中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第三名

080416
互質製造機

臺北縣樹林市文林國民小學

作者姓名：
小六 謝伊妍

指導老師：
王郁惠 林忠正

互質製造機

壹、摘要：

欲找一多項式 Ax_i+1，能使相異之 n 個數，經由此多項式之運算，產生兩兩互質的數，則能夠符合上述條件之 A 值的數，為此 n 個數中，兩兩數之差的最小公倍數。

舉例來說，4、6、12 三個數中，兩兩數之差為 2、6、8，而 2、6、8 之最小公倍數為 24，則找到一多項式為 $24x_i+1$。此時 4、6、12 經由多項式 $24x_i+1$ 運算後得到 97（1×97）、145（5×29）、289（17×17），很顯然的，97、145、289 此三個數兩兩互質。

貳、研究動機：

老師在上數學補充教材之“因數與倍數”單元時，曾介紹一些數學家找質數的方法，他們是把某數經由多項式之運算，找到了質數。後來有同學問老師:「相異的兩數，是否可經由多項式之運算，產生互質的兩數。」頓時間，把老師給問倒了，但老師卻鼓勵我們研究看看。

參、研究目的：

一、找一多項式 Ax_i+1，能使相異的兩數，經由此多項式之運算，產生互質的兩數。

二、找一多項式 Ax_i+1，能使相異的三個數，經由此多項式之運算，產生兩兩互質的數。

三、找一多項式 Ax_i+1，能使相異的 n 個數，經由此多項式之運算，產生兩兩互質的數。

肆、研究設備及器材：紙、筆。

伍、研究過程：

一、我們開始研究時，就仿照數學家找質數的方法去做，亦即假設有一多項式為 Ax_i+1，能使相異的兩數，產生互質的兩數。但 A 值究竟要為何數時，才能符合上述的條件。故首要之急就是要尋找 A 值，在找尋 A 值的過程中，我們做了很多的猜想和推測，後來發現 A 值似乎和這兩數有關，故以下我們將這兩數的關係做一討論。為了方便說明，我們把這兩數假設為 p、q，且 p>q，則 p 和 q 的四種（加、減、乘、除）關係，如表一。表一中的 p 值和 q 值，除了 p=2、q=1 這組數以外，其餘均為隨機取樣，並沒有任何特殊的含義。

表一

p	q	p+q	p−q	p×q	p÷q
2	1	3	1	2	2
3	1	4	2	3	3
3	2	5	1	6	$\frac{3}{2}$
4	1	5	3	4	4
4	2	6	2	8	2
4	3	7	1	12	$\frac{4}{3}$
5	1	6	4	5	5
5	2	7	3	10	$\frac{5}{2}$
5	3	8	2	15	$\frac{5}{3}$
5	4	9	1	20	$\frac{5}{4}$
10	1	11	9	10	10
10	2	12	8	20	5
10	3	13	7	30	$\frac{10}{3}$
10	4	14	6	40	$\frac{5}{2}$
10	5	15	5	50	2
10	6	16	4	60	$\frac{10}{6}$
10	7	17	3	70	$\frac{10}{7}$
10	8	18	2	80	$\frac{10}{8}$
10	9	19	1	90	$\frac{10}{9}$

分析：觀察表一知

(一)兩數之和時，找不到 1 和 2 的值。

(二)兩數之差時，可以找到任何一個數。

(三)兩數之積時，找不到 1 的值。

(四)兩數之商時，找不到 1 的值。

(五)由上述(一)~(四)的分析知，因為 A 值可能為任何一個數，故只有當兩數之差的時候，才可以找的到，因此 A 值似乎和兩數之差有關係。

二、為了驗證我們的推論是否正確，故我們就從 A＝1、2、3…，逐一討論之，亦即分析當 A＝1，是否真的只有當兩數之差為 1 時，此兩數才會互質，抑或是兩數之差為其他數時，也會互質。

(一)A＝1 時，此時多項式為 x_i+1。

表二

x_i	x_i 的值	“x_i+1”的值
x_1	1	2
x_2	2	3
x_3	3	4
x_4	4	5
x_5	5	6
x_6	6	7
x_7	7	8
x_8	8	9
x_9	9	10
⋮	⋮	⋮
x_n	n	n+1

