中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

080419

會隱身術的平方公分

臺北縣蘆洲市鷺江國民小學

作者姓名：
小五 王薇婷 小五 葉盛 小四 曾馨玉

指導老師：
曾馨儀 林育滋

會 隱 身 術 的 平 方 公 分

壹、摘要

探討原正方形經拼湊組合成的長方形面積會減少一平方公分可能的原因，另外，由角度與相似三角形邊長與邊長比值相等的原理來觀察。實際上由於原正方形切割成兩小角形，及兩梯形後，小三角形與梯形組合後並未成為一大三角形，以致於全部組合後，有面積重疊的地方。

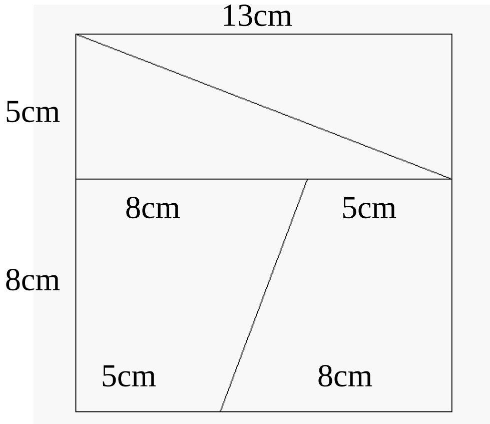
我們推論出的公式：原正方形邊長甲，切割長度乙，則面積差量 =拼湊後長方形的面積－原正方形的面積=〔（2 × 甲－乙）×（甲－乙）〕－（甲 × 甲）。而我們發現.任一正方形邊長甲都可以找到一最佳切割比例，及長度乙≦甲/2，且以最接近甲/2 的長度時，使得拼成後的長方形面積與原正方形面積的差量為最小，並可將拼成後的長方形歸類為凸出型（以⊕表示）與凹陷型（以Θ表示）兩種類型：

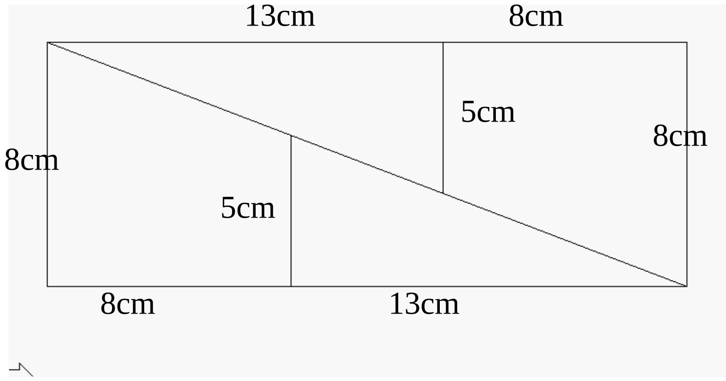
最後我們歸納出一規則，即相同面積差量的每一列中的每一數恰好是前兩數的和（最前面兩數除外），也就是說，對每一列數任取連續三數（A，B，C）就是一組最佳組合，C 為正方形邊長甲，A 為切割比例乙，而面積差量＝B×（2B－A）－C×C＝B×（B+C）－C×C 最小。另外，亦可連續四數為一組合（A、B、C、D）， D 即為組合後長方形長，B 為寬，因此面積最小差量為：B×（B+C）－C×C＝B×D－C×C，可用來預測出不同的正方形邊長甲，它們所得到的面積最小差量相同的最佳切割值。.

另外，我們可以面積差量＝1（如底色為黃色那一列）正方形邊長為依據，我們將其面積差量＝1 的正方形邊長甲×倍數，即可預測得到最小面積差量＝倍數×倍數。反之，我們亦能根據面積差量最小值所分解成平方數 a× a（倍數×倍數），預測得到最佳正方形邊長＝如底色為黃色那一列正方形邊長甲×a（倍數）。同時，經由我們整理出的規則，預測面積差量為平方倍之正方形邊長，並依據面積差量＝1 的正方形邊長，來預測得到長度為倍數之最佳正方形邊長的凹凸類型

貳、研究動機

這個學期在上數學課時，對於「圖形的面積」單元中有關切割與拼湊就能轉變成另一種圖形，感到十分的有趣。有一天，薇婷在益智書－（跳出思路的陷阱）一書中看到令我們有濃厚的興趣的一個題目，如下方：





正方形面積：13 × 13 ＝ 169（平方公分）

長方形面積：21 × 8 ＝168 （平方公分）

奇怪的是拼成後的圖形竟然少了 1 平方公分，究竟 1 平方公分跑到哪裡去了，難道它會隱身術嗎？於是我們找了幾位有興趣的朋友，著手研究。

參、研究目的

一、探討經切割再拼湊組合後，減少 1 平方公分可能的原因？

二、探討減少 1 平方公分的計算公式？

三、探討當正方形邊長一定時，不同的切割比例，再拼湊組合後長方形面積的變化情形？

四、如何在任意一正方形中，找出一組最佳的切割比例，使拼湊組合後的長方形面積與原正方形面積的差量為最小？

四、研究工具

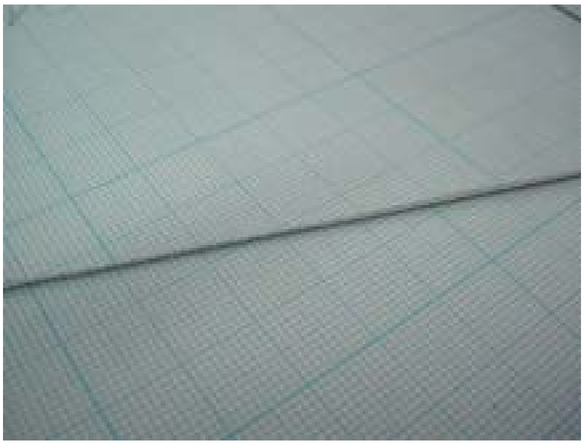
西卡紙、方格紙、剪刀、美工刀、量角器。

伍、研究過程

【研究一】探討經切割再拼湊組合後，減少 1 平方公分可能的原因？

（方法一）：在方格紙上將原來正方形圖形，依比例放大 2 倍、3 倍後，做切割再拼湊組合成長方形，觀察其情形，如圖（1）。

圖（1）：將原來正方形圖形放大 3 倍，做切割再拼湊組合成長方形

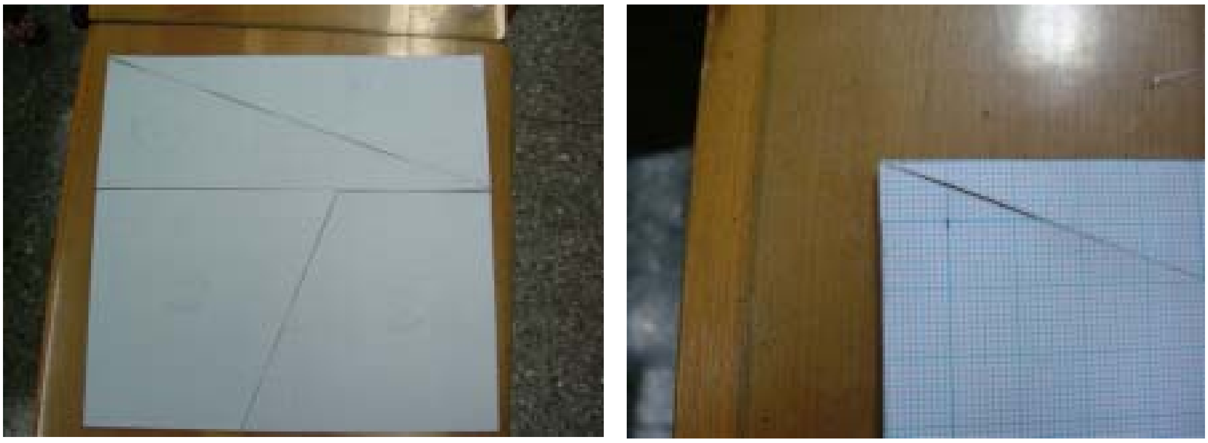


結果：

1.由正方形圖（1）放大 3 倍後，拼湊組合後長方形有重疊之處並不明顯， 但放大 3 倍以後，可以看出拼湊組合後長方形對角線附近區域有重疊的地方，這可能就是減少 1 平方公分的區域所在。

（方法二）：先在方格紙上畫出 1 倍、2 倍、3 倍後的長方形，再將它分割拼成正方形，觀察其情形又是如何，是否也能清楚的看出減少 1 平方公分的區域？如圖（2）

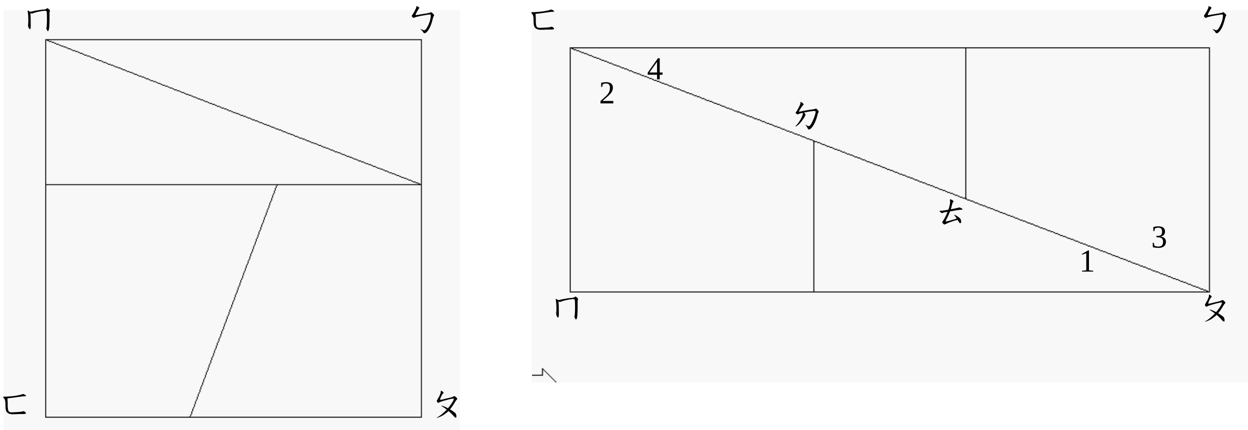
圖（2）：將長方形圖形放大 3 倍，做切割再拼湊組合成正方形



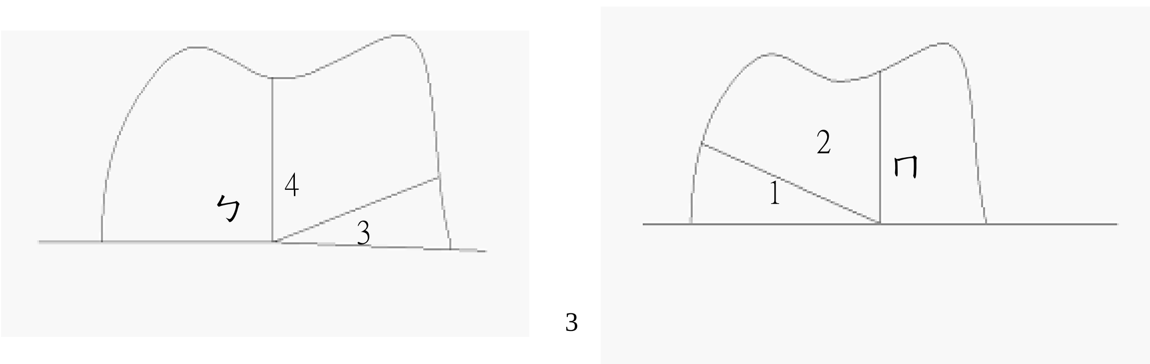
結果：

由長方形圖（2）做切割，放大 3 倍以後，我們以拼湊組合後正方形與原正方形面積疊合作比較，可以較清楚看出減少的面積部分在上方兩塊三角形面積的地方，這可能就是減少 1 平方公分的區域所在。

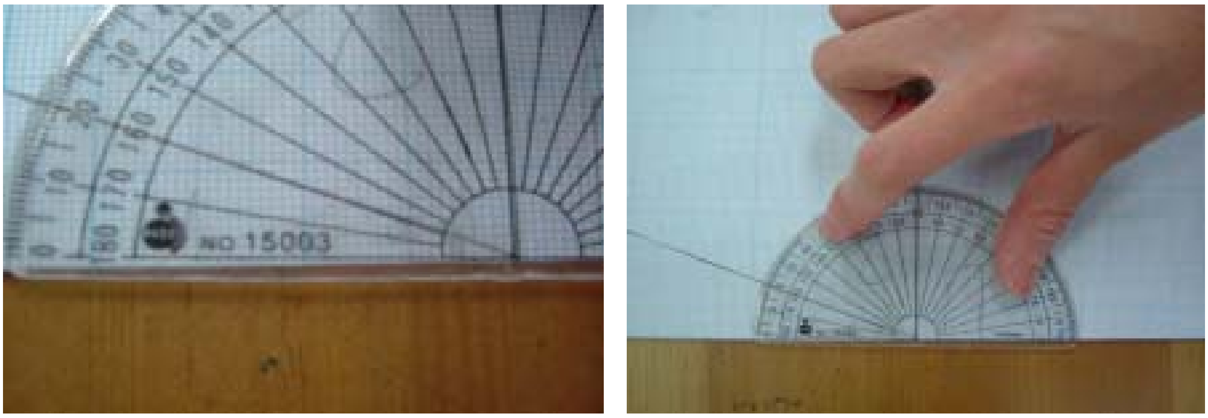
（方法三）：將正方形切割再拼湊組合後的長方形ㄅㄆㄇㄈ中，如圖（3），利用三角形三內角和等於 180 度的特性，檢驗ㄈㄉㄆ三點和ㄈㄊㄆ三點是否都構成三角形？



