中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組 數學科

030406

魔數

苗栗縣立竹南國民中學

作者姓名：
國一 鄒慶叡 國一 劉志豪 國一 林己豪
國一 劉欣宜

指導老師：
陳玉琪 陳美娟

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

作品說明書

科別 ： 數學領域

組別 ： 國中學生組

作品名稱 ： 魔 數

關鍵詞 :數形關係、等差數列、規律

編號 ：

壹、摘要

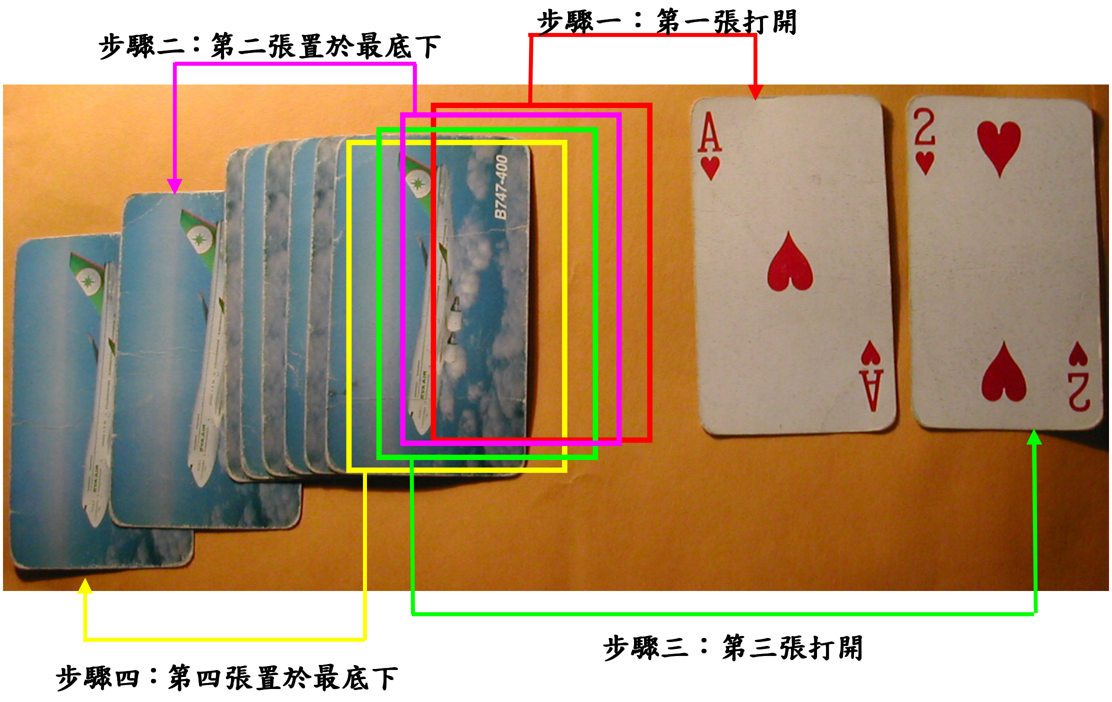
當數學課上到數形關係時，想起之前偶然看到的一個遊戲，便向老師請教是否與所學的單元有關，老師也覺得頗有趣，於是我們找了幾位志同道合的夥伴研究討論。

該遊戲的規則是這樣的：將點數爲 1~10 的 10 張撲克牌疊成一疊（背面朝上），翻開第一張爲數字 1，第二張放到最底下，翻開第三張爲數字 2，第四張再放到最底下，依此類推，使得撲克牌出現的順序依序爲 1~10。爲了找到如何排列能使撲克牌出現順序合於上述規則，於是展開我們的研究，結果發現此 10 張撲克牌的排列順序隱含著某些規律且可延伸至更多張的數字牌，此外，更能進一步的推出某個位置該放何數字或某數字該置於何位置的規律。