觀察表二知：

1. 當兩數之差為 1 時，此時這兩數經由多項式 x_i+1 運算後之數，會互質。

例如：

①$x_2-x_1=2-1=1$，$g.c.d(x_2+1, x_1+1)=g.c.d(3, 2)=1$(互質)

②$x_n-x_{n-1}=n-(n-1)=1$，$g.c.d(x_n+1, x_{n-1}+1)$

$=g.c.d(n+1, n)=g.c.d((n+1)-n, n)$

$=g.c.d(1, n)=1$

(註)：$g.c.d(n+1, n)=g.c.d((n+1)-n, n)$ 此定理之原理，在第十四頁有詳盡的探討。

2. 當兩數之差為偶數時，此時這兩數經由多項式 x_i+1 運算後之數，不一定會互質。

例如：

①$x_3-x_1=3-1=2$，$g.c.d(x_3+1, x_1+1)=g.c.d(4, 2)=2$(不互質)

②$x_5-x_1=5-1=4$，$g.c.d(x_5+1, x_1+1)=g.c.d(6, 2)=2$

3. 當兩數之差為 3 之倍數時，此時這兩數經由多項式 x_i+1 運算後之數，不一定會互質。

例如：

①$x_5-x_2=5-2=3$，$g.c.d(x_5+1, x_2+1)=g.c.d(6, 3)=3$

②$x_8-x_2=8-2=6$，$g.c.d(x_8+1, x_2+1)=g.c.d(9, 3)=3$

4. 當兩數之差為 5 之倍數時，此時這兩數經由多項式 x_i+1 運算後之數，不一定會互質。

例如：

①$x_9-x_4=9-4=5$，$g.c.d(x_9+1, x_4+1)=g.c.d(10, 5)=5$

②$x_{14}-x_4=14-4=10$，$g.c.d(x_{14}+1, x_4+1)=g.c.d(15, 5)=5$

5. 當兩數之差為 7 之倍數時，此時這兩數經由多項式 x_i+1 運算後之數，不一定會互質。
例如：
①$x_{13}-x_6=13-6=7$，$g.c.d(x_{13}+1，x_6+1)=g.c.d(14，7)=7$
②$x_{20}-x_6=20-6=14$，$g.c.d(x_{20}+1，x_6+1)=g.c.d(21，7)=7$

6. 當兩數之差為 11、13、17… 之倍數時，此時這兩數經由多項式 x_i+1 運算後之數，不一定會互質。
例如：
①$x_{21}-x_{10}=21-10=11$，$g.c.d(x_{21}+1，x_{10}+1)=g.c.d(22，11)=11$
②$x_{25}-x_{12}=25-12=13$，$g.c.d(x_{25}+1，x_{12}+1)=g.c.d(26，13)=13$
③$x_{33}-x_{16}=33-16=17$，$g.c.d(x_{33}+1，x_{16}+1)=g.c.d(34，17)=17$

7. 由上述 1~6 的分析，
我們發現：當 A=1 時，兩數之差要為 1，才可使這兩數經由多項式 x_i+1 之運算，產生互質。

(二)A=2 時，此時多項式為 $2x_i+1$。

表三

x_i	x_i 的值	"$2x_i+1$" 的值
x_1	1	3
x_2	2	5
x_3	3	7
x_4	4	9
x_5	5	11
x_6	6	13
x_7	7	15
x_8	8	17
⋮	⋮	⋮
x_n	n	2n+1

觀察表三知：

1. 當兩數之差為 1 時，此時這兩數經由多項式 $2x_i+1$ 運算後之數，會互質。
例如：
①$x_2-x_1=2-1=1$，$g.c.d(2x_2+1，2x_1+1)=g.c.d(5，3)=1$
②$x_n-x_{n-1}=n-(n-1)=1$，
$g.c.d(2x_n+1，2x_{n-1}+1)=g.c.d(2n+1，2(n-1)+1)$
$=g.c.d(2n+1，2n-1)=g.c.d((2n+1)-(2n-1)，2n+1)$
$=g.c.d(2，2n+1)=1$