圖（3）：將拼湊組合後的長方形ㄅㄆㄇㄈ中，∠1＋∠2＋∠ㄇ 、∠3＋∠4＋∠ㄅ，觀察是否為 180˚



圖（4）：∠1＋∠2＋∠ㄇ≠180°



結果：

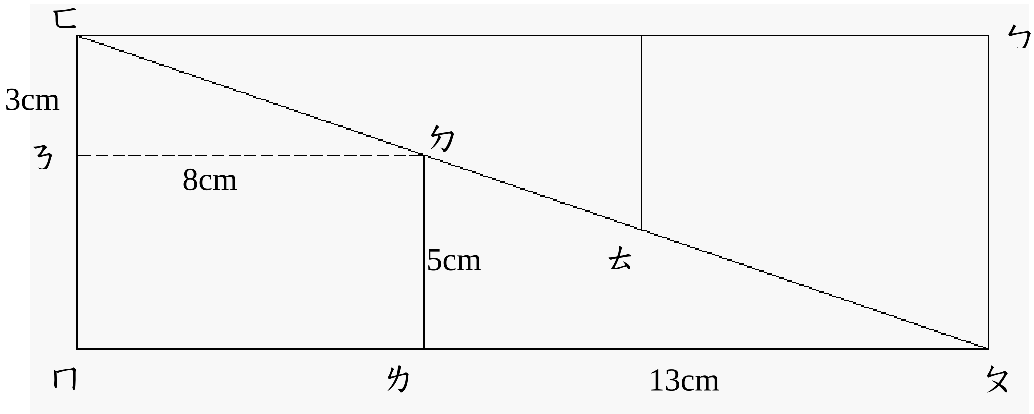
1.∠1＋∠2＋∠ㄇ≠180° 且∠3＋∠4＋∠ㄅ≠180°

2.也就表示ㄈㄉㄆ三點和ㄈㄊㄆ三點三點均無法構成三角形。

3.所以ㄈㄉㄆ三點和ㄈㄊㄆ三點都不成一直線，即ㄈㄉㄊㄆ四點不為長方形ㄅㄆㄇㄈ的對角線。

（方法四）：在拼湊組合後的長方形ㄅㄆㄇㄈ中，作一虛線$\overline{\text{ㄉㄋ}}$平行$\overline{\text{ㄆㄇ}}$，如圖（5），分別求出$\overline{\text{ㄉㄈ}}$和$\overline{\text{ㄆㄉ}}$的比值。

圖（5）：拼湊組合後的長方形ㄅㄆㄇㄈ



結果：

1.$\overline{\text{ㄆㄉ}}$的比值 ＝ $\overline{\text{ㄉㄌ}}$/$\overline{\text{ㄌㄆ}}$ ＝ 5/13 = 0.3846

2.$\overline{\text{ㄉㄈ}}$的比值 ＝ $\overline{\text{ㄈㄋ}}$/$\overline{\text{ㄋㄉ}}$ =3/8 = 0.375

3.$\overline{\text{ㄆㄉ}}$＞$\overline{\text{ㄉㄈ}}$，所以我們根據相似三角形邊長與邊長比值相等的原理可知，∆ㄆㄉㄌ與∆ㄉㄈㄋ並不相似，因此ㄆ、ㄉ、ㄈ三點並非一直線。

4.同理，我們知道ㄆ、ㄊ、ㄈ也非一直線。亦即ㄆ、ㄉ、ㄊ、ㄈ不能構成一直線，即ㄆㄊㄉㄈ不為長方形ㄅㄆㄇㄈ的對角線。

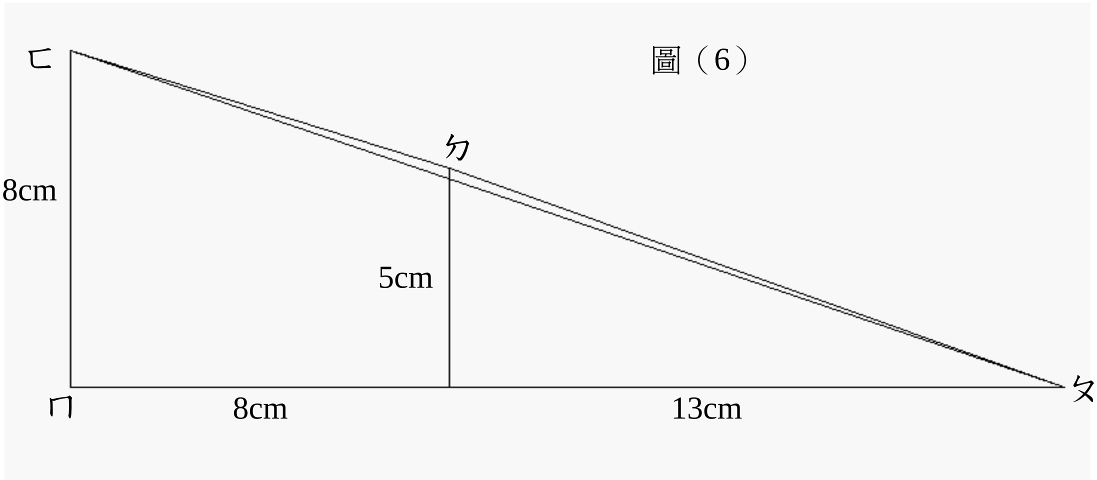
分析：

由上述的四種方法實驗出的結果，我們可以確切的知道，將正方形切割再拼湊的組合成長方形，看似兩個三角形的Δㄆㄈㄇ與Δㄆㄅㄈ組成，其實是由兩個「四邊形ㄆㄉㄈㄇ與四邊形ㄆㄅㄈㄊ」疊合而成。

【研究二】探討減少 1 平方公分的計算公式？

（方法一）：我們想求得減少 1 平方公分，首先將正方形經拼湊組合後的長方形與真正長方形做比較。

只取其中一部分「四邊形ㄆㄉㄈㄇ」，如圖（6），與再利用課堂上所學，求出Δㄆㄉㄈ的面積 = 四邊形ㄆㄉㄈㄇ的面積－Δㄆㄈㄇ的面積。



圖（6）

四邊形ㄆㄉㄈㄇ的面積 = 梯形ㄉㄈㄇㄍ＋Δㄆㄉㄍ的面積

= （8＋5）× 8÷2＋13 × 5÷2

= 13×13÷2＝13×13×1/2（原正方形面積的 1/2）

= 84.5（平方公分）

Δㄆㄈㄇ的面積 = $\overline{\text{ㄆㄇ}} \times \overline{\text{ㄇㄈ}} \div 2$

= 21 × 8 ÷2 = 84（平方公分）

=（8＋13）× 8 ÷2=（8＋13）× 8 × 1/2（拼湊組合後的長方形面積的 1/2）

所以Δㄆㄉㄈ的面積＝84.5－84＝0.5（平方公分）

因此我們可知，將正方形切割再拼湊組合後的長方形減少的面積

=Δㄆㄉㄈ的面積 × 2 = 0.5 × 2 = 1（平分公分）

結果：

由上面的算法，我們可以找出減少 1 平方公分的算式：

減少 1 平方公分的面積 =Δㄆㄉㄈ的面積 × 2

＝（四邊形ㄆㄉㄈㄇ的面積－Δㄆㄈㄇ的面積）× 2

＝【13×13÷2－（8＋13）× 8÷2】× 2

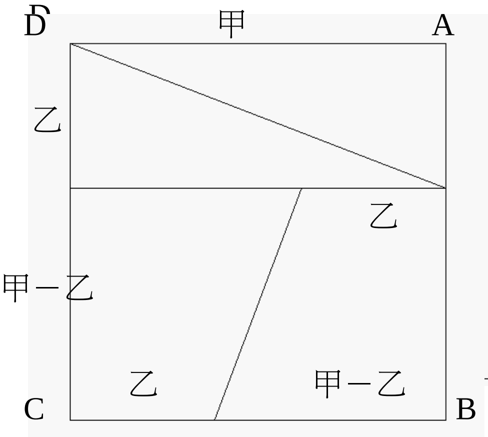
＝13×13－（8＋13）× 8

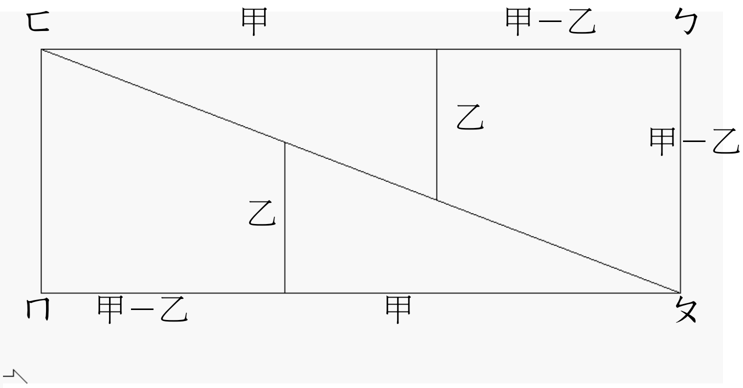
＝1

所以，正方形的面積與切割再拼湊組合後的長方形的面積相差 1 平方公分。

（方法二）：而我們將正方形邊長設爲甲，如下圖（7），經切割再拼湊組合後長方形的長爲（甲×2－乙），寬爲甲－乙），如圖（8）

圖（7）：正方形　　　　　　　　　　圖（8）：拼湊組合後長方形





我們推論：

正方形的面積 ABCD＝（甲 × 甲）

長方形ㄅㄆㄇㄈ的面積 ＝（2 × 甲－乙）×（甲－乙）

面積差量 ＝ 長方形ㄅㄆㄇㄈ的面積－正方形 ABCD 的面積

＝〔（2 × 甲－乙）×（甲－乙）〕－（甲 × 甲）

結果：

1.面積差量 ＝ 長方形ㄅㄆㄇㄈ的面積－正方形 ABCD 的面積

＝〔（2 × 甲－乙）×（甲－乙）〕－（甲 × 甲）

2.我們將推論出的公式實際驗算，得：

〔（2 ×13－5）×（13－5）〕－（13 × 13）

＝21×8－13×13

＝（8＋13）× 8－13×13

＝－1

所以，切割再拼湊組合後的長方形ㄅㄆㄇㄈ的面積小於正方形 ABCD 的面積，1 平方公分。同時，也說明我們推論的公式是正確的。

【研究三】探討正方形邊長一定時，不同的切割比例，再拼湊組合後長方形面積的變化情形？

（方法一）：當正方形邊長甲爲 13 公分，不同的切割比例乙，觀察拼湊組合後長方形面積的變化情形，圖形如附件（一）。

結果：如表格（1）

表格（1）

甲的長	13											
乙的長	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
正方形面積	169											
拼湊後長方形面積	300	264	230	198	168	140	114	90	68	48	30	14
面積差量	131	95	69	29	-1	-21	-55	-79	-101	-121	-139	-155

1.由表格（1）中，我們發現經拼湊組合後長方形面積，並非都是減少的，也可以是增加的。
2.而隨著乙的長度越小，拼湊組合後長方形面積＞原正方形面積；反之則相反。

（方法二）：我們另外想知道不同邊長甲的正方形，其不同的切割比例乙，拼湊組合後長方形面積的變化情形。

1.取正方形邊長甲 ＝2，3，4，5，6，7，8，9，10 cm 為例。

2.取不同的比例分割，但乙＜甲，且乙為整數，圖形如附件（二）。

結果： 如表格（2）

表格（2）

甲的長	2	3		4			5				6				
乙的長	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5
正方形面積	4	9		16			25				36				
拼湊後長方形面積	3	10	4	21	12	5	36	24	14	6	55	40	27	16	7
面積差量	-1	1	-5	5	-4	-11	11	-1	-11	-19	19	4	-9	-20	-29

甲的長	7						8						
乙的長	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7
正方形面積	49						64						
拼湊後長方形面積	78	60	44	30	18	8	105	84	65	48	32	20	9
面積差量	29	11	-5	-19	-31	-41	41	20	1	-16	-31	-44	-55

甲的長	9								10								
乙的長	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	9
正方形面積	81								100								
拼湊後長方形面積	136	112	90	70	52	36	22	10	171	144	119	96	75	56	39	24	11
面積差量	55	31	9	-11	-29	-45	-59	-71	71	44	19	-4	-25	-44	-61	-76	-89

分析：

1.由表格（2）我們知道，當正方形邊長甲為一定時，不同的切割比例乙的長度越小時，拼湊組合後長方形的面積＞原正方形面積。而當長度乙增加時，面積的差量逐漸減小，但乙＞甲/2 時，面積差量顯著增加，而且正方形形狀嚴重變形。

2.而在切割比例的調整上，若長度乙≦甲/2，且以最接近甲/2 的長度時，可以得到面積差量最小值，亦即原正方形面積與拼湊組合後長方形面積相差最小，如表格（3）。

表格（3）

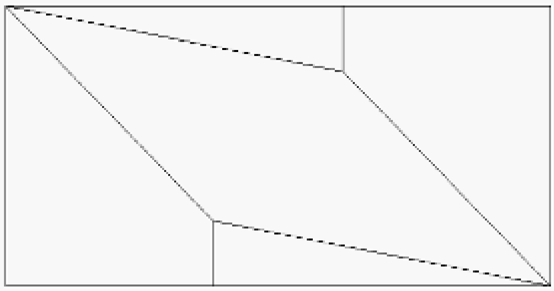
甲的長	2	3	4	5	6	7	8	9	10
乙的長	1	1	2	2	2	3	3	3	4
正方形面積	4	9	16	25	36	49	64	81	100
拼湊後 長方形面積	3	10	12	24	40	44	65	90	96
面積差量	-1	1	-4	-1	4	-5	1	9	-4

