

（二）利用幾何 GSP 軟體比較三角形各邊所畫出的內接正方形，哪一個正方形較大

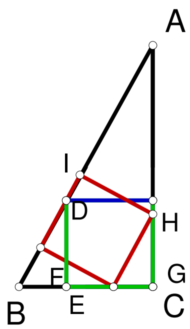
我們利用幾何軟體 GSP 來模擬在任意三角形中每個內接正方形的情形，先利用之前想的方法分別畫出與三角形三邊共邊的三個內接正方形，然後固定 A、B 兩點，移動 C 點，去變化三角形的形狀，並測量出三角形三邊的長度，三個角的角度和每個內接正方形的邊長，結果發現：

1. 銳角三角形的三個內接正方形中，與三角形較小邊共邊的較大（附件一）。



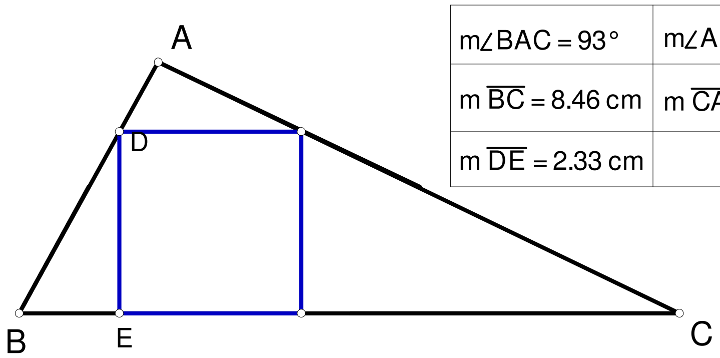
m∠BAC = 67°	m∠ABC = 61°	m∠BCA = 52°
m $\overline{BC}$ = 4.27 cm	m $\overline{CA}$ = 4.05 cm	m $\overline{AB}$ = 3.68 cm
m $\overline{DE}$ = 1.83 cm	m $\overline{FG}$ = 1.84 cm	m $\overline{HI}$ = 1.85 cm

2. 直角三角形卻只能畫出二個內接正方形，且與兩股共邊的較大（附件二）。



m∠BAC = 29°	m∠ABC = 61°	m∠BCA = 90°
m $\overline{BC}$ = 1.78 cm	m $\overline{CA}$ = 3.22 cm	m $\overline{AB}$ = 3.68 cm
m $\overline{DE}$ = 1.15 cm	m $\overline{FG}$ = 1.15 cm	m $\overline{HI}$ = 1.09 cm

3. 鈍角三角形只有一個內接正方形，即與最大邊共邊的內接正方形（附件三）。



m∠BAC = 93°	m∠ABC = 61°	m∠BCA = 26°
m $\overline{BC}$ = 8.46 cm	m $\overline{CA}$ = 7.41 cm	m $\overline{AB}$ = 3.68 cm
m $\overline{DE}$ = 2.33 cm		

找到最大的內接正方形，想確定它是不是三角形內部最大正方形，於是我們在三角形內部畫了很多正方形，且讓這些正方形盡量的大，發現最大的內接正方形的確比其他內部正方形大，這些數據（附件四），增加了我們相信最大內接正方形是三角形內部最大的正方形，於是我們開始著手證明。

（三）證明三角形各邊所畫出的內接正方形，哪一個正方形較大

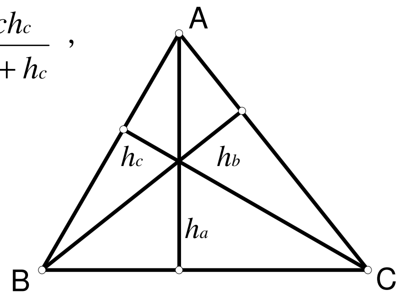
利用之前所證明的三角形內接正方形邊長和三角形對應邊長與對應高的關係式 $x_a=\dfrac{ah_a}{a+h_a}=\dfrac{2\Delta ABC}{a+h_a}$，來證明三角形各邊所畫出的內接正方形，哪一個正方形較大，也印證幾何 GSP 軟體模擬結果。

1. 根據 GSP 模擬結果，推測銳角三角形中的內接正方形是與最短邊共邊的內接正方形最大，現在加以證明。

求證：銳角 ΔABC 中，若 $a>b>c$，則 $x_a<x_b<x_c$，

其中 $x_a=\dfrac{ah_a}{a+h_a}$，$x_b=\dfrac{bh_b}{b+h_b}$，$x_c=\dfrac{ch_c}{c+h_c}$，

如圖〈十六〉。



圖〈十六〉

證明：$b>h_a \Rightarrow ab>ah_a$

$$\Rightarrow 1>\frac{ah_a}{ab}=\frac{2\Delta ABC}{ab}\Rightarrow a-b>2\Delta ABC(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})\quad【同乘\ a-b】$$

$$\Rightarrow a+\frac{2\Delta ABC}{a}>b+\frac{2\Delta ABC}{b}\Rightarrow a+h_a>b+h_b$$