2. 當兩數之差為 2 時，此時這兩數經由多項式 $2x_i+1$ 運算後之數，會互質。

例如：

①$x_3-x_1=3-1=2$，$g.c.d(2x_3+1，2x_1+1)=g.c.d(7，3)=1$

②$x_n-x_{n-2}=n-(n-2)=2$，

$g.c.d(2x_n+1，2x_{n-2}+1)=g.c.d(2n+1，2(n-2)+1)$

$=g.c.d(2n+1，2n-3)=g.c.d((2n+1)-(2n-3)，2n+1)$

$=g.c.d(4，2n+1)=g.c.d(2^2，2n+1)=1$

3. 當兩數之差為 3 之倍數時，此時這兩數經由多項式 $2x_i+1$ 運算後之數，不一定會互質。

例如：

①$x_4-x_1=4-1=3$，$g.c.d(2x_4+1，2x_1+1)=g.c.d(9，3)=3$

②$x_7-x_1=7-1=6$，$g.c.d(2x_7+1，2x_1+1)=g.c.d(15，3)=3$

4. 當兩數之差為 4 時，此時這兩數經由多項式 $2x_i+1$ 運算後之數，會互質。

例如：

①$x_5-x_1=5-1=4$，$g.c.d(2x_5+1，2x_1+1)=g.c.d(11，3)=1$

②$x_n-x_{n-4}=n-(n-4)=4$，

$g.c.d(2x_n+1，2x_{n-4}+1)=g.c.d(2n+1，2(n-4)+1)$

$=g.c.d(2n+1，2n-7)=g.c.d((2n+1)-(2n-7)，2n+1)$

$=g.c.d(8，2n+1)=g.c.d(2^3，2n+1)=1$

5. 當兩數之差為 5 之倍數時，此時這兩數經由多項式 $2x_i+1$ 運算後之數，不一定會互質。

例如：

①$x_7-x_2=7-2=5$，$g.c.d(2x_7+1，2x_2+1)=g.c.d(15，5)=5$

②$x_{12}-x_2=12-2=10$，$g.c.d(2x_{12}+1，2x_2+1)=g.c.d(25，5)=5$

6. 當兩數之差為 7 之倍數時，此時這兩數經由多項式 $2x_i+1$ 運算後之數，不一定會互質。

例如：

①$x_{10}-x_3=10-3=7$，$g.c.d(2x_{10}+1，2x_3+1)=g.c.d(21，7)=7$

②$x_{17}-x_3=17-3=14$，$g.c.d(2x_{17}+1，2x_3+1)=g.c.d(35，7)=7$

7. 當兩數之差為 8 時，此時這兩數經由多項式 $2x_i+1$ 運算後之數，會互質。

例如：

①$x_9-x_1=9-1=8$，$g.c.d(2x_9+1，2x_1+1)=g.c.d(19，3)=1$

②$x_n-x_{n-8}=n-(n-8)=8$，

$g.c.d(2x_n+1，2x_{n-8}+1)=g.c.d(2n+1，2(n-8)+1)$

$=g.c.d(2n+1，2n-15)=g.c.d((2n+1)-(2n-15)，2n+1)$

$=g.c.d(16，2n+1)=g.c.d(2^4，2n+1)=1$

8. 當兩數之差為 11、13、17… 之倍數時，此時這兩數經由多項式 $2x_i+1$ 運算後之數，不一定會互質。

例如：

①$x_{16}-x_5=16-5=11$，$g.c.d(2x_{16}+1，2x_5+1)=g.c.d(33，11)=11$

②$x_{32}-x_{19}=32-19=13$，$g.c.d(2x_{32}+1，2x_{19}+1)=g.c.d(65，39)=13$

③$x_{42}-x_{25}=42-25=17$，$g.c.d(2x_{42}+1，2x_{25}+1)=g.c.d(85，51)=17$

9. 由上述 1~8 的分析，

我們發現：當 $A=2$ 時，兩數之差要為 1、2、4、8、…(亦即 2^n，$n=0$、1、2、3…)，

才可使這兩數經由多項式 $2x_i+1$ 之運算，產生互質。

(三)A＝3 時，此時多項式為 $3x_i+1$。

表四

x_i	x_i 的值	“$3x_i+1$” 的值
x_1	1	4
x_2	2	7
x_3	3	10
x_4	4	13
x_5	5	16
x_6	6	19
x_7	7	22
x_8	8	25
⋮	⋮	⋮
x_n	n	3n+1