貳、研究動機

去年一次偶然的機會去參觀全國創意博覽會，當中有一個攤位的數學益智遊戲非常有趣，至今仍記憶猶新。原本對數學沒有興趣的我，看到人潮不斷湧入，心中好奇心驅使向前一探究竟，沒想到一待就是一整天，第一次這麼認真努力思考雖然仍沒有想出其邏輯概念與運用的數學原理，心中也有著書到用時方恨少的感慨，但這是第一次感覺數學離我好近，彷彿是隨手可得的知識。回來之後，我找尋各類書籍都無法獲得詳細的解析。

正好今年數學課上到數形關係，便想起心中這個存在已久的疑問，於是請教數學老師，詢問如何能解開將序號 1~10 撲克牌排列後，使得翻開第一張是 1，次一張放到最後，再次一張打開一定是 2（如下圖），依此類推之謎。老師覺得問題很有趣且極富創意，引導了我們方向和觀念，本著科學研究的精神和熱愛數學的心情，在老師細心指導和啓發下，展開一連串的研究活動。發現平凡撲克牌中的奧妙，讓我們對數學有新體認，打破傳統觀念--數學是一門艱深學科的迷思，數學不是一門艱深的學問，而是與生活息息相關的課程，誠摯邀請您一同參與我們的數學研究之旅，將帶領你們發現另類數學和數學奧妙。



參、研究目的

1. 將點數為 1~10 的 10 張撲克牌疊成一疊（背面朝上），翻開第一張為數字 1，第二張放到最底下，翻開第三張為數字 2，第四張再放到最底下，依此類推，使得撲克牌出現的順序依序為 1~10，如何排列能使撲克牌出現順序合於上述規則？
2. 想瞭解是否能延伸至更多張牌。
3. 希望探得某個位置該放置何數字的規律。
4. 盼能找到某個數字該置於何位置的規律。

肆、研究設備及器材

撲克牌、數字卡、電腦、紙、筆

伍、研究過程或方法

首先，為了找出 10 張撲克牌的排列順序，我們在紙上寫下位置 1～位置 10，因為一開一蓋，所以位置 1 要放撲克牌的數字 1，而位置 2 為蓋則留至第二層討論，位置 3 是第二個打開的位置，因此放數字 2，而位置 4 為蓋，留至第二層討論，依此類推，可輕易知道位置 1、3、5、7、9 該放何數字，如下表所示：

第一層位置	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
數字	1	X	2	X	3	X	4	X	5	X
第二層		↓		↓		↓		↓		↓

接著討論第二層的位置該放何數字，由上表可知第二層的位置尚有 2、4、6、8、10，因為第一層最後一張牌為蓋，且最後一張開的牌是放數字 5，所以第二層的第一個位置 2 為開，該放數字 6，第二個位置 4 為蓋留至第三層討論，第三個位置 6 為開，放數字 7，依此類推，如下表所示：

第一層位置	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
數字	1	X	2	X	3	X	4	X	5	X
第二層		↓		↓		↓		↓		↓
數字		6		X		7		X		8
第三層				↓				↓		

最後，第三層的位置尚有 4、8，因為第二層的最後一個位置為開，所以第三層的第一個位置 4 為蓋，留至第四層討論，第二個位置 8 為開，且第三層最後一張開的牌是放數字 8，所以位置 8 放數字 9，而第四層的位置則放最後一張牌為數字 10，如下表所示：

第一層位置	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
數字	1	X	2	X	3	X	4	X	5	X
第二層		↓		↓		↓		↓		↓
數字		6		X		7		X		8
第三層				↓				↓		
數字				X				9		
第四層				↓						
數字				10						

綜合以上之敘述可知，在一開一蓋的原則下，10 張撲克牌之排列順序爲：1、6、2、10、3、7、4、9、5、8，如下表所示：

位置 / 層數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
第一層	1	X	2	X	3	X	4	X	5	X
第二層		6		X		7		X		8
第三層				X				9		
第四層				10						
數字排列順序	1	6	2	10	3	7	4	9	5	8

在經過一段時間大家的研究思索，發現每一層似乎有其規律，以下就每一層各舉一個示例。

一、第一層可開數的位置分別位在 1、3、5、7、9 的位置，這五個位置正好是首項爲 1、公差爲 2（$=2^1$）的等差數列。利用該層的規律可判斷某個位置是否在此層開。例如：