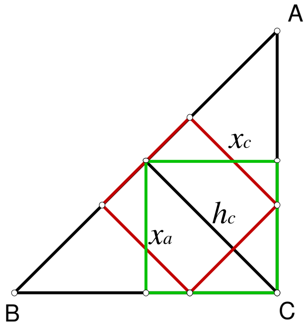
同理可證 $a+h_a>b+h_b>c+h_c$，

所以 $\dfrac{2\Delta ABC}{a+h_a}<\dfrac{2\Delta ABC}{b+h_b}<\dfrac{2\Delta ABC}{c+h_c}$，即 $x_a<x_b<x_c$

2. 根據 GSP 模擬結果，推測直角三角形中的內接正方形是與兩股共邊的內接正方形最大，現在加以證明。

求證：直角 ΔABC 中，若 c 為斜邊，則 $x_a=x_b>x_c$，

其中 $x_a=\dfrac{ah_a}{a+h_a}$，$x_b=\dfrac{bh_b}{b+h_b}$，$x_c=\dfrac{ch_c}{c+h_c}$，如圖〈十七〉。



圖〈十七〉

證明：$\because a+h_a=a+b=b+a=b+h_b \quad \therefore x_a=x_b$ ------（1）

$$a+h_a=a+b>0\;；\; c+h_c=c+\frac{ab}{c}>0$$

$$(c+h_c)^2-(a+h_a)^2=(c+\frac{ab}{c})^2-(a+b)^2$$

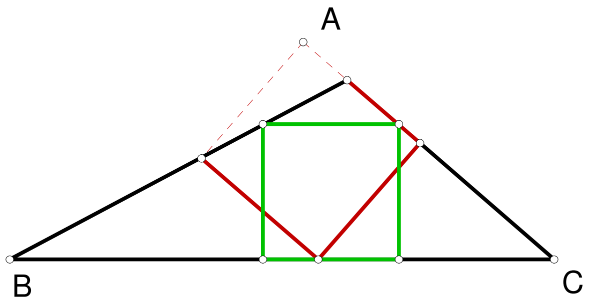
$$=(c^2+2ab+\frac{a^2b^2}{c^2})-(a^2+2ab+b^2)$$

$$=(c^2+2ab+\frac{a^2b^2}{c^2})-(c^2+2ab)=\frac{a^2b^2}{c^2}>0$$

$\therefore a+h_a<c+h_c$，故得知 $x_a>x_c$ ------（2）

由（1）、（2）知 $x_a=x_b>x_c$

3. 鈍角三角形，根據 GSP 模擬的結果發現，只能做出一個內接正方形，且此內接正方形與最大邊共邊，由圖（十八）可看出這個結果。

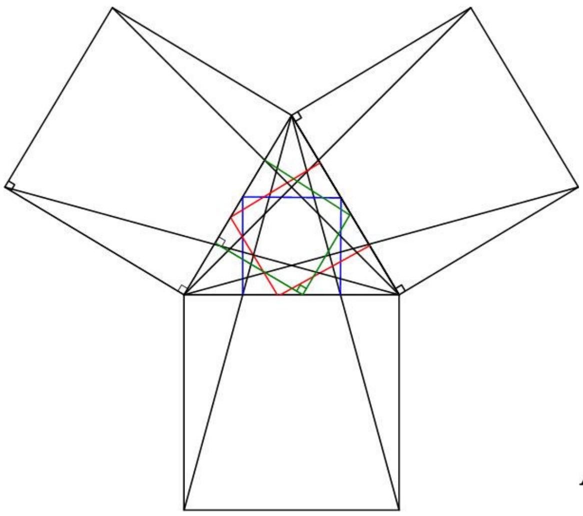


圖〈十八〉

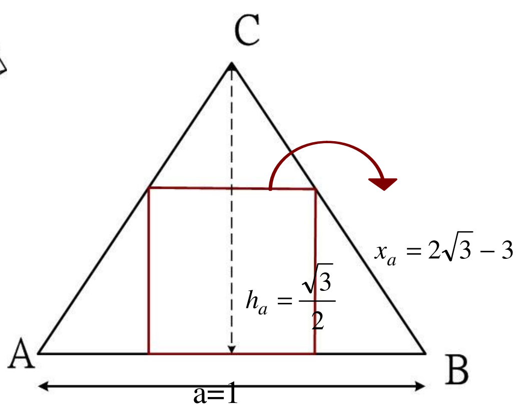
四、試圖找出正方形的最大內接正三角形與正三角形的最大內接正方形之間彼此關係

（一）畫出正三角形最大內接正方形並計算單位正三角形最大內接正方形的邊長。

由以上的研究結果，我們想畫出正三角形的最大內接正方形來看看，發現**正三角形每邊所做出的內接正方形面積都一樣大**，如圖（十九）。接著我們將單位正三角形的最大內接正方形邊長計算出來，如圖（二十）。



圖（十九）



圖（二十）

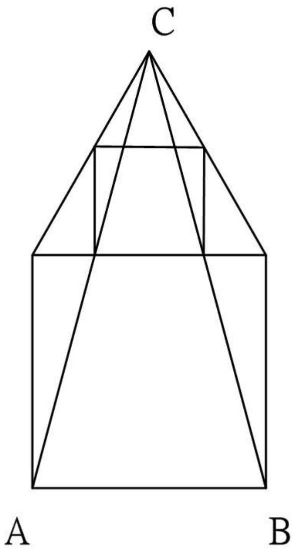
把單位正三角形的邊長 $a=1$ 及高 $h_a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 之值，