觀察表四知：

1. 當兩數之差為 1 時，此時這兩數經由多項式 $3x_i+1$ 運算後之數，會互質。

例如：

①$x_2-x_1=2-1=1$，$g.c.d(3x_2+1，3x_1+1)=g.c.d(7，4)=1$

②$x_n-x_{n-1}=n-(n-1)=1$，

$g.c.d(3x_n+1，3x_{n-1}+1)=g.c.d(3n+1，3(n-1)+1)$

$=g.c.d(3n+1，3n-2)=g.c.d((3n+1)-(3n-2)，3n+1)$

$=g.c.d(3，3n+1)=1$

2. 當兩數之差為 2 之倍數時，此時這兩數經由多項式 $3x_i+1$ 運算後之數，不一定會互質。

例如：

①$x_3-x_1=3-1=2$，$g.c.d(3x_3+1，3x_1+1)=g.c.d(10，4)=2$

②$x_5-x_1=5-1=4$，$g.c.d(3x_5+1，3x_1+1)=g.c.d(16，4)=4$

3. 當兩數之差為 3 時，此時這兩數經由多項式 $3x_i+1$ 運算後之數，會互質。

例如：

①$x_4-x_1=4-1=3$，$g.c.d(3x_4+1，3x_1+1)=g.c.d(13，4)=1$

②$x_n-x_{n-3}=n-(n-3)=3$，

$g.c.d(3x_n+1，3x_{n-3}+1)=g.c.d(3n+1，3(n-3)+1)$

$=g.c.d(3n+1、3n-8)=g.c.d((3n+1)-(3n-8)，3n+1)$

$=g.c.d(9，3n+1)=g.c.d(3^2，3n+1)=1$

4. 當兩數之差為 5 之倍數時，此時這兩數經由多項式 $3x_i+1$ 運算後之數，不一定會互質。

例如：

①$x_8-x_3=8-3=5$，$g.c.d(3x_8+1，3x_3+1)=g.c.d(25，10)=5$

②$x_{13}-x_3=13-3=10$，$g.c.d(3x_{13}+1，3x_3+1)=g.c.d(40，10)=10$

5. 當兩數之差為 7 之倍數時，此時這兩數經由多項式 $3x_i+1$ 運算後之數，不一定會互質。
例如：
①$x_9-x_2=9-2=7$，$g.c.d(3x_9+1，3x_2+1)=g.c.d(28，7)=7$
②$x_{16}-x_2=16-2=14$，$g.c.d(3x_{16}+1，3x_2+1)=g.c.d(49，7)=7$
6. 當兩數之差為 9 時，此時這兩數經由多項式 $3x_i+1$ 運算後之數，會互質。
例如：
①$x_{10}-x_1=10-1=9$，$g.c.d(3x_{10}+1，3x_1+1)=g.c.d(31，4)=1$
②$x_n-x_{n-9}=n-(n-9)=9$，
$g.c.d(3x_n+1，3x_{n-9}+1)=g.c.d(3n+1，3(n-9)+1)$
$=g.c.d(3n+1，3n-26)=g.c.d((3n+1)-(3n-26)，3n+1)$
$=g.c.d(27，3n+1)=g.c.d(3^3，3n+1)=1$
7. 當兩數之差為 11、13、17… 之倍數時，此時這兩數經由多項式 $3x_i+1$ 運算後之數，不一定會互質。
例如：
①$x_{18}-x_7=18-7=11$，$g.c.d(3x_{18}+1，3x_7+1)=g.c.d(55，22)=11$
②$x_{17}-x_4=17-4=13$，$g.c.d(3x_{17}+1，3x_4+1)=g.c.d(52，13)=13$
③$x_{28}-x_{11}=28-11=17$，$g.c.d(3x_{28}+1，3x_{11}+1)=g.c.d(85，34)=17$
8. 由上述 1~7 的分析，
我們發現：當 A=3 時，兩數之差要為 1、3、9、…(亦即 3^n，n=0、1、2、3…)，才可使這兩數經由多項式 $3x_i+1$ 之運算，產生互質。