3.另外，由圖形附件（一）、附件（二）可以發現：

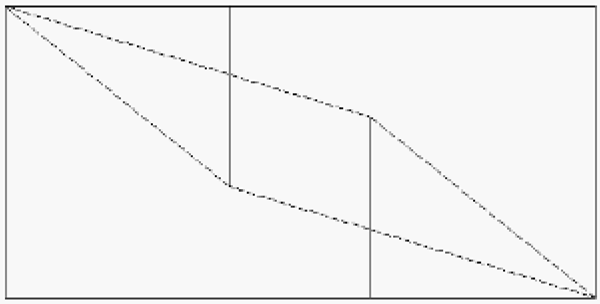
A.當原正方形面積＜拼湊組合後長方形面積時，拼湊組合後長方形面積中間會有凹陷處，如圖（8）；

B.當原正方形面積＞拼湊組合後長方形面積時，拼湊組合後長方形面積中間會有重疊凸出處，如圖（9）。

圖（8）拼湊組合後長方形面積中間有凹陷處 （拼湊組合後長方形面積大）



圖（9）拼湊組合後長方形面積中間有重疊凸出處（原正方形面積大）



4.當長度乙＞甲/2 時，所拼湊組合後長方形面積會嚴重變形並縮小。

5.所以我們在正方形邊長甲一定，乙改變時，所拼湊組成的長方形面積歸納爲兩種類型：

a.中間凸出型－拼湊組合後長方形面積減少（簡稱凸出型），並以符號“⊕”表示

b.中間凹陷型－拼湊組合後長方形面積增加（簡稱凹陷型），並以符號“Θ”表示

【研究四】如何在任意一正方形中，找出一組切割組合，使拼成的長方形面積的差量爲最小？

（方法一）：1. 對每一個正方形邊長爲甲 ＝2，3，4，‧‧‧‧，100cm（甲爲整數），分別取乙 ＝1，2，3，‧‧‧‧‧‧cm，（乙爲整數，且乙 ≦ 甲/2，並最接近甲/2 時的長度）。

2. 將甲、乙的值分別帶入【研究二】我們推論出的公式，也就

面積差異 ＝ 〔（2 × 甲－乙）×（甲－乙）〕－（甲 × 甲）

求出面積差量最小值。

結果：

由上述方法得表格（4）

①面積差量 ＝ 拼成後長方形的面積 － 原正方形面積

②若拼湊組成後長方形的面積＜原正方形面積，則以“⊕”表示減少（凸出型）。

③若拼湊組成後長方形的面積＞原正方形面積，則以“Θ”表示增加（凹陷型）。

表格（4）：

甲的長	面積差量最小時乙的長度	面積的類型	面積差量最小值
2	1	⊕	-1
3	1	Θ	1
4	2	⊕	-4
5	2	⊕	-1
6	2	Θ	4
7	3	⊕	-5
8	3	Θ	1
9	3	Θ	9
10	4	⊕	-4
11	4	Θ	5
12	5	⊕	-11
13	5	⊕	-1
14	5	Θ	11
15	6	⊕	-9
16	6	Θ	4
17	6	Θ	19
18	7	⊕	-5
19	7	Θ	11
20	8	⊕	-16
21	8	Θ	1
22	8	Θ	20
23	9	⊕	-11
24	9	Θ	9
25	10	⊕	-25

甲的長	面積差量最小時乙的長度	面積的類型	面積差量最小值
26	10	⊕	-4
27	10	⊕	-19
28	11	⊕	-19
29	11	Θ	5
30	11	Θ	31
31	12	⊕	-11
32	12	Θ	16
33	13	⊕	-29
34	13	⊕	-1
35	13	Θ	29
36	14	⊕	-20
37	14	Θ	11
38	15	⊕	-41
39	15	⊕	-9
40	15	Θ	25
41	16	⊕	-31
42	16	Θ	4
43	17	Θ	41
44	17	Θ	19
45	17	Θ	19
46	18	⊕	-44
47	18	⊕	-5
48	18	⊕	-36
49	19	⊕	-31
50	19	Θ	11

甲的長	面積差量最小時乙的長度	面積的類型	面積差量最小值
51	19	Θ	55
52	20	⊕	-16
53	20	Θ	29
54	21	⊕	-45
55	21	Θ	1
56	21	Θ	49
57	22	⊕	-29
58	22	Θ	20
59	23	⊕	-61
60	23	⊕	-11
61	23	Θ	41
62	24	⊕	-44
63	24	Θ	9
64	24	Θ	64
65	25	⊕	-25
66	25	Θ	31
67	26	⊕	-61
68	26	⊕	-4
69	26	Θ	55
70	27	⊕	-41
71	27	⊕	-19
72	28	⊕	-80
73	28	⊕	-19
74	28	Θ	44
75	29	⊕	-59

甲的長	面積差量最小時乙的長度	面積的類型	面積差量最小值
76	29	Θ	5
77	29	Θ	71
78	30	⊕	-36
79	30	Θ	31
80	31	⊕	-79
81	31	⊕	-11
82	31	Θ	59
83	32	⊕	-55
84	32	Θ	16
85	32	Θ	89
86	33	⊕	-29
87	33	Θ	45
88	34	⊕	-76
89	34	⊕	-1
90	34	Θ	76
91	35	⊕	-49
92	35	Θ	29
93	36	⊕	-99
94	36	⊕	-20
95	36	Θ	61
96	37	⊕	-81
97	37	Θ	11
98	37	Θ	95
99	38	⊕	-41
100	38	Θ	44

（方法二）：將上面表格（4）不考慮面積的增減，即⊕、⊖號（凸凹類型），將面積差量相同的正方形邊長甲，由小至大排列整理。

結果：如表格（5）

表格（5）

面積差量	面積類型起始凸凹	面積的類型	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕
		正方形邊長甲順序	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	⊕		2	3	5	8	13	21	34	55	89
4	⊕		4	6	10	16	26	42	68		
5	⊕		7	11	18	29	47	76			
11	⊕		12	19	31	50	81				
16	⊕		20	32	52	84					
25	⊕		25	40	65						
19	⊕		27	44	71						
29	⊕		33	53	86						
41	⊕		38	61	99						
31	⊕		41	66							
9	⊖			9	15	24	39	63			
11	⊖			14	23	37	60	97			
19	⊖			17	28	45	73				
20	⊖			22	36	58	94				
29	⊖			35	57	92					
31	⊖			30	49	79					
41	⊖			43	70						

分析：

由表格（5）我們得到許多有趣的結果：

1.相同面積差量的每一列中的每一數恰好是前兩數的和（最前面兩數除外），
也就是說，每一列中的 C=A＋B，D=B＋C・・・・依此類推。

2.連續三數（A，B，C）就是一組最佳組合，C 為正方形邊長甲，A 為切割比例乙，而拼湊組合成的長方形面積與原正方形面積差量＝B×（2B－A）－C×C＝B×（B+C）－C×C 最小。 例如：本研究中邊長 13 的正方形，可以由表格（5）查得（5，8，13）當甲 ＝13，取乙 ＝5 時切割，（另一剩餘邊長，即為 甲－乙 ＝8），再拼湊組合成的長方形，兩圖形面積最小差量 8×（8＋13）－13×13＝8×21－13×13＝ －1（平方公分）。

3.另外，對每一列數任取連續四數為一組合（A、B、C、D），其中 C 為原正方形邊長，A 為最佳切割比例，D 即為組合後長方形長，B 為寬，因此面積最小差量為：B×（B+C）－C×C＝B×D－C×C。

4.我們由表格（5）觀察得知，每一列的每一數（正方形邊長甲），它們的面積最小差量類型，都依凸凹（⊕、⊖、⊕、⊖、.....）或凹凸（⊖、⊕、⊖、⊕、.....）依順序排列而成。

（方法三）：將上面表格（5）中，面積差量最小的值，並可分解成平方數，例如：4、9、16、25・・・・（即可分解成 a× a 的整數），由小至大排列整理，如下表格（6）。

結果：如表格（6）

表格（6）

面積差量	分解成 a× a	倍數 a	面積的類型（凸凹）/ 正方形邊長甲							
			⊕	Θ	⊕	Θ	⊕	Θ	⊕	Θ
1	1×1	**×1**	2	3	5	8	13	21	34	55
4	2×2	**×2**	**4**	6	10	16	26	42	68	
9	3×3	**×3**		**9**	15	24	39	63		
16	4×4	**×4**			**20**	32	52	84		
25	5×5	**×5**			**25**	40	65			

分析：

由表格（6）我們得到有趣的結果：

1.以面積差量＝1（如底色爲黃色那一列）正方形邊長爲依據，我們將其面積差量＝1 的正方形邊長甲×倍數，即可預測得到最小面積差量＝倍數×倍數，例如：正方形邊長甲 13x2 倍＝13x2＝26，面積差量最小值＝倍數×倍數＝2x2＝4。

2. 反之，我們亦能根據面積差量最小值所分解成平方數 a× a（倍數×倍數），預測得到最佳正方形邊長＝如底色爲黃色那一列正方形邊長甲×a（倍數），例如：面積差量最小值＝9＝3×3，最佳正方形邊長＝正方形邊長甲 13x3＝39。

3.另外，我們可以依據面積差量＝1 的正方形邊長之起始凹凸，來預測得到長度爲倍數最佳正方形邊長的凹凸類型（即拼湊組合成的長方形與原正方形面積的增減），例如：2x2＝4（增加爲凹，以Θ表示）；2x3＝6（減少爲凸，以⊕表示）

陸、結論

【研究一】探討經切割再拼湊組合後，減少 1 平方公分可能的原因？

1.方形經拼湊組合成的長方形面積會減少一平方公分，並不是真的會隱身術，其原因在於原正方形切割成兩小角形，及兩梯形後，小三角形與梯形組合後並未成爲一大三角形（實際上爲一不規則四邊形），以致於全部組合後，有面積重疊的地方，此即爲減少的 1 平方公分所在。

2.度來觀察，$\angle 1+\angle 2+\angle$ㄇ$\neq 180^\circ$ 且 $\angle 3+\angle 4+\angle$ㄅ$\neq 180^\circ$，也就表示ㄈㄉㄆ三點和ㄈㄊㄆ三點三點均無法構成三角形，所以ㄈㄉㄆ三點和ㄈㄊㄆ三點都不成一直線，即ㄈㄉㄊㄆ四點不爲長方形ㄅㄆㄇㄈ的對角線。

3.比值 ＝ $\overline{ㄉㄌ}/\overline{ㄌㄆ}$ ＝ 5/13 = 0.3846，$\overline{ㄉㄈ}$的比值 ＝ $\overline{ㄈㄋ}/\overline{ㄋㄉ}$ =3/8 = 0.375，所以我們根據相似三角形邊長與邊長比值相等的原理可知，Δㄆㄉㄌ與Δㄉㄈㄋ並不相 似，因此ㄆ、ㄉ、ㄈ三點並非一直線，即ㄆㄊㄉㄈ不爲長方形ㄅㄆㄇㄈ的對角線。

【研究二】探討減少 1 平方公分的計算公式？

原正方形的面積 ＝ （甲 × 甲）；

切割拼湊組合後長方形的面積 ＝ （2 × 甲－乙）×（甲－乙）

面積差量 =拼湊後長方形的面積－原正方形的面積=〔（2 × 甲－乙)×(甲－乙)〕－(甲 × 甲)

我們將推論出的公式實際驗算，得：〔(2 ×13－5）×（13－5)〕－（13 × 13）＝－1

所以，切割再拼湊組合後的長方形的面積小於正方形的面積，1 平方公分。

【研究三】探討正方形邊長一定時，不同的切割比例，再拼湊組合後長方形面積的變化情形？

1.方形邊長甲都可以找到一最佳切割比例，及長度乙≦甲/2，且以最接近甲/2 的長度時，使得拼成後的長方形面積與原正方形面積的差量為最小。

2.正方形邊長一定，不同的切割比例，拼湊組合後的長方形歸類為兩種類型：

a：一為中間凸出型，以⊕表示（拼成後長方形的面積比原正方形面積小）

b：一為中間凹陷型，以Θ表示（拼成後長方形的面積比原正方形面積大）

【研究四】如何在任意一正方形中，找出一組切割組合，使拼成的長方形面積的差量為最小？

1.我們歸納出表格（5），並找出一規則，即相同面積差量的每一列中的每一數恰好是前兩數的和（最前面兩數除外），也就是說，對每一列數任取連續三數（A，B，C）就是一組最佳組合，C 為正方形邊長甲，A 為切割比例乙，而面積差量＝B×（2B－A）－C×C＝B×（B+C）－C×C 最小。　例如：(5，8，13)，邊長甲=13 的正方形，取乙 ＝5 時切割，另一剩餘邊長，即為甲－乙 ＝8，再拼湊組合成的長方形，兩圖形面積最小差量 8×（8＋13）－13×13＝8×21－13×13＝ －1（平方公分）。另外，對每一列數任取連續四數為一組合（A、B、C、D），其中 C 為原正方形邊長，A 為最佳切割比例，D 即為組合後長方形長，B 為寬，因此面積最小差量為：B×（B+C）－C×C＝B×D－C×C。

2.方形面積與拼成後的長方形面積的差量為最小值時，可以經由我們整理出的表格（5），可以藉由查表預測正方形邊長甲，及切割值乙。相反的，如果知道正方形的最佳　切割組合可以經由查表得正方形面積最小差量預測。

3.我們整理出的表格（6），以面積差量＝1（如底色為黃色那一列）正方形邊長為依據，我們將其面積差量＝1 的正方形邊長甲×倍數，即可預測得到最小面積差量＝倍數×倍數，例如：正方形邊長甲 13×2 倍＝13×2＝26，面積差量最小值＝倍數×倍數＝2×2＝4。反之，我們亦能根據面積差量最小值所分解成平方數 a× a（倍數×倍數），預測得到最佳正方形邊長＝如底色為黃色那一列正方形邊長甲×a（倍數），例如：面積差量最小值＝9＝3×3，最佳正方形邊長＝正方形邊長甲 13×3＝39。