代入先前證明三角形內接正方形邊長的公式 $\dfrac{ah_a}{a+h_a}$ 中，

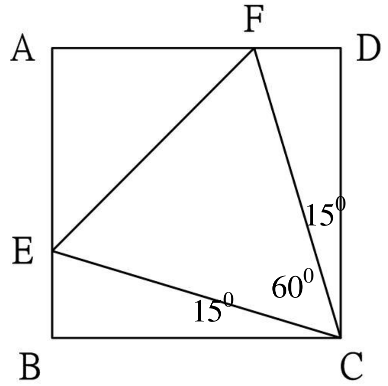
得到 $\dfrac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=2\sqrt{3}-3$

故得證，正方形邊長爲 $2\sqrt{3}-3$ 。

在畫的過程中我們看到圖，發現下方所畫出的的正方形似乎可以試著找出他的最大內接正三角形，如圖（二十一）所以我們試著畫正方形最大內接正三角形來看看彼此有無關係。



圖（二十一）



圖（二十二）

（二）畫出正方形最大內接正三角形並求出單位正方形最大內接正三角形的面積

現在我們思考如何找出正方形中最大內接正三角形。正方形中內接三角形，要獲得最大面積，三角形的頂點一定得接觸到四個邊，因此必有一個頂點位在正方形的角上。試想固定往右下角的頂點，然後旋轉三角形，使另外兩個頂點沿著正方形的邊移動，這麼一來就使三角形的一邊較另外兩邊來得短，而不是原來的正三角形。所以正方形的內接最大正三角形畫出來就像圖（二十二）。

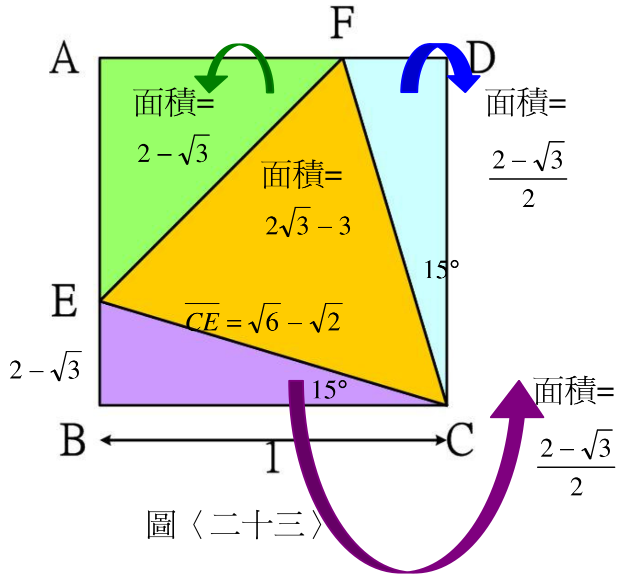
用單位正方形也就是邊長爲 1 的正方形計算出其最大內接正三角形的邊長及面積。如圖（二十三），單位正方形內最大內接正三角形的面積，計算如下：

正三角形的邊長爲 15 度的正割值 $Sec15°$ ，也就是 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ 。

即 $\overline{FC}=\overline{CE}=\overline{EF}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

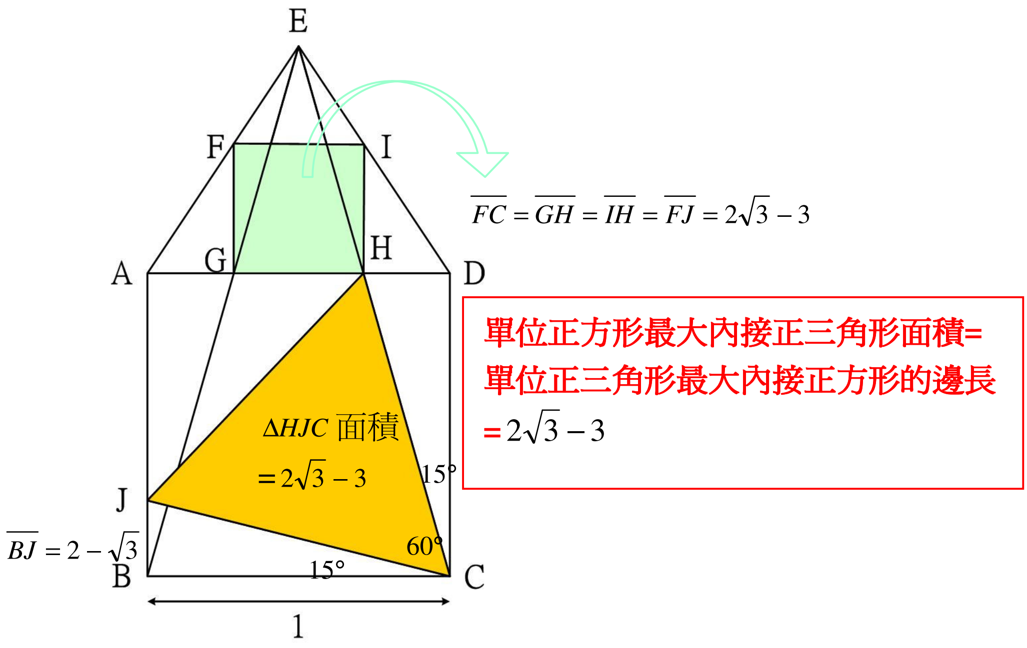
$$\because \Delta CEF\text{為正三角形}，\therefore \Delta CEF\text{面積} = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(6-2\sqrt{12}+2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(8-2\sqrt{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(8-4\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}-3$$