(四)A=4 時，此時多項式為 $4x_i+1$。

表五

x_i	x_i 的值	“$4x_i+1$” 的值
x_1	1	5
x_2	2	9
x_3	3	13
x_4	4	17
x_5	5	21
x_6	6	25
x_7	7	29
x_8	8	33
x_9	9	37
x_{10}	10	41
⋮	⋮	⋮
x_n	n	4n+1

觀察表五知：

1. 當兩數之差為 1 時，此時這兩數經由多項式 $4x_i+1$ 運算後之數，會互質。

例如：

①$x_2-x_1=2-1=1$，$g.c.d(4x_2+1，4x_1+1)=g.c.d(9，5)=1$

②$x_n-x_{n-1}=n-(n-1)=1$，

$g.c.d(4x_n+1，4x_{n-1}+1)=g.c.d(4n+1，4(n-1)+1)$

$=g.c.d(4n+1，4n-3)=g.c.d((4n+1)-(4n-3)，4n+1)$

$=g.c.d(4，4n+1)=g.c.d(2^2，4n+1)=1$

2. 當兩數之差為 2 時，此時這兩數經由多項式 $4x_i+1$ 運算後之數，會互質。

例如：

①$x_3-x_1=3-1=2$，$g.c.d(4x_3+1，4x_1+1)=g.c.d(13，5)=1$

②$x_n-x_{n-2}=n-(n-2)=2$，

$g.c.d(4x_n+1，4x_{n-2}+1)=g.c.d(4n+1，4(n-2)+1)$

$=g.c.d(4n+1，4n-7)=g.c.d((4n+1)-(4n-7)，4n+1)$

$=g.c.d(8、4n+1)=g.c.d(2^3、4n+1)=1$

3. 當兩數之差為 3 之倍數時，此時這兩數經由多項式 $4x_i+1$ 運算後之數，不一定會互質。（因礙於篇幅的關係，故不舉例說明）

4. 當兩數之差為 4 時，此時這兩數經由多項式 $4x_i+1$ 運算後之數，會互質。

例如：

①$x_5-x_1=5-1=4$，$g.c.d(4x_5+1，4x_1+1)=g.c.d(21，5)=1$

②$x_n-x_{n-4}=n-(n-4)=4$，

$g.c.d(4x_n+1，4x_{n-4}+1)=g.c.d(4n+1，4(n-4)+1)$

$=g.c.d(4n+1，4n-15)=g.c.d((4n+1)-(4n-15)，4n+1)$

$=g.c.d(16，4n+1)=g.c.d(2^4，4n+1)=1$

5. 當兩數之差為 5、7、11、13… 之倍數時，此時這兩數經由多項式 $4x_i+1$ 運算後之數，不一定會互質。（因礙於篇幅的關係，故不舉例說明）

6. 當兩數之差為 8 時，此時這兩數經由多項式 $4x_i+1$ 運算後之數，會互質。

例如：①$x_9-x_1=9-1=8$，$g.c.d(4x_9+1，4x_1+1)=g.c.d(37，5)=1$

②$x_n-x_{n-8}=n-(n-8)=8$，

$g.c.d(4x_n+1，4x_{n-8}+1)=g.c.d(4n+1，4(n-8)+1)$

$=g.c.d(4n+1，4n-31)=g.c.d((4n+1)-(4n-31)，4n+1)$

$=g.c.d(32，4n+1)=g.c.d(2^5，4n+1)=1$

7. 由上述 1~6 的分析，

我們發現：當 A＝4 時，兩數之差要為 1、2、4、8…（亦即 2^n，n＝0、1、2、3…），才可使這兩數經由多項式 $4x_i+1$ 之運算，產生互質。

(五)A＝5、6、7、8、9、10 時，同上述之研究方法，但因篇幅的關係(詳見筆記)，在此僅將研究結果列於表六中。

表六

A 值	兩數之差要為下列各數，才可使這兩數經由多項式 Ax_i+1 之運算，產生互質。	將左列之數一般化
1	1	1
2	1、2、4、8、16…	2^n(n＝0、1、2、3…)
3	1、3、9、27…	3^n(n＝0、1、2、3…)
4	1、2、4、8、16…	2^n(n＝0、1、2、3…)
5	1、5、25…	5^n(n＝0、1、2、3…)
6	1、2、3、4、6、8、9…	2^n 或 3^n(n＝0、1、2…)或 6n(n＝1、2…)
7	1、7、49…	7^n(n＝0、1、2、3…)
8	1、2、4、8、16…	2^n(n＝0、1、2、3…)
9	1、3、9、27…	3^n(n＝0、1、2、3…)
10	1、2、4、5、8、10…	2^n 或 5^n(n＝0、1、2…或 10n(n＝1、2…)