4.我們可以依據面積差量＝1 的正方形邊長之起始凹凸，來預測得到長度為倍數最佳正方形邊長的凹凸類型（即拼湊組合成的長方形與原正方形面積的增減），例如：2×2＝4（增加為凹，以Θ表示）；2×3＝6（減少為凸，以⊕表示）

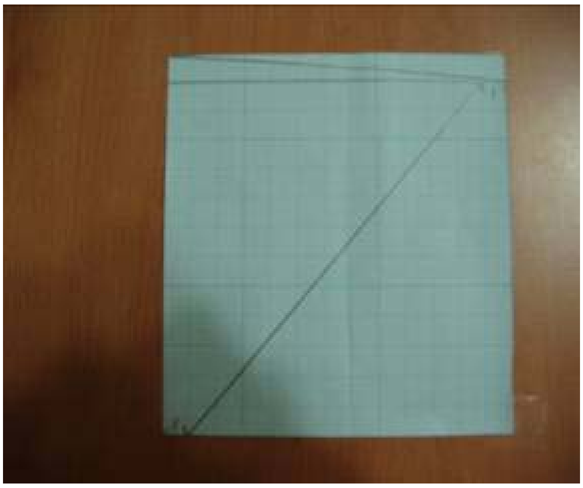
柒、參考資料

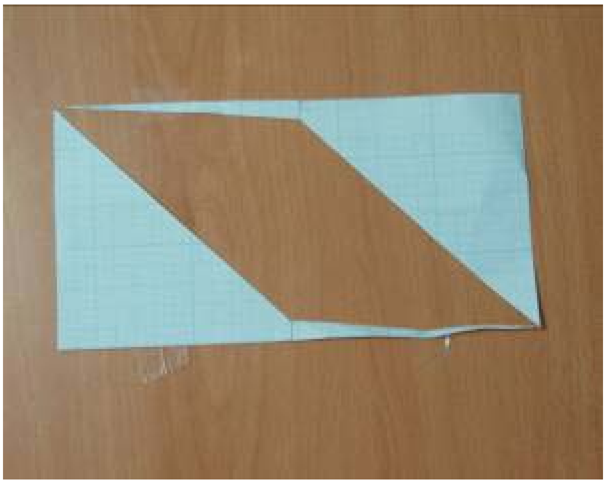
一、者葛登能著、薛美貞譯　任弟的魔毯。　載於跳出思路的陷阱。天下文化出版社。

二、形的面積。　南一版國小數學第十冊第五單元。南一出版社

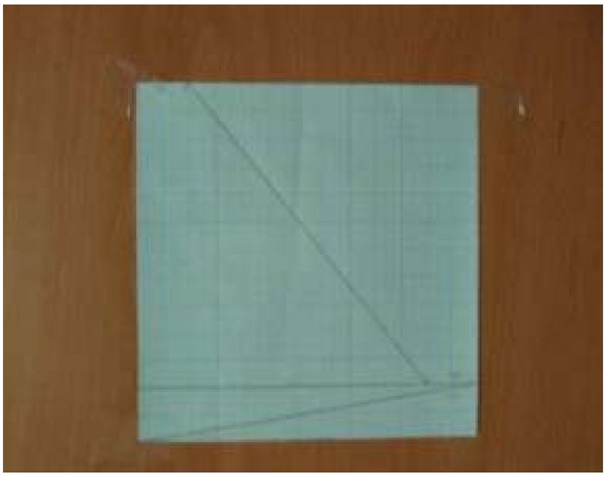
附件（一）：正方形邊長甲皆爲 13cm，不同的切割比例，組合拼湊後長方形面積的變化情形