(一)第 7 個位置是否在第一層開？

$7 = 1 + 2(p-1) \Rightarrow p = 4$（p爲整數，所以合）

由上式可知第 7 個位置確實在第一層開，且是該層第 4 個開的位置。

(二)第 4 個位置是否在第一層開？

$4 = 1 + 2(p-1) \Rightarrow p = \frac{5}{2}$（p不爲整數，所以不合）

由上式可知第 4 個位置不在第一層開。

二、第二層可開的數分別位在 2、6、10 的位置，這三個位置正好是首項爲 2、公差爲 4（$=2^2$）的等差數列。利用該層的規律可判斷某個位置是否在此層開。例如：

(一)第 10 個位置是否在第二層開？

$10 = 2 + 4(p-1) \Rightarrow p = 3$（p爲整數，所以合）

由上式可知第 10 個位置確實在第二層開，且是該層第 3 個開的位置。

(二)第 3 個位置是否在第二層開？

$3 = 2 + 4(p-1) \Rightarrow p = \frac{5}{4}$（p不爲整數，所以不合）

由上式可知第 3 個位置不在第二層開。

三、第三層可開的數位在 8 的位置，這個位置正好是首項爲 8，且由前兩層推測公差爲 8（$=2^3$）的等差數列。利用該層的規律可判斷某個位置是否在此層開。例如：

(一)第 8 個位置是否在第三層開？

$8 = 8 + 8(p-1) \Rightarrow p = 1$（p爲整數，所以合）

由上式可知第 8 個位置確實在第三層開，且是該層第 1 個開的位置。

(二)第 2 個位置是否在第三層開？

$2 = 8 + 8(p-1) \Rightarrow p = \frac{1}{4}$（p不爲整數，所以不合）

由上式可知第 2 個位置不在第三層開。

四、第四層可開的數位在 4 的位置，這個位置正好是首項爲 4，由前幾層推測公差爲 16（$=2^4$）的等差數列。利用該層的規律可判斷某個位置是否在此層開。例如：

(一)第 4 個位置是否在第四層開？

$4= 4+ 16(p-1) \Rightarrow p = 1$（p爲整數，所以合）

由上式可知第 4 個位置確實在第四層開，且是該層第 1 個開的位置。

(二)第 5 個位置是否在第四層開？

$5= 4 + 16(p-1) \Rightarrow p = \frac{17}{16}$（p不爲整數，所以不合）

由上式可知第 5 個位置不在第四層開。

陸、研究結果

由 10 張撲克牌的研究過程中發現其似乎存在著某些規律，且依其規律可輕易推得某個位置該放何數字，但此規律是否可延伸至無數張牌呢？因此我們嘗試排出其它張數之情形，發現此規律可應用在任何張數的數字牌。以下，就我們所得到的結果，分三個部分討論。首先介紹欲使用之代數符號；其次探討層數之判斷、可開數之間的關係及開出數字之位置等；第三部分則舉例說明如何依照我們得到的結論推出某個位置該放何數字。

一、代數符號說明：爲避免本文有過多之重覆字眼及冗文，因此設定代數符號如下表：

符號	意　　義	符號	意　　義
N	總張數	k	可開數位置
n	各層所剩張數	d	可開數位置之公差
m	開出數字之位置	○	開牌
a	開出位置之數字	╳	蓋牌
s	層數		