(六)觀察分析表六，我們發現：

1. A 值恰巧都可從兩數之差中找到。
2. (1)當兩數差 1 時，A 值可為 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10…
   (2)當兩數差 2 時，A 值可為 2、4、6、8、10…
   (3)當兩數差 3 時，A 值可為 3、6、9…
   (4)當兩數差 4 時，A 值可為 2、4、6、8、10…
   (5)當兩數差 5 時，A 值可為 5、10…
   (6)由上述(1)~(5)知，A 值可由兩數之差的倍數找到。
3. 綜合 1、2 知：A 值為兩數之差的倍數。

(七)由(六)之分析知，相異的兩數經由多項式 Ax_i+1 之運算，會產生互質，此時 A 值為此兩數之差的倍數。

(八)我們將(七)之敘述，寫成結論一，如下：

結論一：相異兩正整數 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$，則將有一多項式 Ax_i+1，使得(Ax_1+1)與(Ax_2+1)兩數互質，其中 A 為 (x_2-x_1) 之倍數。

(九)舉一個例子來說明結論一。

[範例一]求 10、15 兩數經由多項式 Ax_i+1 運算後之結果?

<說明>：A＝15－10＝5，此時多項式為 $5x_i+1$。

當 $x_1=10$，$5x_1+1=5\times10+1=51=3\times17$

當 $x_2=15$，$5x_2+1=5\times15+1=76=4\times19$

因為 $g.c.d(5x_1+1，5x_2+1)=g.c.d(51，76)=1$

可見多項式 $5x_i+1$ 是一個可使 10、15 兩數產生互質的多項式。

三、找出“能使相異三個正整數，產生兩兩互質之數”的多項式。

(一)由結論一中知，當兩個數時，多項式中的 A 值為兩數之差的倍數，故我們推測，三個數時就是此三數中，兩兩數之差的最小公倍數。

(二)我們將(一)之敘述寫成結論二，如下：

結論二：相異三個正整數 x_1、x_2、x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，則將有一多項式 Ax_i+1，使得(Ax_1+1)、(Ax_2+1)、(Ax_3+1)為兩兩互質的數，其中 A 為 $(x_2-x_1$、x_3-x_1、$x_3-x_2)$ 之最小公倍數。

(三)舉一個例子來說明結論二。

[範例二]求 8、9、12 三個數經由多項式 Ax_i+1 運算後之結果?

<說明>：$A=\text{l.c.m}\ (9-8，12-8，12-9)$

$=\text{l.c.m}\ (1，4，3)=12$，此時多項式為 $12x_i+1$。

當 $x_1=8$，$12x_1+1=12\times8+1=97=1\times97$

當 $x_2=9$，$12x_2+1=12\times9+1=109=1\times109$

當 $x_3=12$，$12x_3+1=12\times12+1=145=5\times29$

因為 $\text{g.c.d}(12x_1+1，12x_2+1，12x_3+1)$

$=\text{g.c.d}(97，109，145)=1$

可見多項式 $12x_i+1$ 是一個可使 8、9、12 三個數，產生兩兩互質的多項式。

四、找出“能使相異 n 個正整數，產生兩兩互質之數”的多項式。

(一)我們由結論二可推論出：能使相異 n 個正整數 x_1、x_2、$x_3\cdots x_n$，產生兩兩互質之數的多項式為 Ax_i+1，其中 A 值為此 n 個數中，兩兩數之差的最小公倍數，將上述之敘述寫成結論三，亦即

結論三：相異 n 個正整數 x_1、x_2、$x_3\cdots x_n$，且 $x_1<x_2<x_3\cdots<x_n$，則將有一多項式 Ax_i+1，使得(Ax_1+1)、(Ax_2+1)、$\cdots(Ax_n+1)$為兩兩互質的數，其中 A 為 $(x_2-x_1$、x_3-x_1、x_3-x_2、x_4-x_1、$\cdots$、$x_n-x_{n-1})$ 之最小公倍數。

(二)舉一個例子來說明結論三。

[範例三]求 2、3、5、7 四個數經由多項式 Ax_i+1 運算後之結果?