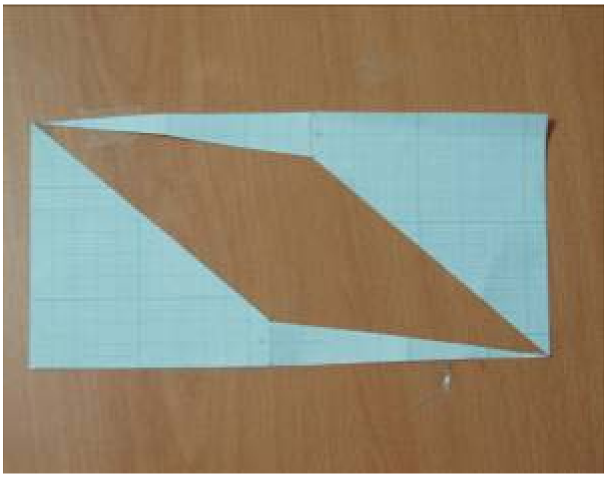
乙＝1



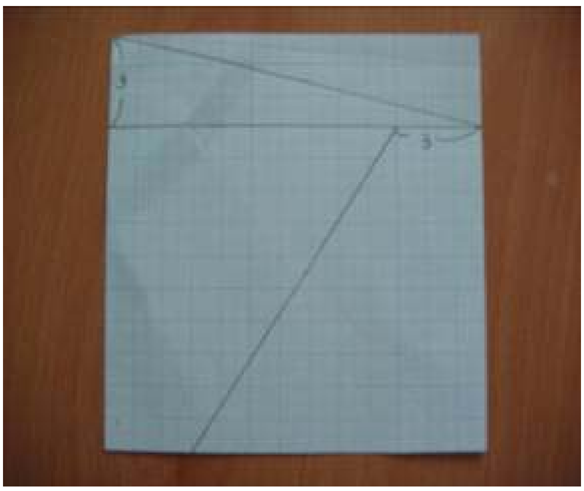


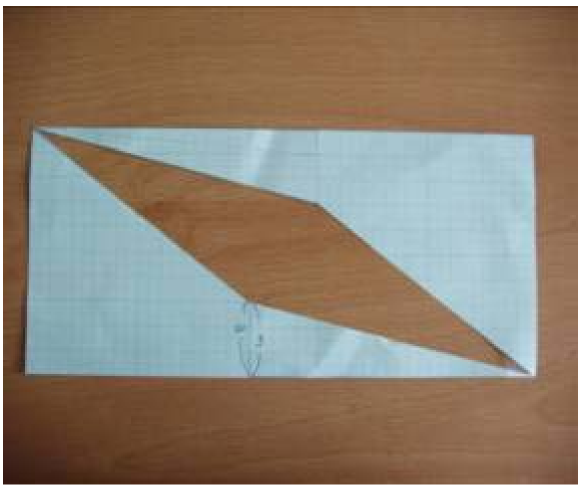
乙＝2



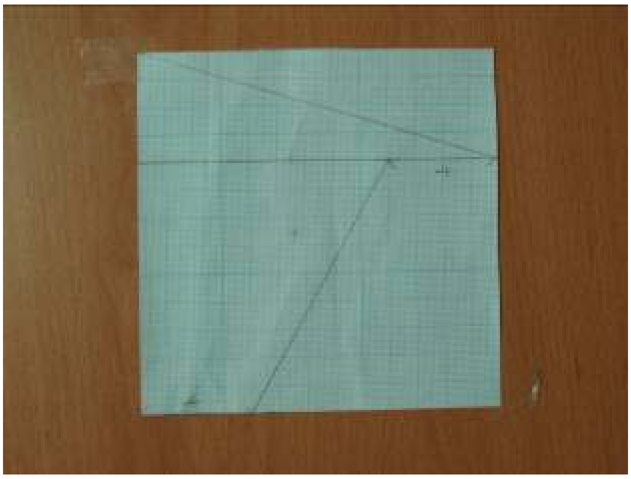


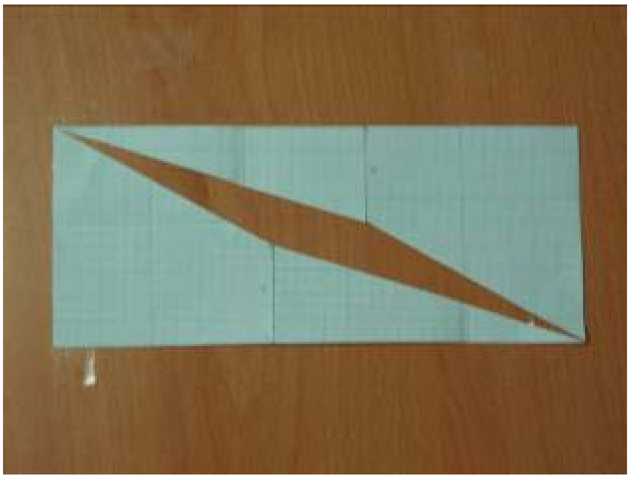
乙＝3



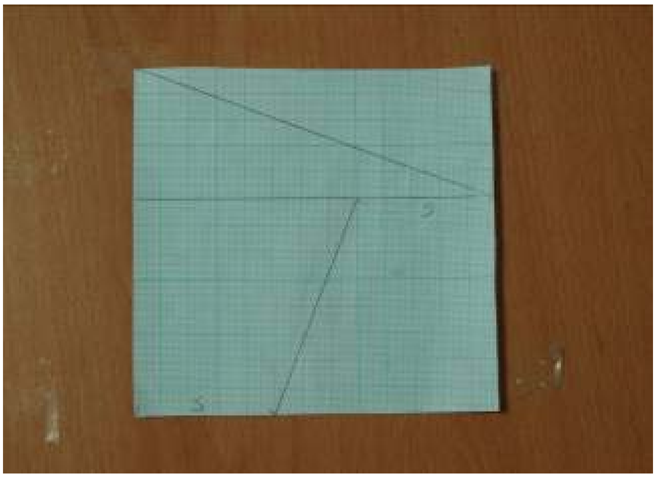


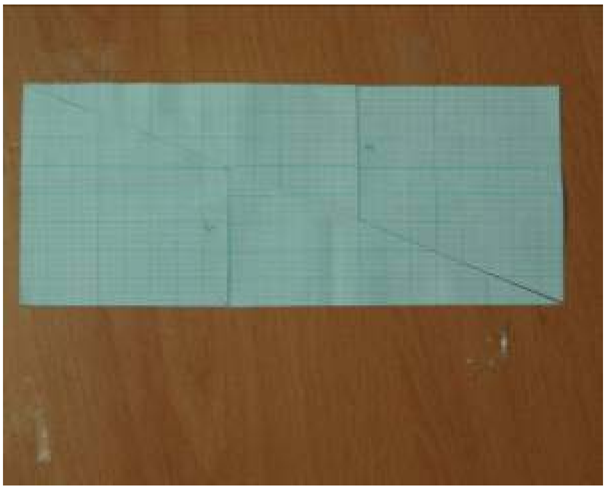
乙＝4



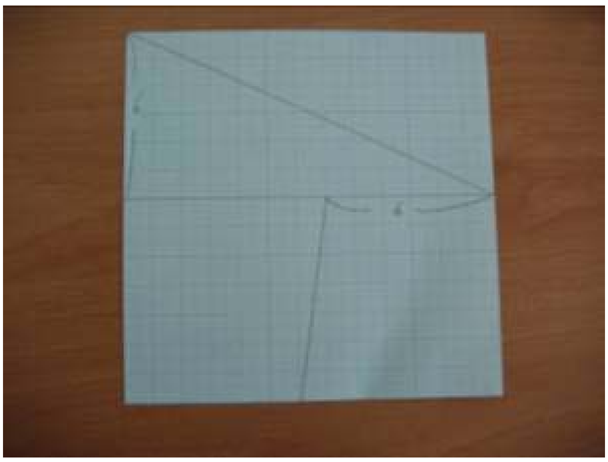


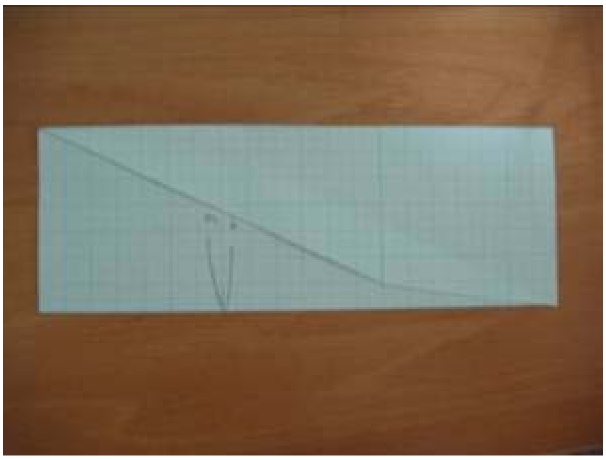
乙＝5



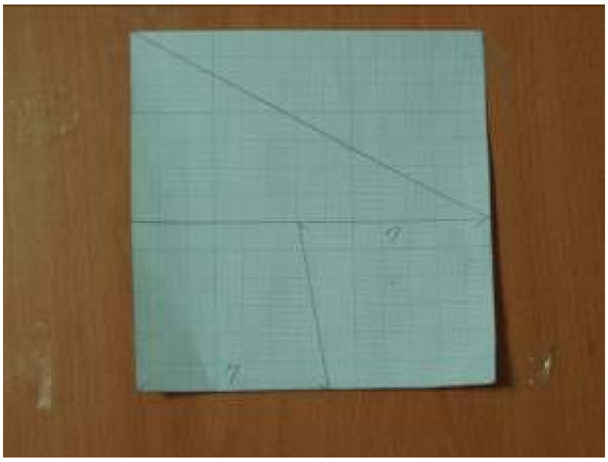


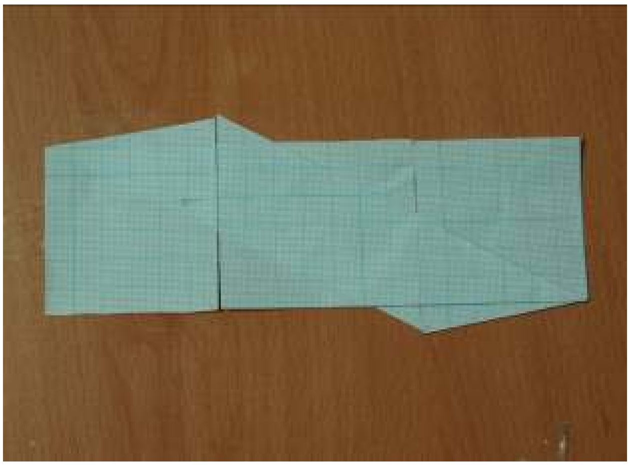
乙＝6



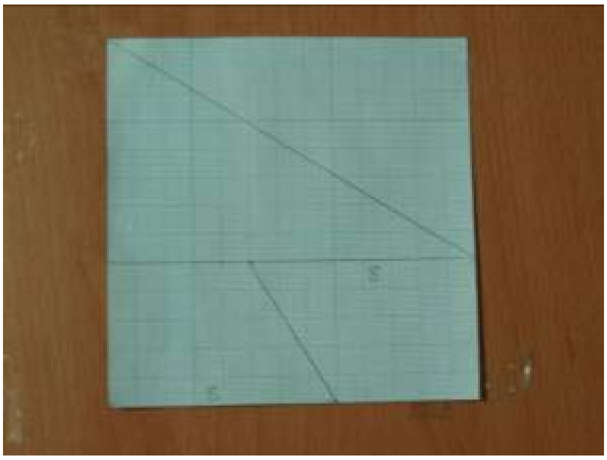


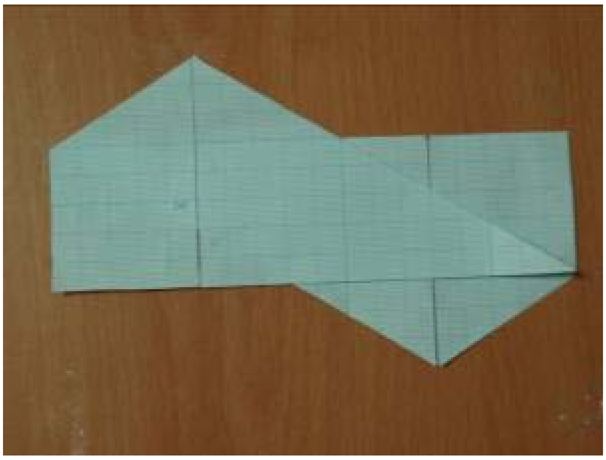
乙＝7



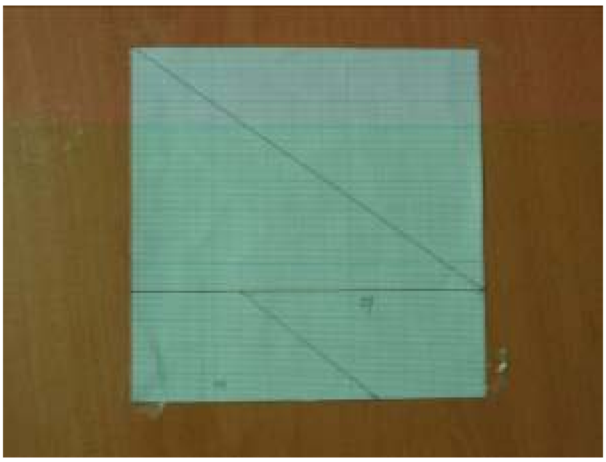


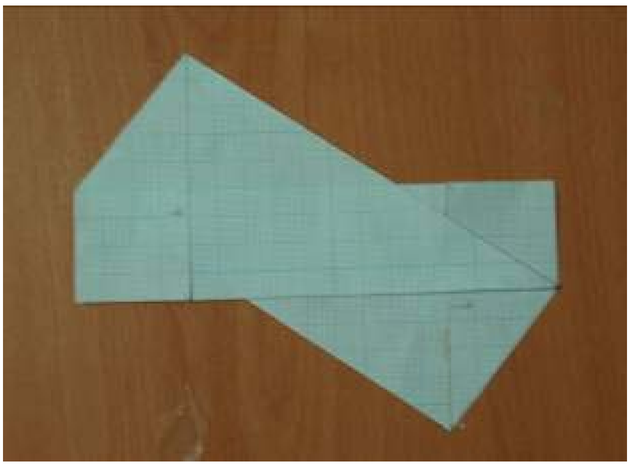
乙＝8



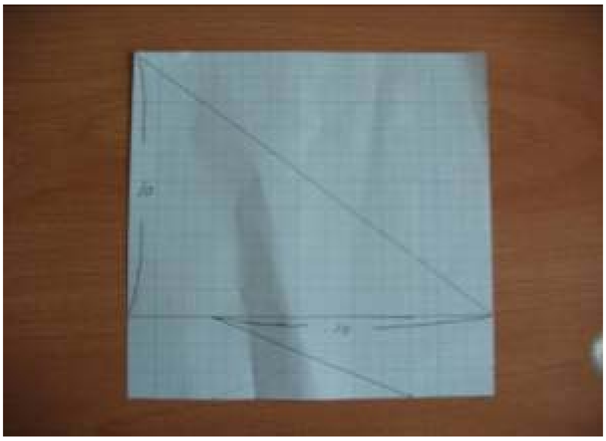
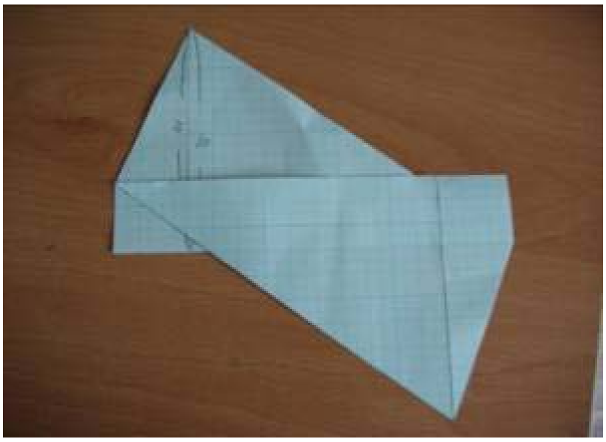


乙＝9

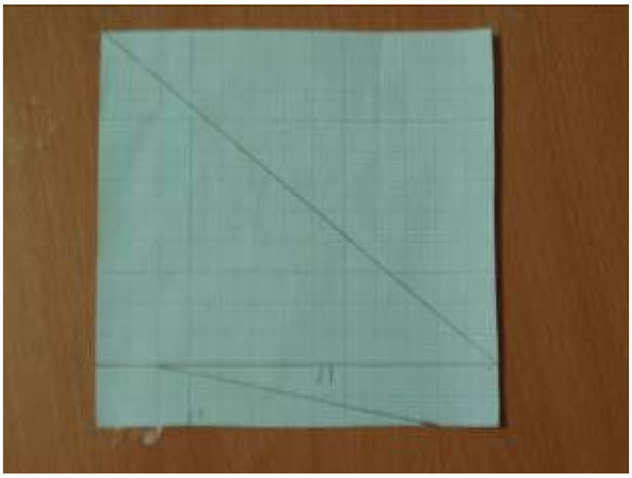
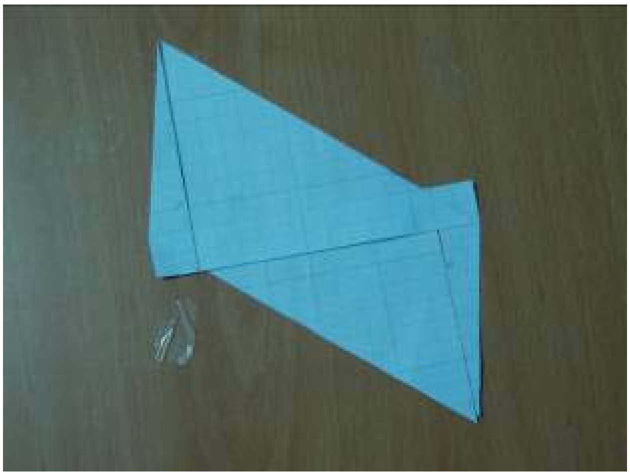