二、由一開一蓋的規則下，可知偶數位置之數字並非簡單而可反應得知，因此需先考慮其層數及各可開數之關係。

(一)層數（s）之判定原則：

每一層約會開出該層所剩張數的二分之一(因爲每層張數的奇偶數及先開或先蓋之別而有所不同)，

因此層數（S）之決定方式爲 $2^{(S-1)} < N \leqq 2^{S}$

如 7 張牌（$2^{2} < 7 \leqq 2^{3}$，因此 7 張牌時爲三層）

17 張牌（$2^{4} < 17 \leqq 2^{5}$，因此 17 張牌時爲五層）

34 張牌（$2^{5} < 34 \leqq 2^{6}$，因此 34 張牌時爲六層）

(二)各層之可開數位置關係：

得知總層數之後，我們更需得知各層之可開數位置共有幾個，故先討論可開數位置之差距爲何？（即決定可開數位置之公差：d）

由於各層約開出該層所剩張數之二分之一，因此各層可開數位置之差距（d）爲 2^{s}

如：第一層(即 s = 1)相距 2 格、第二層(即 s = 2)相距 4 格，第三層(即 s = 3)相距 8 格…依此類推。

(三)透視總張數、各層所剩張數、層數與可開數之間關聯性：

由 10 張撲克牌的第三層爲例可知，並非每一層皆由第一個 k 開始，而不是一個固定的型式，因此本段將依每層之 n 爲偶數或奇數介紹 N、n、s 與 k 之關係，而此段雖較

爲繁雜但不失爲本文之重點所在。

1. 判定每一層之開出數：

由開牌原則中可知，n 爲偶數時若第一張爲○（╳），則最後一張則爲╳（○），即每兩張一組，故於一層之中會開出$\frac{n}{2}$張；n 爲奇數時若第一張爲○（╳），則最後一張亦爲○（╳），其中第一張爲○時，因頭尾皆有開出數字，故同一層之中會開出$\frac{n+1}{2}$張；而第一張爲╳時，頭尾皆無開出數字，因此同一層之中只會開出$\frac{n-1}{2}$張。

2. 了解每一層之第一個 k 值之決定：

若該層 n 爲偶數時，則該層之最後一個數爲╳，同時於一開一蓋之規則下，下一層之第一個 k 值即爲開始數。反之若 n 爲奇數時，則該層之最後一個數爲○，下一層之第一個 k 值需放棄由第二個 k 爲開始數。

3. k 值之決定：

除第一層之第一個 k 爲 1 外，其餘各層之 k 皆不固定，看似變化無常但事實上卻是有跡可尋。第一層開出所有的奇數位即 k = 1，3，5，…，N-1（當 N 爲偶數）或 N（當 N 爲奇數），此時剩下偶數位置未開，因此第二層之後 k = 2，4，6，…，N（當 N 爲偶數）或 N-1（當 N 爲奇數）。若第一層之最後一張爲○，則可依 2.之原則，放棄 k = 2 改選擇下一個 k = 4 爲該層的第一個可開數。此外，因爲此層爲第二層，故 d 爲 4，即此層 k = 4 + 4(p-1)（$1 \le p \le \frac{N}{4}$，p 爲整數）；反之若第一層之最後一個數爲╳，則此層 k = 2 + 4(p-1)（$1 \le p \le \frac{N+2}{4}$，p 爲整數），依此類推可知各層之 k 值。

4. 利用 k 值找出 m 所在之層次：

由於 k 值爲每一層之可開數位置且 m 亦爲某一可開數，因此 k 與 m 值有個細微的關係，即可透過檢驗 m $\overset{?}{=}$ (第一個 k) + d × (p-1)時，若等號不成立，則需再向下一層討論，而當等號成立時，即可判定 m 屬於該層且可知位於該層之第幾個可開數。

5.決定 k 值之後，如何推知第 m 張牌數字爲何？在此將分別討論 m 爲奇數與 m 爲偶數之情況。

(1) 當 m 爲奇數時，因爲開牌規則爲一開一蓋，因此第一層$a = \frac{m+1}{2}$，此外亦可利用本文之方法求解，即第一層之第一個 k = 1 且 d = 2 可得 k = 1+2(p-1)（$1 \le p \le \frac{N+1}{2}$，p 爲整數），利用 1.、2.、3.、及 4.之原則可知，若 m = 1 + 2 (p-1)（$1 \le p \le \frac{N+1}{2}$，p 爲整數）時，則 a = p（如：N=10、m=7 時，則$a = \frac{7+1}{2} = 4$ 或 7 = 1 + 2 (p-1) ⇒ p = 4 ⇒ a = p = 4）。