<說明>：$A=\text{l.c.m}\ (3-2，5-2，5-3，7-2，7-3，7-5)$

$=\text{l.c.m}\ (1，3，2，5，4，2)=60$，此時多項式為 $60x_i+1$。

當 $x_1=2$ 時，$60x_1+1=60\times2+1=121=11\times11$

當 $x_2=3$ 時，$60x_2+1=60\times3+1=181=1\times181$

當 $x_3=5$ 時，$60x_3+1=60\times5+1=301=7\times43$

當 $x_4=7$ 時，$60x_4+1=60\times7+1=421=1\times421$

因為 $\text{g.c.d}(60x_1+1，60x_2+1，60x_3+1，60x_4+1)$

$=\text{g.c.d}(121，181，301，421)=1$

可見多項式 $60x_i+1$ 是一個可使 2、3、5、7 四個數，產生兩兩互質的多項式。

陸、研究結果：

有相異 n 個正整數 x_1、x_2、$x_3 \cdots x_n$，且 $x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_n$，則將有一多項式 $Ax_i + 1$，使得(Ax_1+1)、$(Ax_2+1) \cdots (Ax_n+1)$為兩兩互質的數，其中 A 為（x_2-x_1、x_3-x_1、x_3-x_2、x_4-x_1、…、x_n-x_{n-1}）之最小公倍數。

柒、討論：

一、結論之原理探討：在此我們將討論結論三之原理

結論三：相異 n 個正整數 x_1、x_2、$x_3 \cdots x_n$，且 $x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_n$，則將有一多項式 $Ax_i + 1$，使得(Ax_1+1)、(Ax_2+1)、$\cdots(Ax_n+1)$為兩兩互質的數，其中 A 為（x_2-x_1、x_3-x_1、x_3-x_2、x_4-x_1、…、x_n-x_{n-1}）之最小公倍數。

（一）假設 $p>q$，且 $x_p > x_q$，則將 x_p、x_q 分別代入多項式 Ax_i+1 中，
得到 Ax_p+1、Ax_q+1，此時 A 為(x_p-x_q)之倍數。

則 $g.c.d(Ax_p+1, Ax_q+1)$
$=g.c.d((Ax_p+1)-(Ax_q+1), Ax_p+1)$
$=g.c.d(Ax_p-Ax_q, Ax_p+1)$
$=g.c.d(A(x_p-x_q), Ax_p+1)$

（二）令 $g.c.d(A(x_p-x_q), Ax_p+1)=b$，假設 $b \neq 1$，則 $b \geqq 2$，
那麼必定存在一質數 $m \geqq 2$，使得 m 為 b 之因數。
又因為 b 為 $A(x_p-x_q)$之因數，所以 m 為 $A(x_p-x_q)$之因數。
由此可推得 m 為 A 之因數或(x_p-x_q)之因數。又因為 A 為(x_p-x_q)之倍數，故 m 為 A 之因數，那麼也必為 Ax_p 之因數。

（三）由（二）知 m 為 b 之因數，又因為 b 為(Ax_p+1)之因數，
所以 m 為(Ax_p+1)之因數。

（四）由（二）、（三）之推論知，m 為 Ax_p 之因數，又為(Ax_p+1)之因數，
但因連續的兩數會互質，所以 $m=1$，這和 $m \geqq 2$ 互相矛盾，故我們假設 $b \neq 1$ 是錯的，亦即 $b=1$，所以 $g.c.d(A(x_p-x_q), Ax_p+1)=1$。

（五）由（一）知 $g.c.d(Ax_p+1, Ax_q+1)=g.c.d(A(x_p-x_q), Ax_p+1)$
又由（四）知 $g.c.d(A(x_p-x_q), Ax_p+1)=1$
故 $g.c.d(Ax_p+1, Ax_q+1)=1$
所以對於 Ax_1+1、Ax_2+1、Ax_3+1、…、Ax_n+1 這 n 個數而言，
它們兩兩之間均會互質。

二、我們在研究過程及結論三之原理探討時，均利用“兩數之最大公因數會和此兩數之差及其中任一個數之最大公因數相等”的理論，亦即若將此兩數假設為 x、y，且 x＞y，則 g.c.d(x，y)＝g.c.d(x－y，x)，以下我們將探討此一關係。