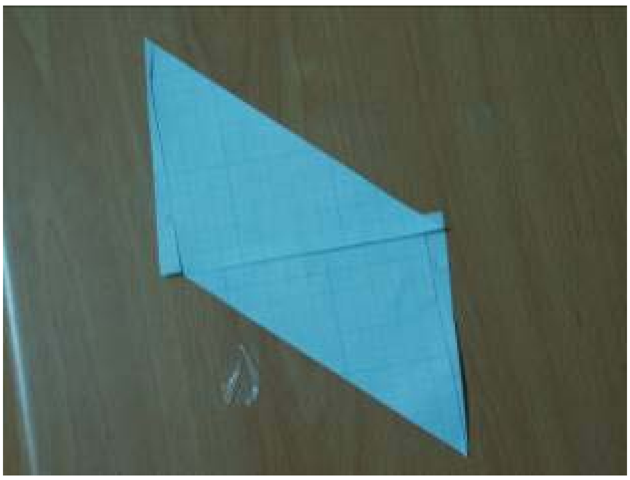
乙＝10

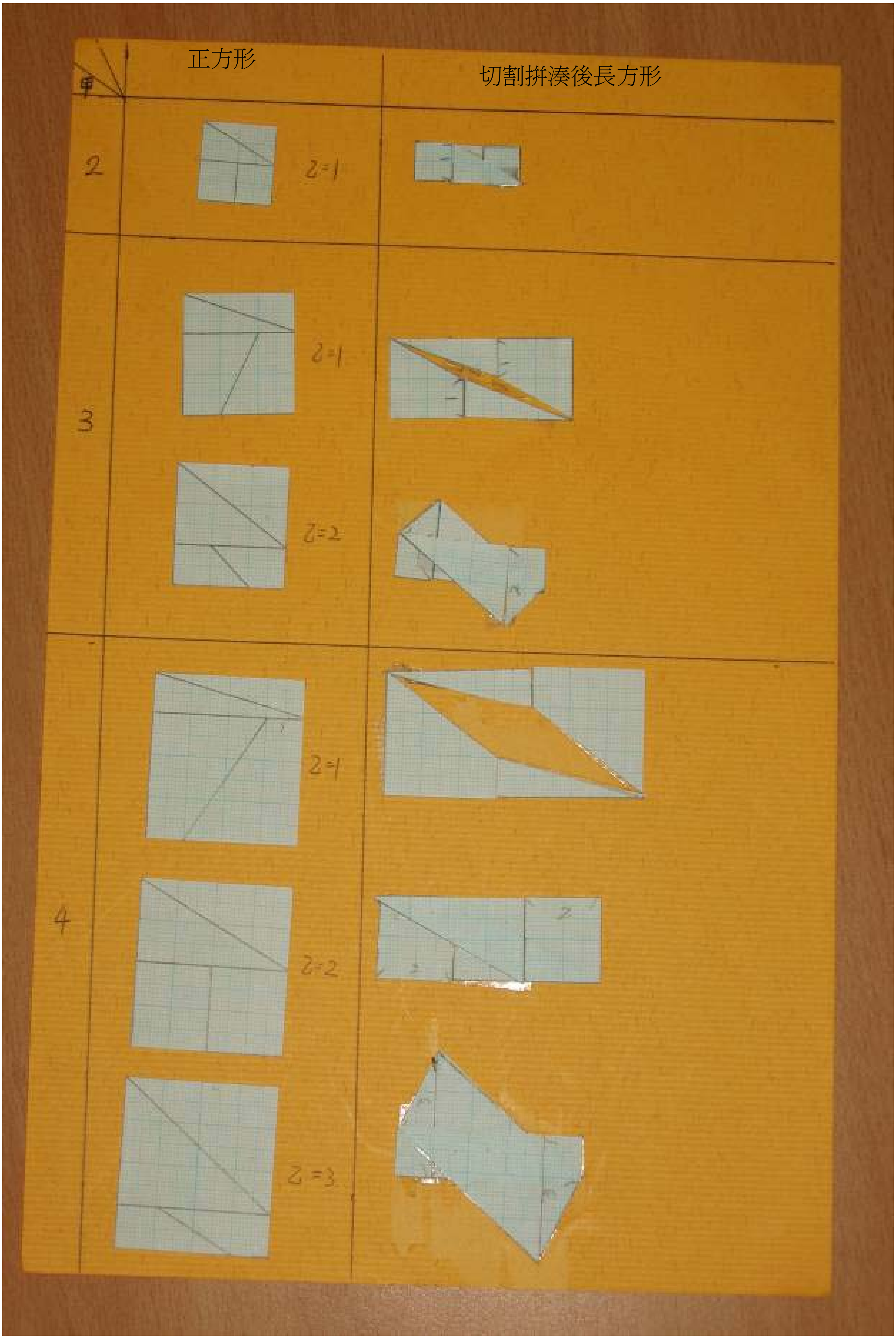
乙＝11

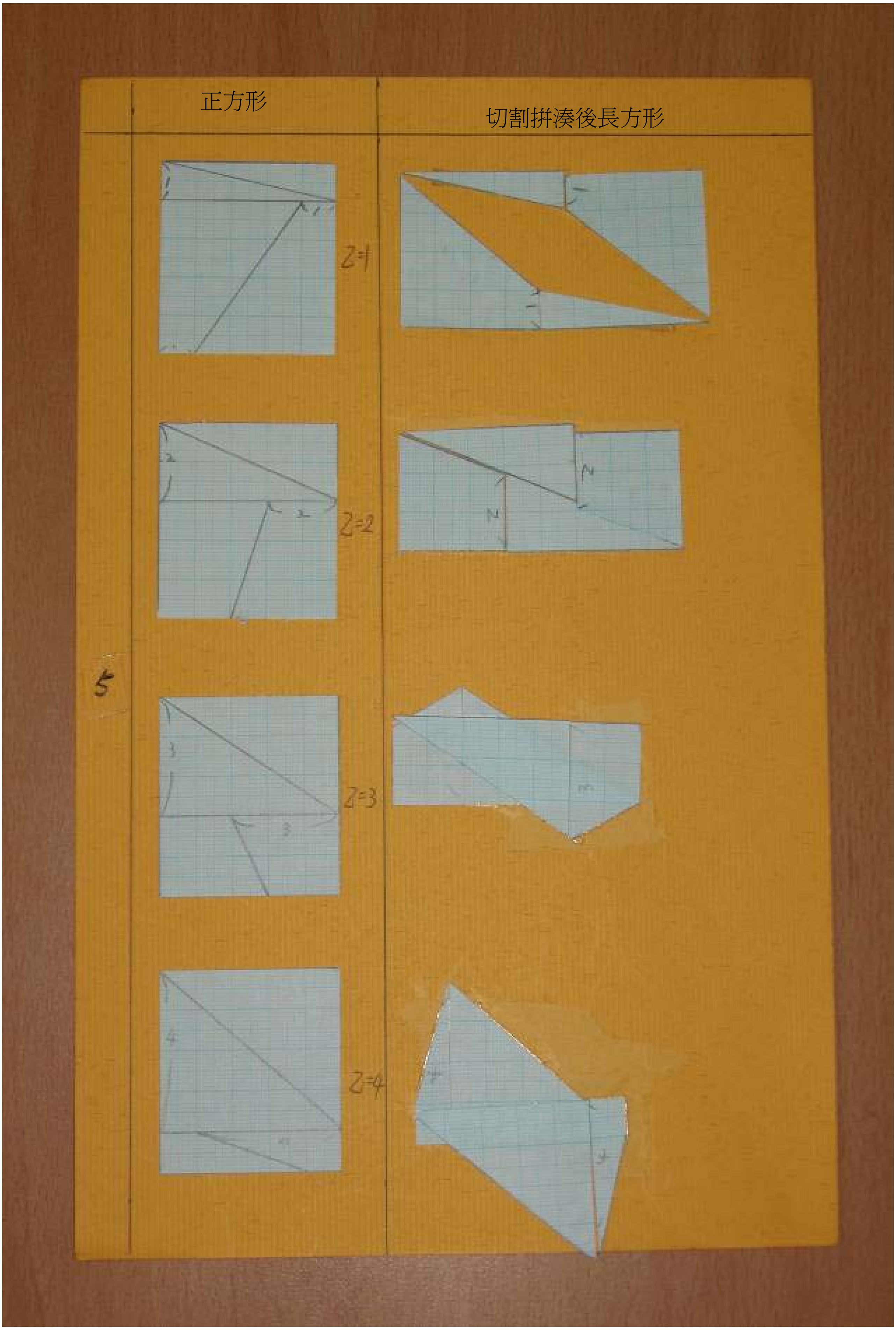
 

乙＝12

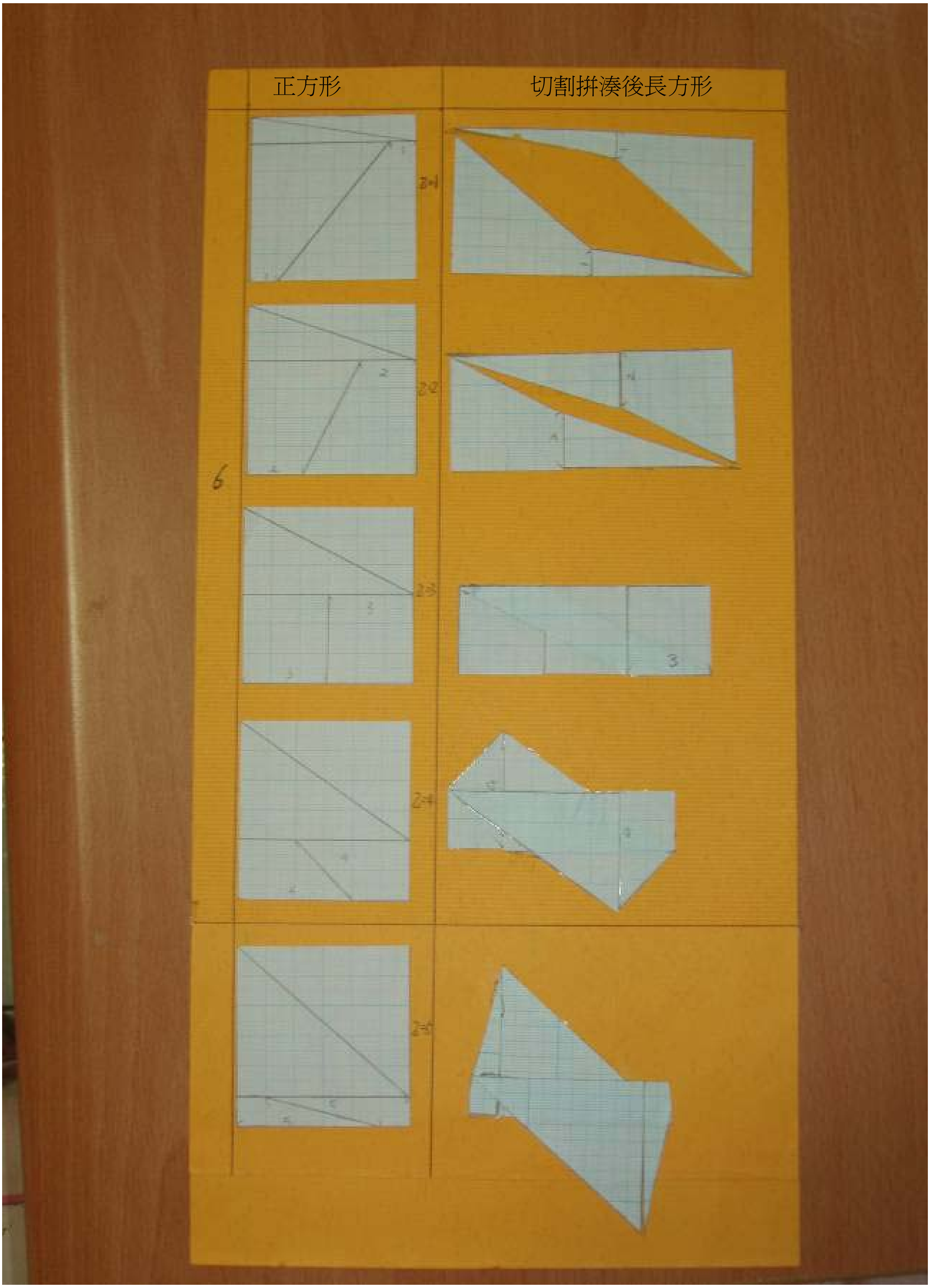
 

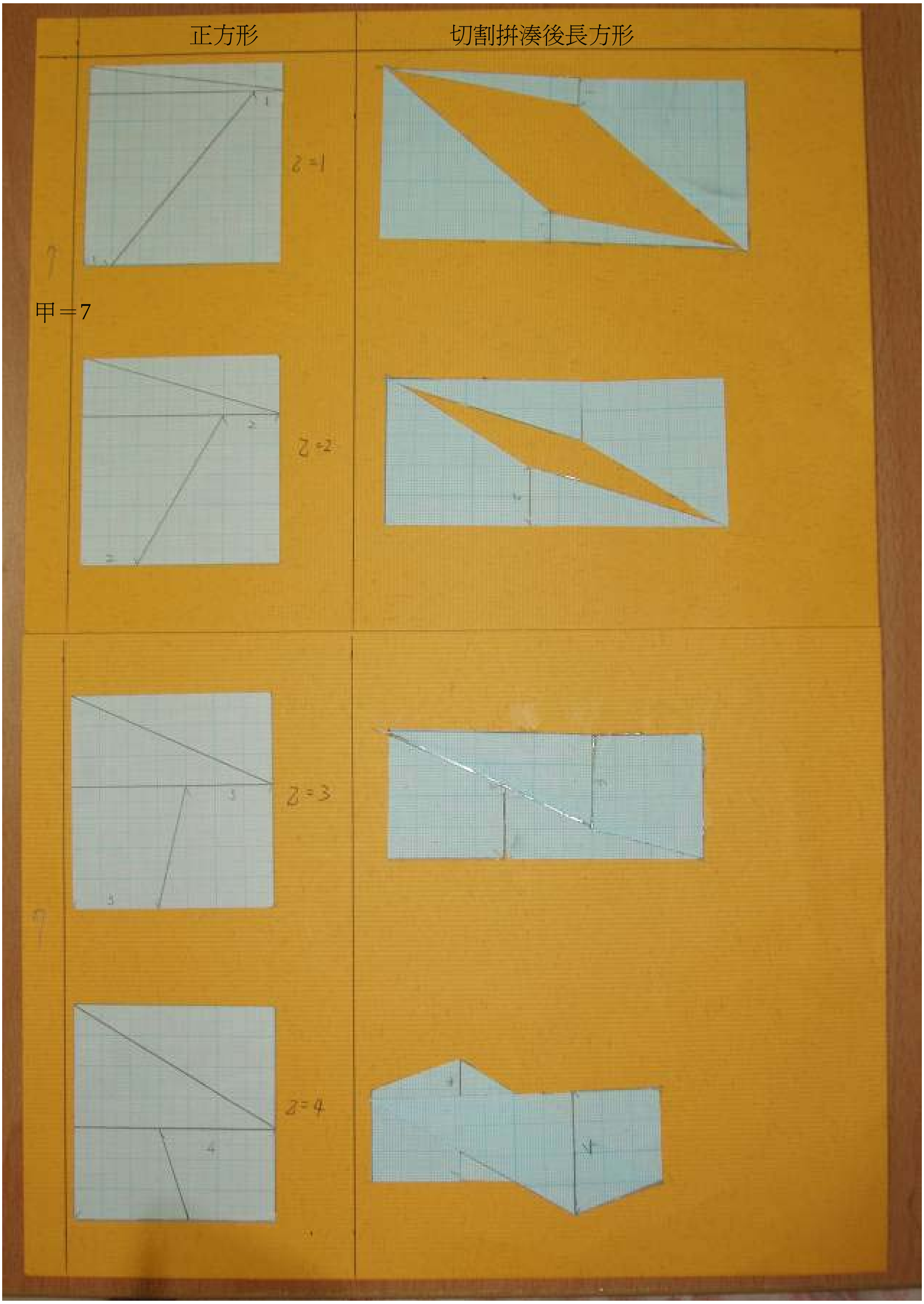
附件二：不同邊長的正方形，其不同的切割比例，拼湊組合後長方形面積的變化情形。邊長甲 ＝2，3，4，5，6，7，8，9，10 cm