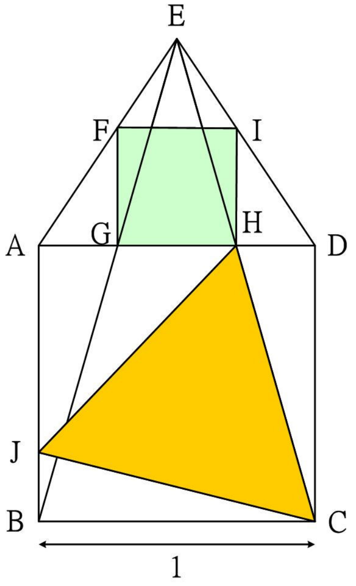


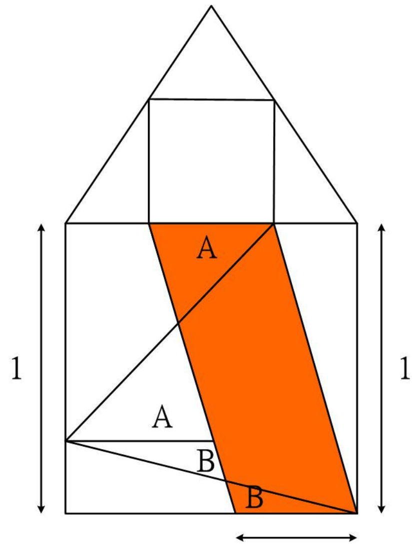
圖〈二十三〉

比較上面的結果**發現單位正方形內最大內接正三角形的面積，剛好等於單位正三角形內接正方形的邊長，如圖〈二十四〉。**



圖〈二十四〉

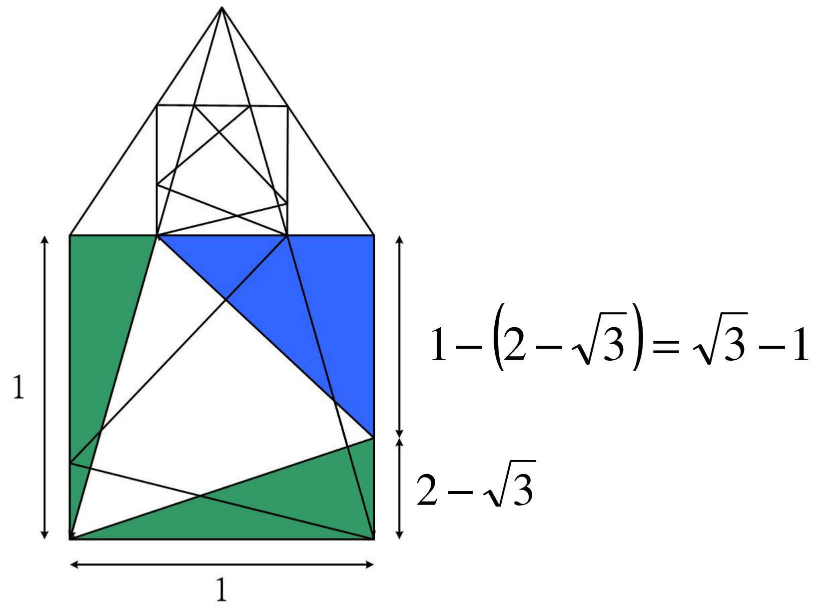




圖（二十五）　　　　　　　　　　圖（二十六）

我們將兩個圖形結合成一個來看，如圖（二十五）。**將正三角形的邊長設爲 1，稱它是單位正三角形，我們還發現單位正三角形的最大內接正方形其邊長剛好是單位正方形的最大內接正三角形其面積。**這也可以用分割的方法來證明，如圖（二十六）。以橘色畫出的平行四邊形，其面積就是上面那個小正方形的邊長。以橘色畫出的平行四邊形，其面積爲$1\times\left(2\sqrt{3}-3\right)$，而$2\sqrt{3}-3$就是上面那個小正方形的邊長。若把平行四邊形如圖切成三塊，正好可以拼和大正方形的內接正三角形的底邊。所以我們得到一個有趣的發現，就是單位正三角形的最大內接正方形其邊長剛好是單位正方形的最大內接正三角形其面積。雖然一個是長度、一個是面積，更嚴謹的說法應該是說它們是數值上的相等。