(2)當 m 爲偶數時，第一層開出$\frac{m}{2}$張，第二層之 n 若爲偶（或奇）數，則再開出$\frac{n}{2}$（或

$\frac{n+1}{2}$)張，而第三層之後則需考慮 n 爲偶數或奇數及第一個可開數是否開出等因素，已於 1.中說明不再贅述，主要著重於 a 值之決定。由於第一層已開出$\frac{N}{2}$張（即數字 1，2，3，……，$\frac{N}{2}$已開出）且第二層之可開數字將由$\frac{N}{2}+1$開始，因此在此需先以 4.之方法檢驗 m $\overset{?}{=}$ (第一個 k) + d × (p-1)，若等號成立則可知$a=\frac{N}{2}+P$（即第 m 個數之值），若等號不成立則需再討論第三層，依此方式逐層討論便可得知任何位置之數字爲何。

三、透過以上之推論過程，可知此數字牌之排列仍有其規則可尋，將於此段分別舉奇數及偶數張數字牌之例子爲說明，使更了解推論方法之應用。

(一)、 當總數 12 張，試問第 5 張牌及第 6 張牌之數字爲何？

1. N = 12，m = 5

由於 m = 5 爲奇數，因此$a=\frac{m+1}{2}=\frac{5+1}{2}=3$

即第 5 張牌數字爲 3

2. N = 12，m = 6

第一層 N=12（可開出數位置爲 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12），

⇒ N 爲偶數

⇒ 由第一個可開數開出（○╳○╳………○╳），第一個 k = 1 且 d = 2

⇒ 開出$\frac{N}{2}=\frac{12}{2}=6$張

⇒ k = 1 + 2(p-1)，（$1\le p\le\frac{N+1}{2}$，p 爲整數）

⇒ 檢驗 m $\overset{?}{=}$ k = 1 + 2(p-1) ⇒ 6=$m\neq$1+2(p-1) ⇒ p = $\frac{7}{2}$ (不合)

⇒ 討論第二層

第二層 n = 6（可開出數位置爲 ~~1~~，2，~~3~~，4，~~5~~，6，~~7~~，8，~~9~~，10，~~11~~，12），

⇒ n 爲偶數

⇒ 上一層之最後一個 k 爲╳ ，故此層由第一個可開數開始

⇒ 由第一個可開數開出（○╳○╳○╳），第一個 k = 2 且 d = 4

⇒ 開出$\frac{n}{2}=\frac{6}{2}=3$張

⇒ k = 2 + 4(p-1)，（$1\le p\le\frac{N+2}{4}$，p 爲整數）

⇒ 檢驗 m $\overset{?}{=}$ k = 2 + 4(p-1) ⇒ $6=m=2+4(p-1)\Rightarrow p=2$(合)

⇒ 由於 p = 2 因此$a=\frac{\text{N}}{2}+p=\frac{12}{2}+2=8$

⇒ 即第 6 張牌數字爲 8

(二)、 當總數 25 張，試問第 22 張牌之數字爲何？

N = 25，m = 22

第一層　N=25（可開出數位置爲 1，2，3，4，……，23，24，25），

⇒ N 爲奇數

⇒ 由第一個可開數開出（○╳………○╳○），第一個 k = 1 且 $d = 2^1=2$

⇒ 開出 $\dfrac{N+1}{2}=\dfrac{25+1}{2}=13$ 張

⇒ k = 1 + 2(p-1)，　$\left(1\le p\le \dfrac{N+1}{2}\right.$，　p 爲整數）

⇒ 檢驗 m $\stackrel{?}{=}$ k = 1 + 2(p-1)　⇒ $22=m\neq 1+2(p-1)\Rightarrow p=\dfrac{23}{2}$ (不合)

⇒ 討論第二層

第二層　n = 12（可開出數位置爲 ~~1~~，2，~~3~~，4，~~5~~，6，~~7~~，8，~~9~~，10，~~11~~，12，~~13~~，14，~~15~~，16，~~17~~，18，~~19~~，20，~~21~~，22，~~23~~，24，~~25~~）