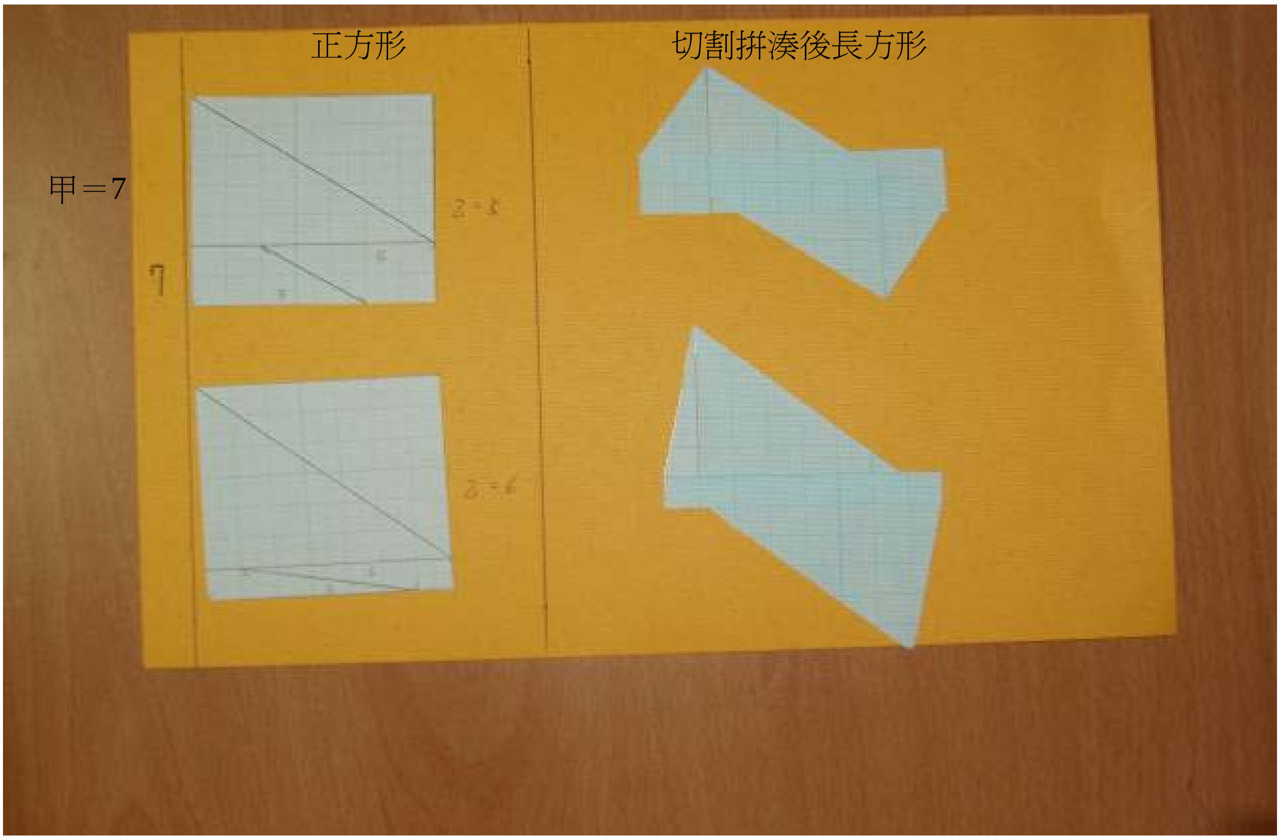


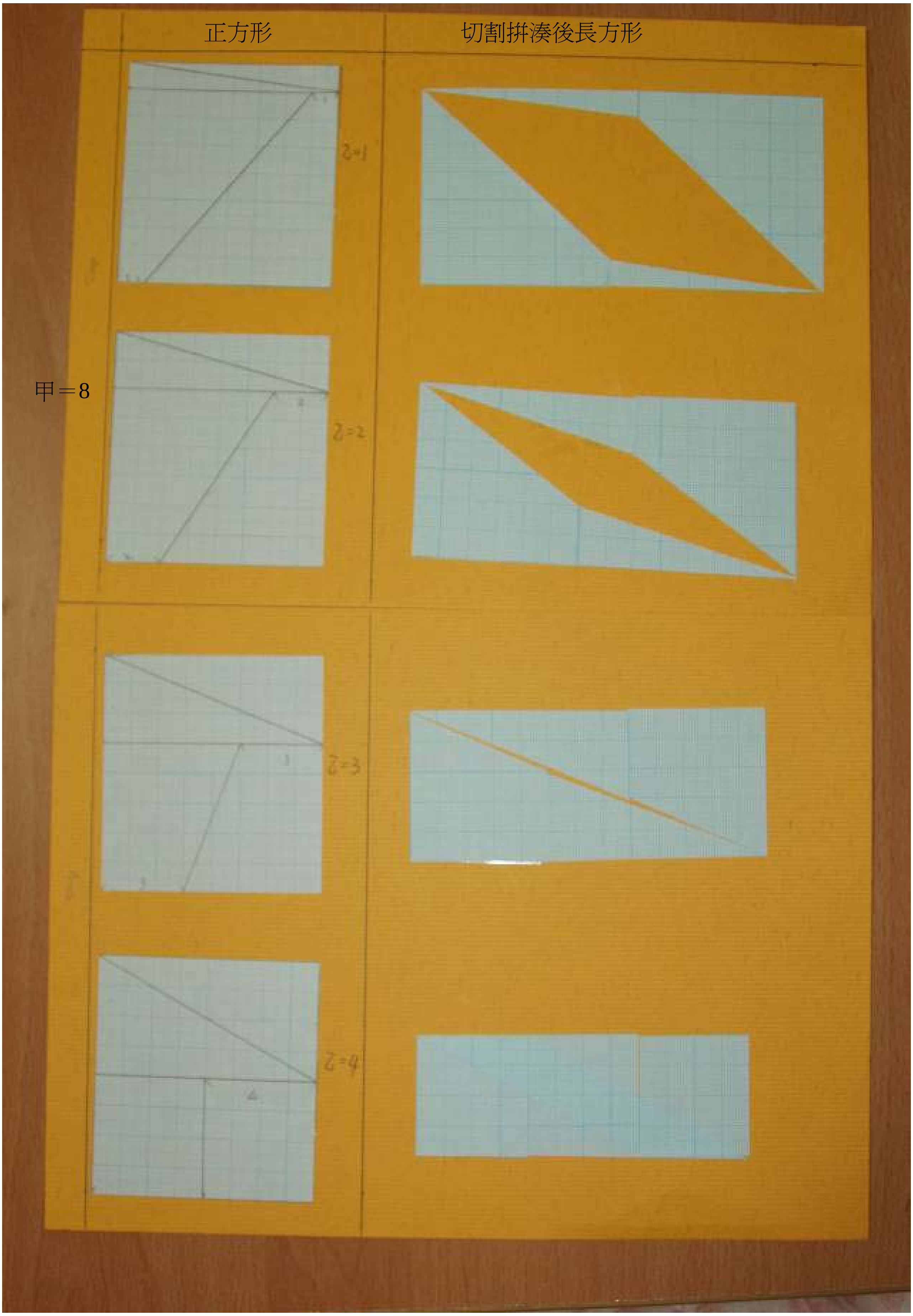


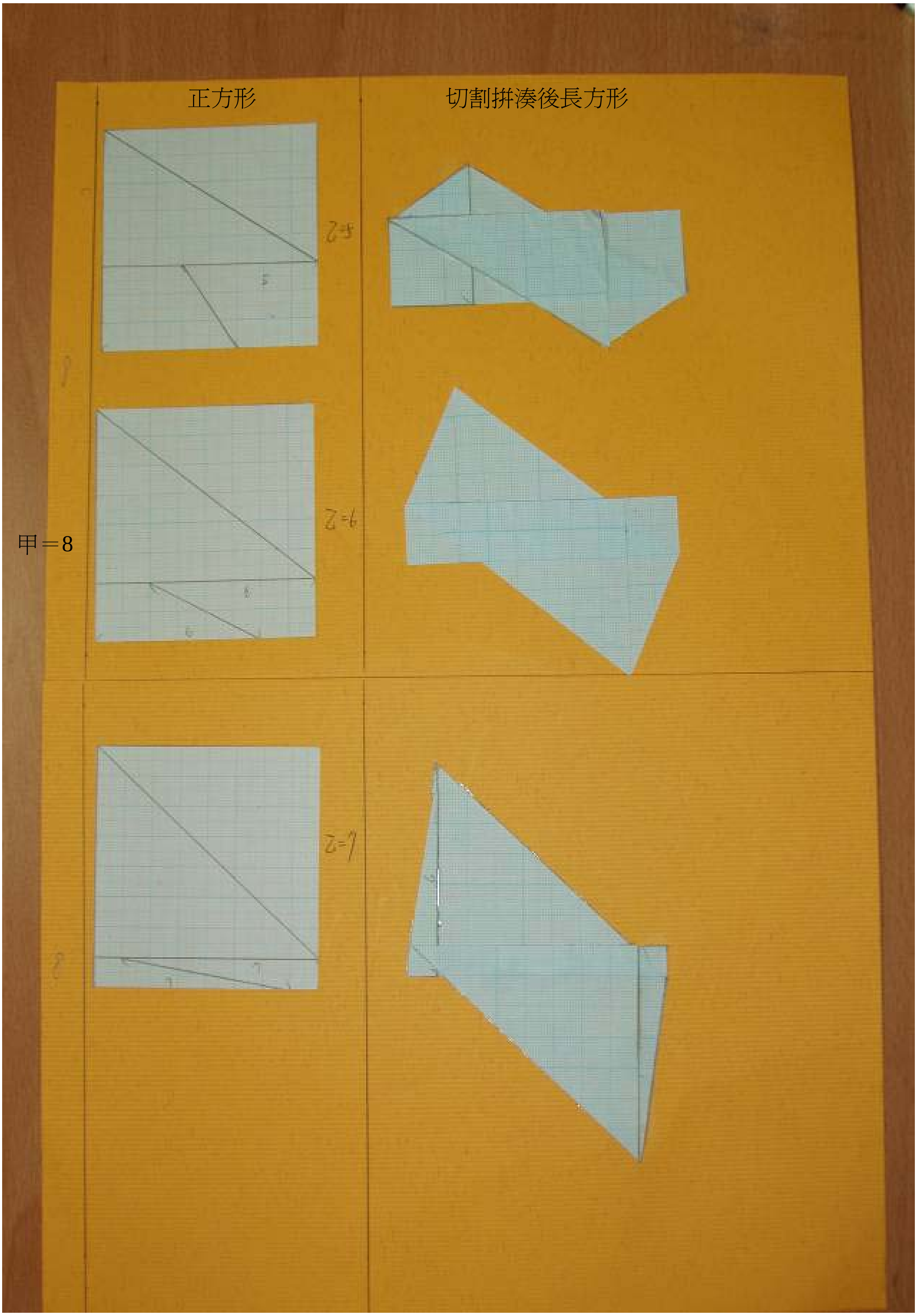
正方形
切割拼湊後長方形
5
Z=1
Z=2
Z=3
Z=4

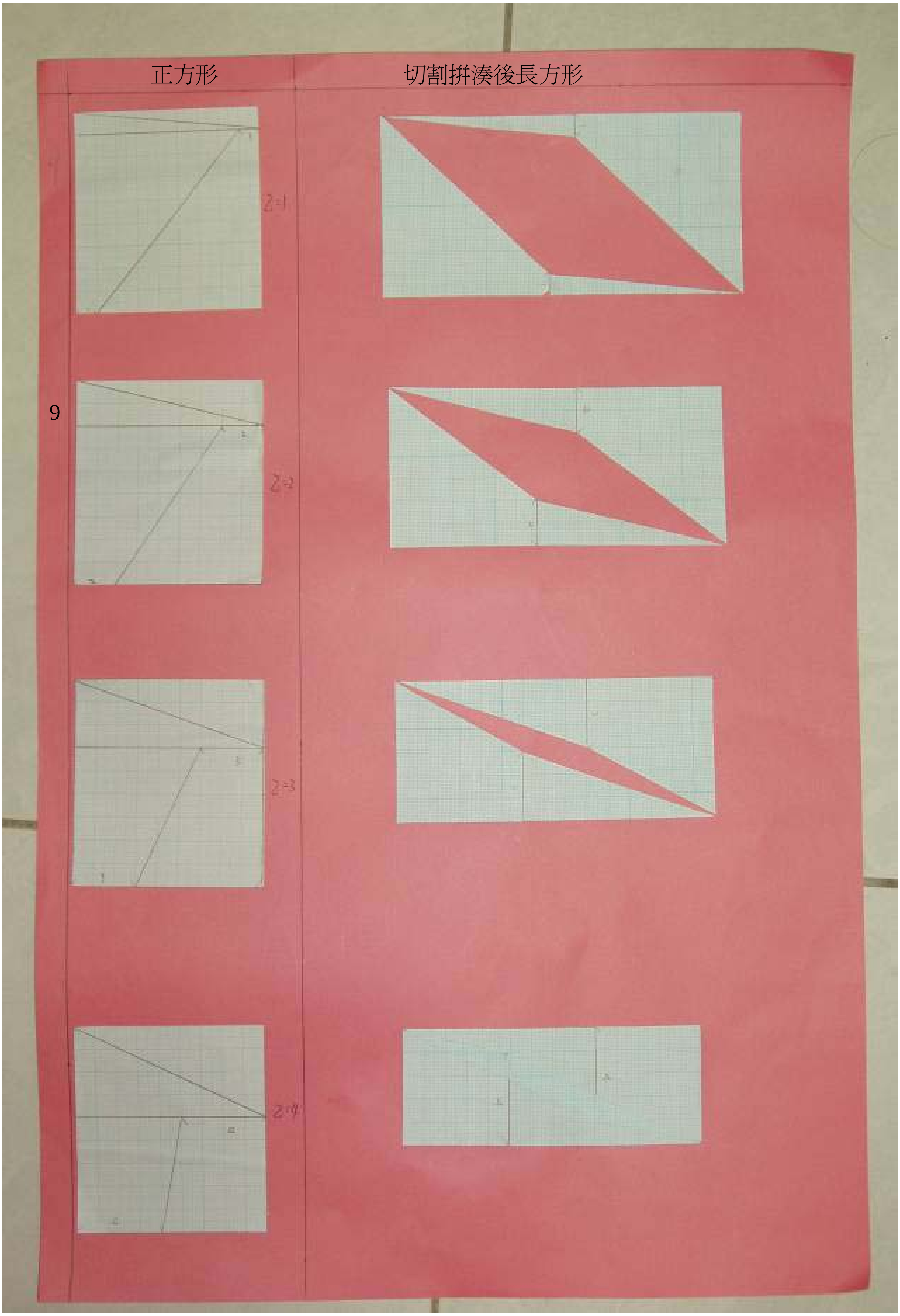

正方形
切割拼湊後長方形
6

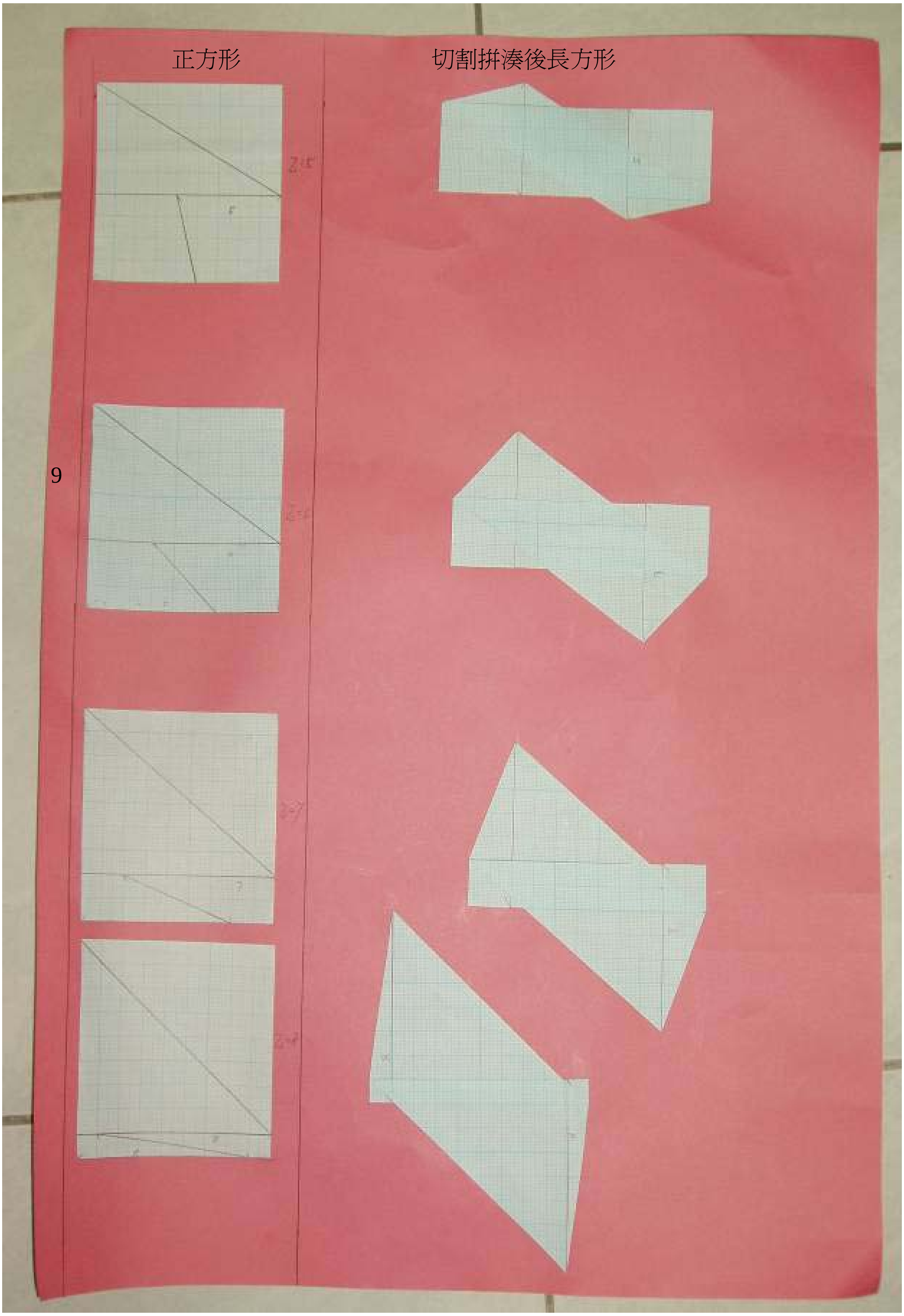

正方形
切割拼湊後長方形
甲＝7
乙=1
乙=2
乙=3
乙=4

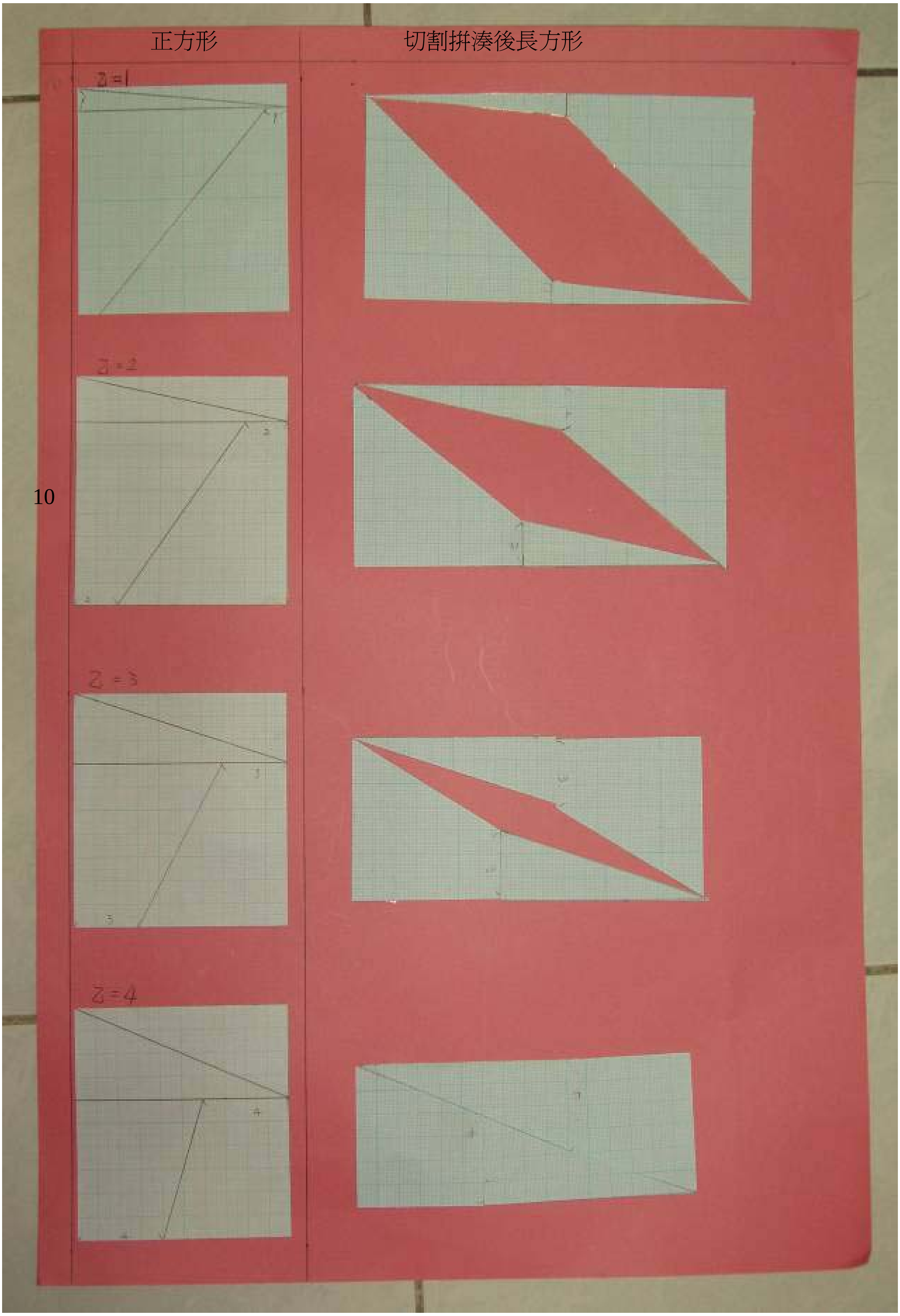

正方形
切割拼湊後長方形
甲＝7

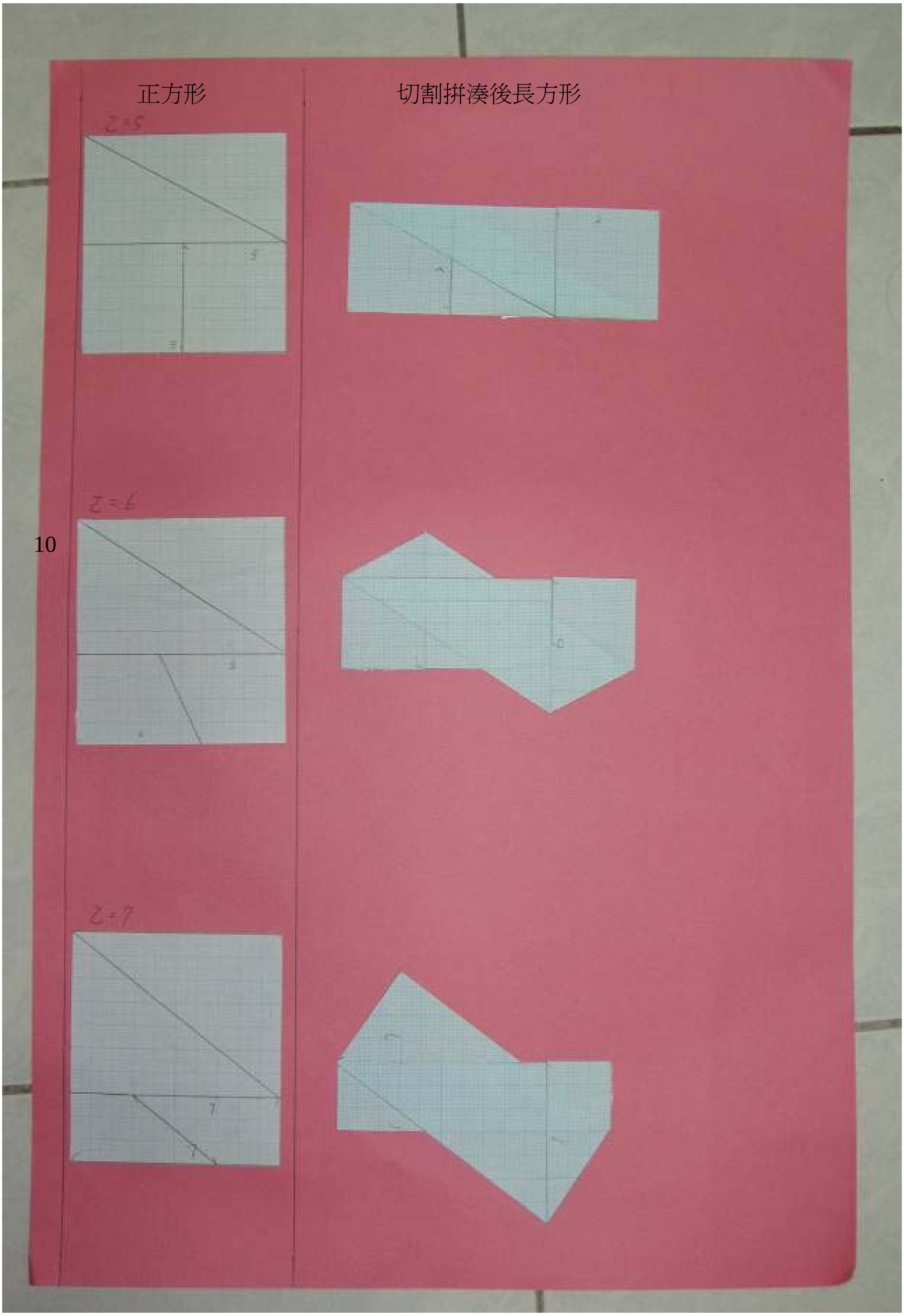