另外我們再將兩塊綠色的直角三角形面積和藍色等腰直角三角形的面積算出，如圖（二十七）。**發現兩個綠色直角三角形面積之和恰等於藍色等腰直角三角形的面積**。



圖〈二十七〉

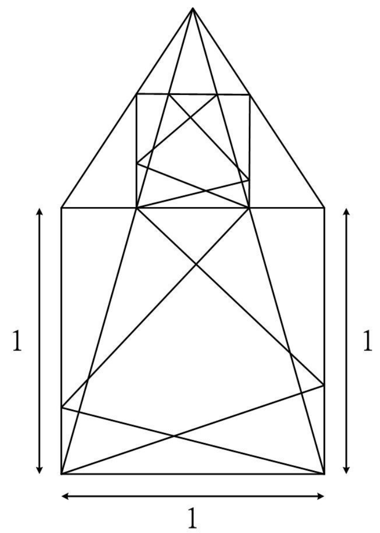
兩個綠色的直角三角形面積之和$=2\times\frac{1}{2}\times1\times\left(2-\sqrt{3}\right)=2-\sqrt{3}$

藍色等腰直角三角形的面積$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}-1\right)\times\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{1}{2}\times\left(3-2\sqrt{3}+1\right)$

$$=\frac{1}{2}\times\left(4-2\sqrt{3}\right)=2-\sqrt{3}$$

故得證兩個綠色直角三角形面積之和恰等於藍色等腰直角三角形的面積。

接著如果再依照前面的方法畫出正三角形最大內接正方形，再畫出正方形內接最大正三角形，一直持續畫下去，會出現一個有趣的圖形，也顯示出兩者的關聯，如圖（二十八）。



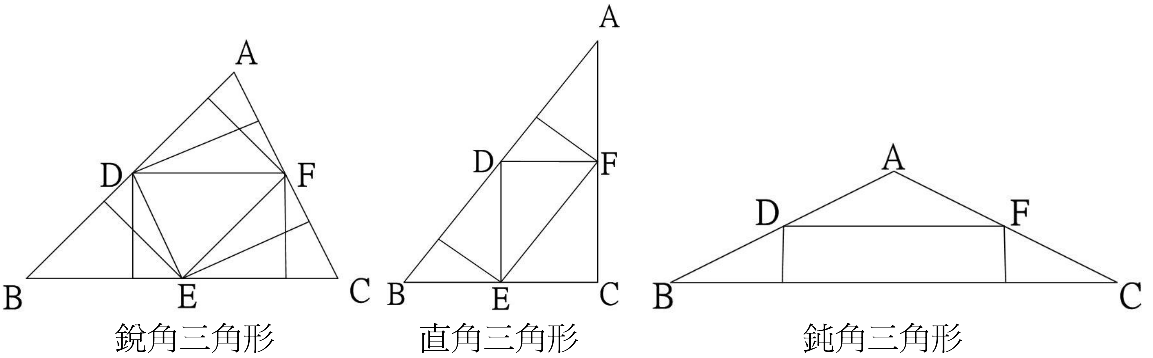
圖（二十八）

陸、 研究結果

根據我們一連串的想法，並實際操作跟證明發現幾點重要結果：

一、三角形最大內接長方形

三角形內畫出一個最大的內接長方形，只要由任何兩邊的中點向第三邊畫垂直線即可。最大長方形的面積恰為三角形面積的一半，且長方形的底是其所在三角形底邊長的一半。任何銳角三角形內皆可依此規則畫出三個同類的長方形，但形狀不一定相同；直角三角形則可畫出兩個；鈍角三角形只能畫出一個，如圖〈二十九〉。

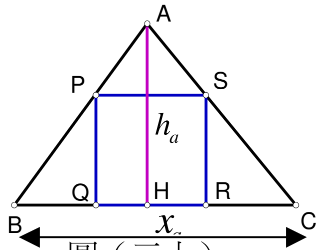


三角形 ABC 中，各邊中點分別為 D、E、F

圖（二十九）

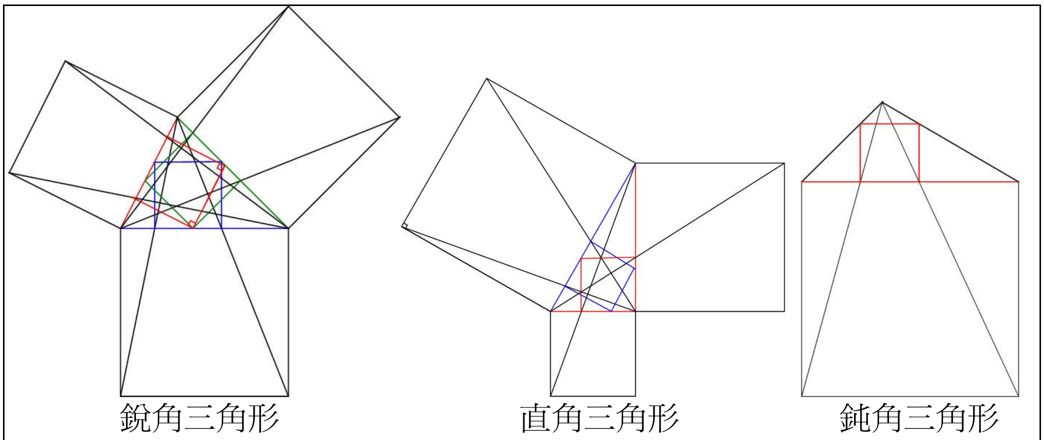
二、三角形最大內接正方形

（一）三角形內接正方形邊長的公式 $x_a = \dfrac{ah_a}{a+h_a}$ ，如圖〈三十〉。



圖（三十）

（二）三角形內畫出最大的內接正方形，有兩種方法。依此兩種方法發現銳角三角形內皆可畫出三個內接正方形；直角三角形則可畫出兩個；鈍角三角形只能畫出一個。且用 GSP 模擬的結果並證明發現銳角三角形中的內接正方形是與最短邊共邊的內接正方形最大；直角三角形卻只能畫出二個內接正方形，且與兩股共邊的較大，鈍角三角形只有一個內接正方形，即與最大邊共邊的內接正方形，如圖（三十一）。