⇒ n 爲偶數

⇒ 上一層之最後一個 k 爲○　，故此層放棄第一個可開數，改由第二個可開數開始

⇒ 第二個可開數開出（╳○╳……╳○），第一個 k=4 且 $d = 2^2 = 4$

⇒ 開出 $\dfrac{n}{2}=\dfrac{12}{2}=6$ 張

⇒ k = 4 + 4(p-1)，　$\left(1\le p\le \dfrac{N}{4}\right.$，p 爲整數）

⇒ 檢驗 m $\stackrel{?}{=}$ k = 4 + 4(p-1)　⇒ $22=m\neq 4+4(p-1)\Rightarrow p=\dfrac{11}{2}$ (不合)

⇒ 討論第三層

第三層　n = 6（可開出數位置爲 ~~1~~，2，~~3~~，~~4~~，~~5~~，6，~~7~~，~~8~~，~~9~~，10，~~11~~，~~12~~，~~13~~，14，~~15~~，~~16~~，~~17~~，18，~~19~~，~~20~~，~~21~~，22，~~23~~，~~24~~，~~25~~）

⇒ n 爲偶數

⇒ 上一層之最後一個 k 爲○，故此層放棄第一個可開數，改由第二個可開數開始

⇒ 第一個可開數開出（╳……○），第二個 k=6 且 $d = 2^3 = 8$

⇒ 開出 $\dfrac{n}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ 張

⇒ k = 6 + 8(p-1)，（$1\le p\le \dfrac{N+2}{8}$，p 爲整數）

⇒ 檢驗 m $\stackrel{?}{=}$ k = 6 + 8(p-1)　⇒ $22=m=6+8(p-1)\Rightarrow p=3$(合)

⇒ 由於 p = 3 因此 $a=\dfrac{N+1}{2}+\dfrac{n}{2}+p=\dfrac{25+1}{2}+\dfrac{12}{2}+3=22$

⇒ 即第 22 張牌數字爲 22

(三)、 當總數 100 張，試問第 46 張牌之數字爲何？

N = 100，m = 46

第一層　N=100（可開出數位置爲 1，2，3，4，5，………，98，99，100），

⇒ N 爲偶數

⇒ 第一個可開數開出（〇╳〇╳………〇╳），第一個 k = 1 且 d = 2

⇒ 開出 $\frac{N}{2}=\frac{100}{2}=50$ 張

⇒ k = 1 + 2(p-1)，　（$1\le p\le\frac{N+1}{2}$，p 爲整數）

⇒ 檢驗 m $\overset{?}{=}$ k = 1 + 2(p-1) ⇒ $46=m\neq 1+2(p-1)\Rightarrow p=\frac{47}{2}$ (不合)

⇒ 討論第二層

第二層　n = 50（可開出數位置爲 ~~1~~，2，~~3~~，4，~~5~~，6，……~~97~~，98，~~99~~，100），

⇒ n 爲偶數

⇒ 上一層之最後一個 k 爲╳ ，故此層由第一個可開數開始

⇒ 第一個可開數開出（〇╳〇╳〇╳），第一個 k=2 且 d = 4

⇒ 開出 $\frac{n}{2}=\frac{50}{2}=25$ 張

⇒ k = 2 + 4(p-1)，（$1\le p\le\frac{N+2}{4}$，p 爲整數）

⇒ 檢驗 m $\overset{?}{=}$ k = 2 + 4(p-1) ⇒ $46=m=2+4(p-1)\Rightarrow p=12$ (合)

⇒ 由於 p = 12，因此 $a=\frac{\mathrm{N}}{2}+p=\frac{100}{2}+12=50+12=62$

⇒ 即第 46 張牌數字爲 62

柒、討論

從以上的結果我們知道任何張數之數字牌都可推得某個位置該放何數字，而此時心中不免產生一個疑問，反向思考是否可行呢？也就是說是否可以推得某個數字該放在何位置？經過大家討論後，發現這是個可行的想法，在此，我們直接以前述的概念舉例說明之。