（一）設此兩數為 x、y，且 x＞y，令 g.c.d(x，y)＝d，

則 $x=c_1\cdot d$，$y=c_2\cdot d$，且 $g.c.d(c_1, c_2)=1$…①

（二）$x-y=c_1\cdot d-c_2\cdot d=(c_1-c_2)\cdot d$

$g.c.d(x-y, x)=g.c.d((c_1-c_2)\cdot d, c_1\cdot d)$

$=d\cdot g.c.d(c_1-c_2, c_1)$…②

（三）假設 $g.c.d(c_1-c_2, c_1)\neq 1$

則 $g.c.d(c_1-c_2, c_1)=t$，且 $t\geqq 2$

令 $c_1-c_2=e_1\cdot t$，$c_1=e_2\cdot t$

將 $c_1=e_2\cdot t$ 代入 $c_1-c_2=e_1\cdot t$ 中

得到 $e_2\cdot t-c_2=e_1\cdot t$，則 $c_2=(e_2-e_1)t$

故 $g.c.d(c_1, c_2)=g.c.d(e_2 t, (e_2-e_1)t)=t\cdot g.c.d(e_2, e_2-e_1)\geqq 2$

但由（一）中得知矛盾，亦即假設 $g.c.d(c_1-c_2, c_1)\neq 1$ 是不對的，

故 $g.c.d(c_1-c_2, c_1)=1$…③

（四）又由②、③中知，$g.c.d(x-y, x)=d\cdot g.c.d(c_1-c_2, c_1)=d\cdot 1=d$

（五）由（一）、（四）中可推得 g.c.d(x，y)＝g.c.d(x－y，x)

三、在本研究裡，我們把欲找的多項式假設為 Ax_i+1，在此多項式中常數項為 1，那如果常數項為 2、3、4…等其他數時，是否也可使任意 n 個數經由此多項式之運算，產生兩兩互質的數，以下我們將對此做一探討。

（一）假設多項式 Ax_i+B 可使 x_p、x_q 兩個數經由多項式之運算，產生互質。

其中 $x_p>x_q$，且 A 為 (x_p-x_q) 之倍數。

1. 將 x_p、x_q 代入多項式 Ax_i+B 中，得到 Ax_p+B 與 Ax_q+B，

則 $g.c.d(Ax_p+B, Ax_q+B)=g.c.d((Ax_p+B)-(Ax_q+B), Ax_p+B)$

$=g.c.d(A(x_p-x_q), Ax_p+B)$

令 $g.c.d(A(x_p-x_q), Ax_p+B)=g$…①，可推得 g 為 $A(x_p-x_q)$ 之因數，又因為 A 為 (x_p-x_q) 之倍數，所以 g 為 A 之因數，也必為 Ax_p 之因數。

2. 由①中知 g 為“Ax_p+B”之因數。

3. 由 1.2. 中知 g 為 Ax_p 與“Ax_p+B”之因數，

所以 g 為“$(Ax_p+B)-Ax_p=B$”之因數。

4. 既然 g 為 B 之因數，

(1) 當 B＝1 時，g＝1。

(2) 當 B≠1 時，g 不一定會等於 1。

故唯有當 B＝1 時，g＝1。此時 $g.c.d(Ax_p+B, Ax_q+B)$

$=g.c.d(A(x_p-x_q), Ax_p+B)=g=1$。

（二）由（一）知多項式 Ax_i+B，當 B＝1 時，才可使兩個數經由多項式之運算，產生互質。同理當三個數、四個數、…、n 個數時，B 也要為 1，才可使這 n 個數經由多項式之運算，產生兩兩互質的數。

捌、參考資料：

王元（民 86)。素數。臺北市：九章。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評　　語

國小組 數學科

第三名

080416
互質製造機

臺北縣樹林市文林國民小學

評語：
研究主題有趣，產出的結果漂亮，從觀察，猜想到推測，皆做了詳細的說明與分析，最後再由證明導出結論，令人信服。然證明過程和使用的符號已超出小學程度，恐國小學生不易理解。
(註:p15 的證明過程局部有誤，可刪掉或可再改進)