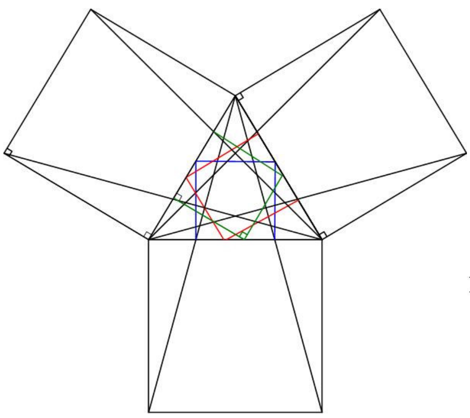


圖（三十一）

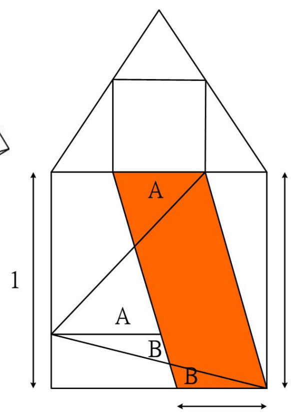
（三）正三角形的三個內接正方形面積皆一樣大，如圖（三十二）。

三、單位正三角形內接正方形的邊長剛好等於單位正方形內最大內接正三角形的面積，

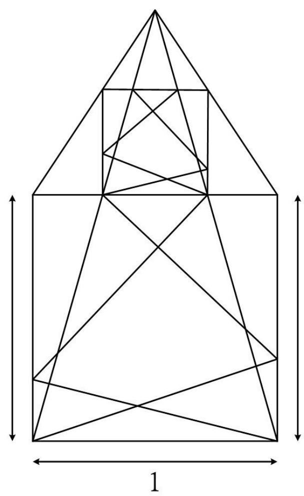
但這只是數值上的相等，如圖（三十三）。且先畫出正三角形最大內接正方形，再畫出正方形內接最大正三角形，一直持續畫下去，會出現一個有趣的圖形，也顯示出兩者的關聯，如圖（三十四）。



圖〈三十二〉

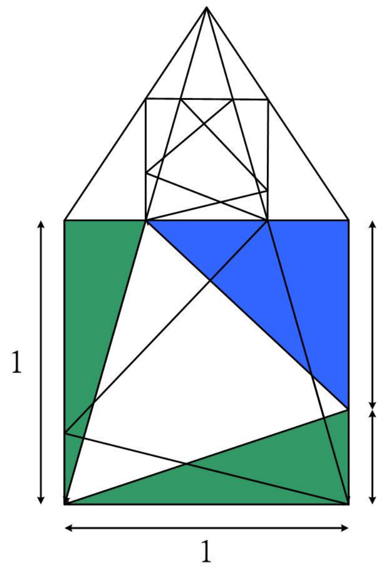


圖（三十三）



圖（三十四）

四、兩個綠色直角三角形面積之和恰等於藍色等腰直角三角形的面積，如圖（三十五）。



圖（三十五）

柒、 討論

一、單位正方形最大內接正三角形的面積，等於單位正三角形最大內接正方形的邊長，較精確來說應是指數值上的相等，因爲其中一個是指長度，另一個是指面積。

二、研究過程中我們發現正三角形中，沿著這個正三角形的三邊所做出的三個最大內接正方形，它們的面積會相等。這種情形是否只對正三角形才成立呢？這個問題是還能再繼續深入研究的。

捌、 結論

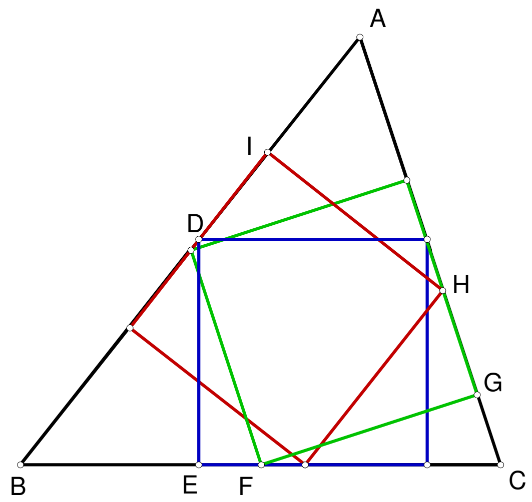
從這次做科展的過程中我們了解到很多問題的解決方法不只一種，可以發揮不同的創造力去想像，再從我們學過的東西去驗證它。另外我們更學習到如何使用電腦 GSP 繪圖軟體，運用科技把我們所要的情況在電腦中模擬出來，不會憑空想像，想得頭昏眼花，讓我們收穫良多，在這個科技發達的時代，我們果真不能落於人後。