(一)、 當總數 14 張，試問數字 5 應該排在第幾個位置？

N = 14，a = 5

⇒ 因爲 $a\le\frac{\mathrm{N}}{2}=\frac{14}{2}=7$，因此將出現於第一層之第 5 個可開數

⇒ 第一層之第一個 k = 1 且 d = 2

⇒ $m=1+d\times(p-1)=1+2\times(5-1)=9$

⇒ 數字 5 排於第 9 張牌

(二)、 當總數 20 張，試問數字 14 應該排在第幾個位置？

N = 20，a = 14

⇒ 因爲 $a>\frac{\mathrm{N}}{2}=\frac{20}{2}=10$，因此數字 14 不會出現於第一層

⇒ 第一層爲偶數張且由第一個可開數開始

（爲○╳……○╳形態，開出$\frac{N}{2}=\frac{20}{2}=10$張）

⇒第二層 n = 20－10 = 10 爲偶數且由第一個可開數開始

（爲○╳……○╳形態，開出$\frac{n}{2}=\frac{10}{2}=5$張），此時第一層及第二層之可開數和已大於 14，因此數字 14 會出現在第二層之第 4 個可開數。

（第二層之可開數爲 ~~1~~，2，~~3~~，4，~~5~~……，18，~~19~~，20）

⇒第二層之第一個 k = 2 且 d = 4

⇒ $m=2+d\times(p-1)=2+4\times(4-1)=14$

⇒數字 14 排於第 14 張牌

(三)、 當總數 100 張，試問數字 78 應該排在第幾個位置？

N = 100，a = 78

⇒因爲$a>\frac{N}{2}=\frac{100}{2}=50$，因此數字 78 不會出現於第一層

⇒第一層爲偶數且由第一個可開數開始

（爲○╳……○╳形態，開出$\frac{N}{2}=\frac{100}{2}=50$張）

⇒第二層 n = 100－50 = 50 爲偶數且由第一個可開數開始

（爲○╳……○╳形態，開出$\frac{n}{2}=\frac{50}{2}=25$張），此時第一層及第二層之可開數和爲 75，第二層之可開數爲 ~~1~~，2，~~3~~，……，98，~~99~~，100），第一個 k 爲 2，d = 4

⇒第三層 n = 50－25 = 25 爲奇數且由第一個可開數開始

（爲○……○形態，開出$\frac{n+1}{2}=\frac{25+1}{2}=13$張），此時前三層可開數和爲 88 已大於 78，因此數字 78 會出現在第三層之第 3（= 78 - 75）個可開數。

（第三層之可開數爲 ~~1~~，~~2~~，~~3~~，4，~~5~~，~~6~~，7，8……，~~98~~，~~99~~，100）

第一個 k 爲 4，d = 8

⇒ $m=4+d\times(p-1)=4+8\times(3-1)=20$

⇒數字 78 排於第 20 張牌

捌 、結論：

1. 依照我們所設定的規則可推出 10 張撲克牌的排列順序爲：

2. 找出 10 張撲克牌的規律後更進一步發現此規律可延伸至無數張數字卡。
3. 研究結果發現，可輕易地找出數字依序為 1~N 的 N 張數字卡中，某個位置該放何數字，或某數字該放置於何位置。

玖、參考資料及其他：

*國中數學課本(一下)，民國 94 年 2 月第三版，康軒文教事業股份有限公司，p.41~56 。
*國中數學課本(三下)，民國 94 年 2 月初版，康軒文教事業股份有限公司，p.100~117。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國中組 數學科

030406

魔數

苗栗縣立竹南國民中學

評語：

討論數列依某種規律重排後，原先的某一項在變動後所得出的新數列中的位置。是蠻有趣的問題，但作者似乎未能掌握變動規則所給的特性。對於已知的項數 n 和其中的第 $2^{\pi}(2j-1)$ 項，應該可以導出一個相對於 n、π、j 的變動後的項數的一般表示式。另一方面，若能將規則延伸為每次移動的不只一項，而是 k 項，得出更一般化的結果，將會更好。