正方形
切割拼湊後長方形
甲＝8
乙=1
乙=2
乙=3
乙=4

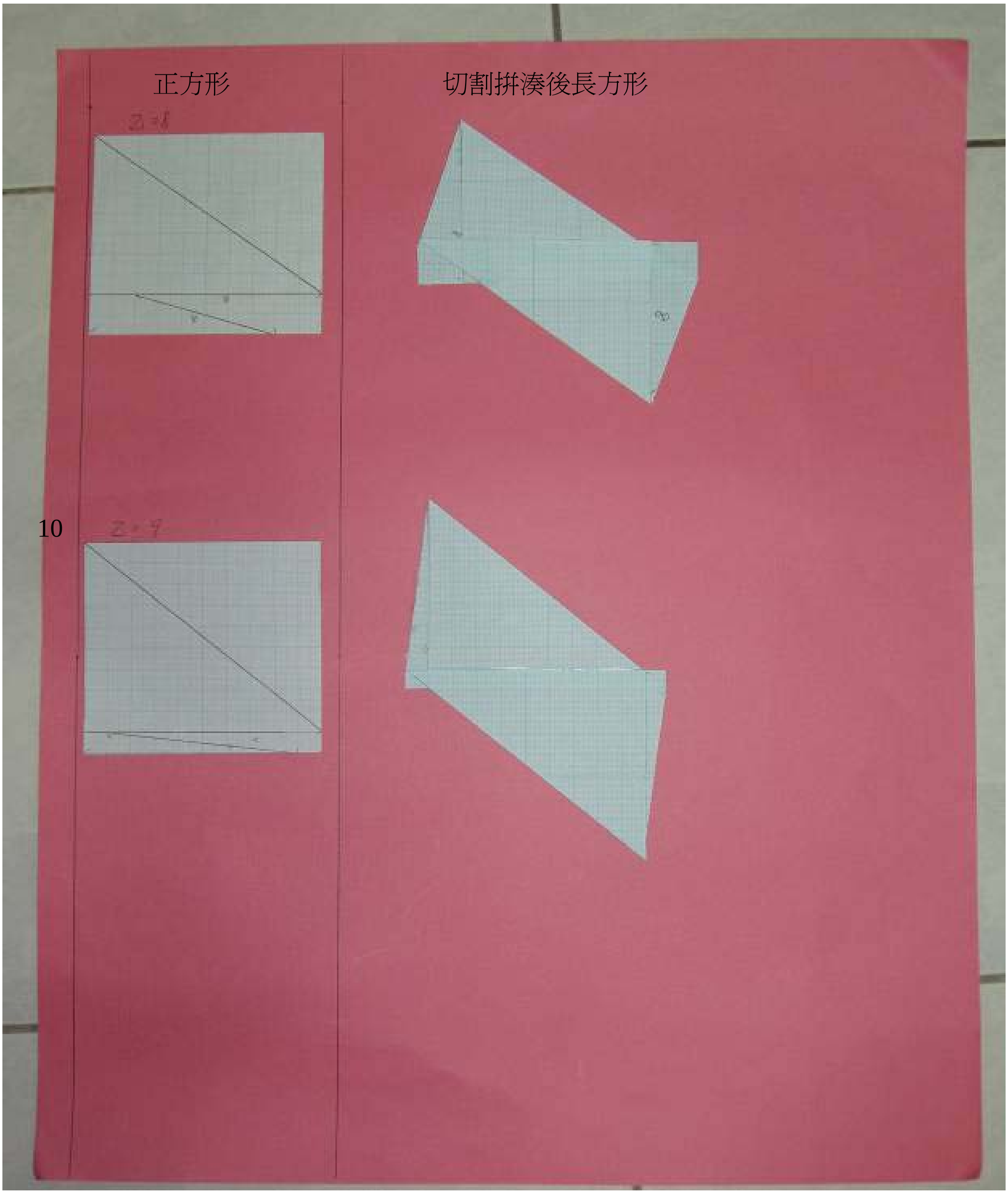

正方形
切割拼湊後長方形
甲＝8


正方形
切割拼湊後長方形
9
Z=1
Z=2
Z=3
Z=4


正方形
切割拼湊後長方形
9


正方形
切割拼湊後長方形
Z=1
Z=2
Z=3
Z=4
10


正方形
切割拼湊後長方形
z=5
z=6
10
z=7


正方形
切割拼湊後長方形
10

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

國小組 數學科

080419
會隱身術的平方公分

臺北縣蘆洲市鷺江國民小學

評語：
作者十分細分，而心觀察與操作，亦有不錯的發現。唯多處描述欠清楚或缺乏合理性學術性及實用價值不高。