玖、 參考資料及其他

一、胡守仁譯（民 93）。打開魔數箱。台北市：遠流出版社。

二、國立台灣師範大學數學系網路小組編撰。動態幾何操作手冊。九章出版社

《附件一》

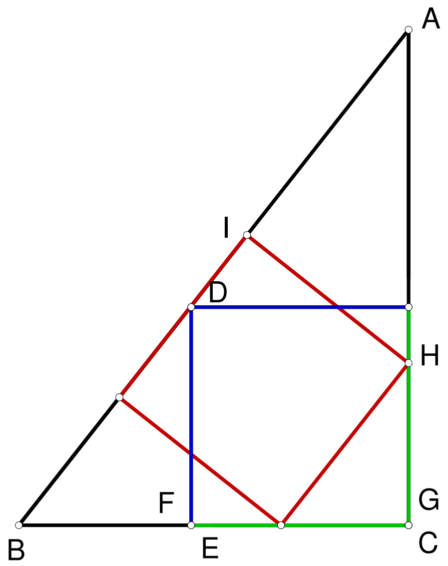


$\angle A$	24.97	37.12	48.09	55.05	66.95	74.20	81.00	84.00
$\overline{BC}(cm)$	2.71	4.01	5.21	5.64	7.40	7.90	6.66	6.87
$\overline{DE}(cm)$	1.88	2.40	2.75	2.76	3.16	3.13	2.19	2.25

$\angle B$	80.73	74.46	69.86	60.82	62.79	56.92	32.00	33.00
$\overline{CA}(cm)$	6.34	6.41	6.57	6.00	7.15	6.88	3.54	3.73
$\overline{FG}(cm)$	1.85	2.36	2.71	2.75	3.17	3.19	2.24	2.33

$\angle C$	74.30	68.42	62.05	64.13	50.26	48.89	67.00	63.00
$\overline{AB}(cm)$	6.19	6.19	6.19	6.19	6.19	6.19	6.19	6.19
$\overline{HI}(cm)$	1.87	2.38	2.73	2.74	3.19	3.20	2.24	2.32

《附件二》

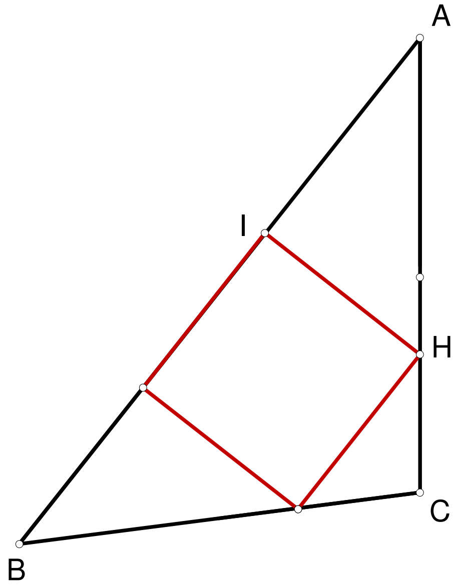


$\angle A$	53.31	41.32	90.00	90.00	48.80	37.72
$\overline{BC}\,(cm)$	6.57	4.95	11.05	7.44	6.31	4.11
$\overline{DE}\,(cm)$	2.81	2.63	3.16	2.48	2.95	2.32

$\angle B$	36.69	48.68	63.43	44.80	90.00	90.00
$\overline{CA}\,(cm)$	4.90	5.63	9.88	5.24	8.39	6.72
$\overline{FG}\,(cm)$	2.81	2.63	3.29	2.63	2.78	2.19

$\angle C$	90.00	90.00	26.57	45.20	41.20	52.28
$\overline{AB}\,(cm)$	8.20	7.50	4.94	5.28	5.53	5.32
$\overline{HI}\,(cm)$	2.65	2.48	3.29	2.63	2.95	2.32

《附件三》



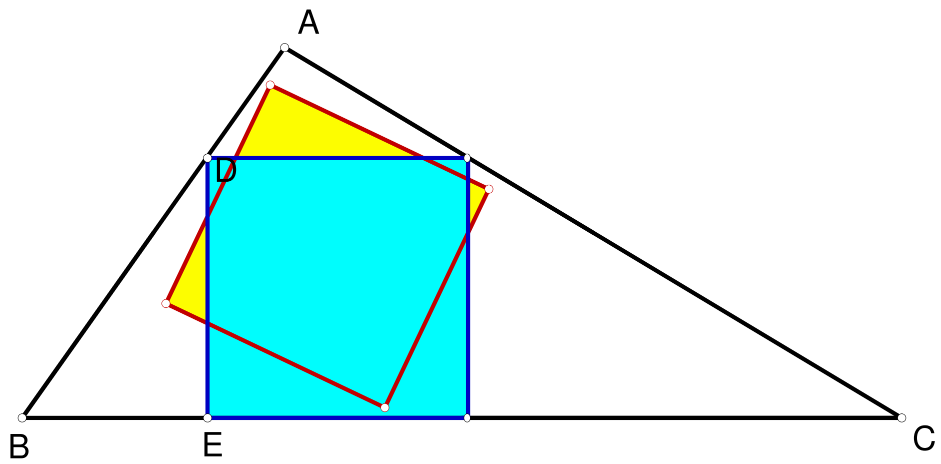
$\angle A$	90.54	108.5	59.97	46.02	33.04	28.26
$\overline{BC}(cm)$	12.26	12.44	9.25	8.23	4.19	4.19
$\overline{DE}(cm)$	3.34	2.92				

$\angle B$	65.07	48.80	91.76	107.7	38.01	30.30
$\overline{CA}(cm)$	11.11	9.87	10.68	10.90	4.69	4.46
$\overline{FG}(cm)$			3.11	2.73		

$\angle C$	24.40	22.69	28.28	26.27	108.5	121.4
$\overline{AB}(cm)$	5.06	5.06	5.06	5.06	7.21	7.55
$\overline{HI}(cm)$					1.90	1.65

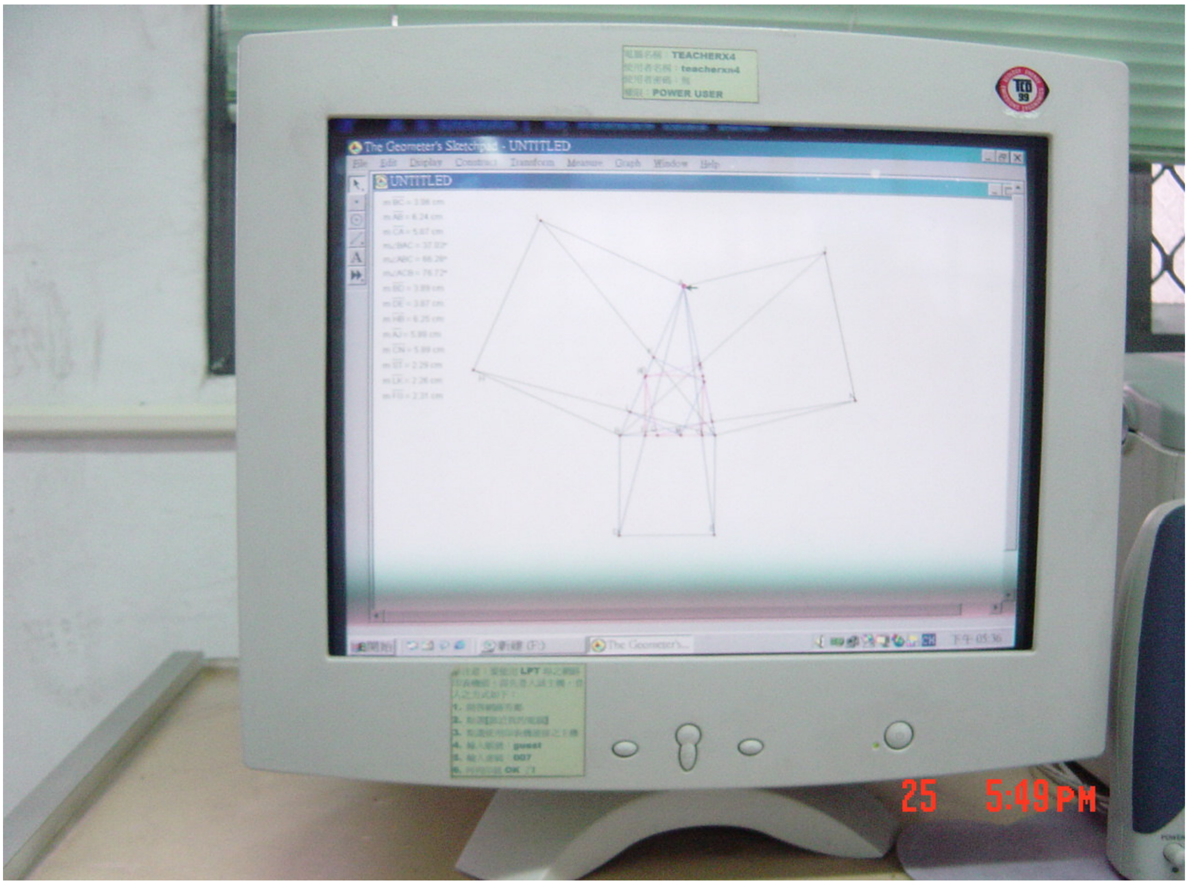
《附件四》

此爲示意圖，以鈍角三角形爲例，比較內部正方形與內接正方形的大小，內部正方形的變化，要實際以 GSP 操作，才能清楚。



黃色矩形面積 (cm^2)	6.16	8.20	9.01	7.31	9.94	10.46
藍色矩形面積 (cm^2)	10.75	10.75	10.75	10.75	10.75	10.75

《附件五》



中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國中組 數學科

最佳(鄉土)教材獎

030411

「接」大歡喜

臺中縣立順天國民中學

評語：

從國中教材的幾何內容出發，引發一系列有趣的探究。報告內容圖文並載，可惜臨場答題的能力稍弱。