

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

最佳創意獎

080415

正立方體的變裝秀---五連塊 (Pentominoes)
拼拼樂

臺北市大安區龍安國民小學

作者姓名：

小五 楊貽得 小五 謝佳凌 小五 吳光宇
小五 黃冠博

指導老師：

陳淑苾

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會 作品說明書

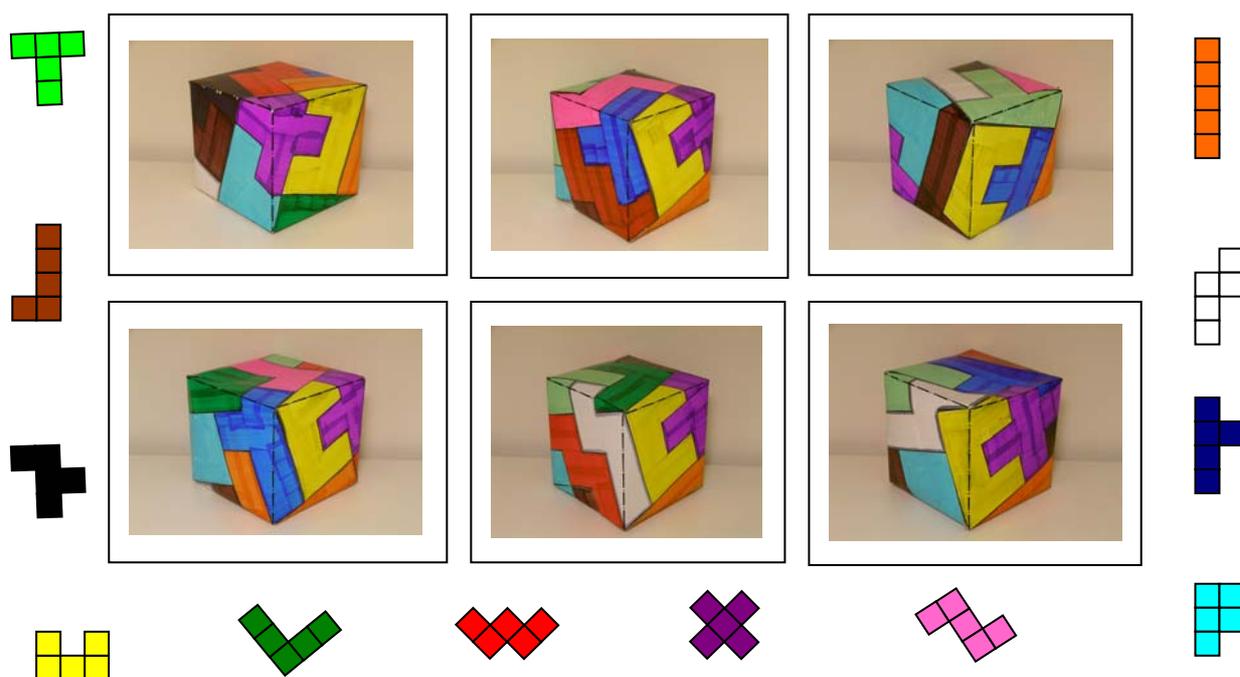
科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：正立方體的變裝秀---五連塊（Pentominoes）拼拼樂

關 鍵 詞：正立方體、五連塊、Pentominoes

編 號：



目 次

壹、摘要.....	1
貳、研究動機.....	1
參、研究目的.....	1
肆、研究設備與器材.....	1
伍、研究過程及方法.....	1
陸、研究結果.....	2
柒、討論.....	24
捌、結論.....	26
玖、參考資料及其他.....	26

表 目 次

表一、五連塊可以拼成正立方體的十一個模組平面展開圖數量統計表.....	3
表二、移動圖六模組 7-1 所得到的不同五連塊排列平面圖統計表.....	9

圖 目 次

圖一、十二型五連塊的顏色、圖形及命名.....	2
圖二、十一種能構成正立方體的展開圖.....	2
圖三、面積為 10 平方單位的正方形.....	3
圖四、十一種表面積為 60 平方單位的正立方體展開圖模組.....	3
圖五、可以拼成正立方體的十一種模組的五連塊排列圖圖面.....	8
圖六、移動圖六模組 7-1 所得到的不同型五連塊平面排列圖.....	23
圖七、用剪刀將圖六模組 7-1 所構成的正立方體剪開並攤平，所得的平面圖.....	24
圖八、U 型能克服 X 型凹凸情形.....	25
圖九、P 形能和多種五連塊形成簡單構形.....	25
圖十、不同的平面展開圖卻形成相同的立體圖.....	25
圖十一、六個不同的立體圖.....	26

正立方體的變裝秀---五連塊(Pentominoes)拼拼樂

壹、摘要

五連塊 (Pentominoes) 是由五個正方形以邊邊相連組合而成的圖形，和數學中的幾何學、組合學及圖論等有密切的關係(孫文先，民 84)。在這次「用全部的 12 片五連塊不重疊地拼出一個正立方體的表面」的研究探索中，結果發現有相當多種不同的解。技巧是先將較麻煩的五連塊如 X 型和 U 型等組合，消除轉角使其成為較平整的圖形；而把較容易和其它五連塊拼合的 P 型留到後面收尾，以這樣的做法再配合空間中的相對凹凸互補，我們一共完成了 6 個不同的正立方體。再試著拆解已拼成的一個正立方體，用平移、旋轉等方式即可得更多的平面解。我們發現這個五連塊的問題真是個十分迷人、有趣的幾何世界！

貳、研究動機

四年級資優班的課程中，我們以五連塊 (Pentominoes) 為主題進行分組學習。課程中，老師要我們試著用五連塊拼成許多種幾何造型及挑戰以五連塊為邊圍出最大面積，我們覺得很有趣。在資料蒐集的研究過程中，看到九章出版社所出版的「多方塊的數學問題、拼圖謎題與遊戲」一書中提出有關五連塊最具挑戰性的一個問題是：用全部的 12 片五連塊不重疊地拼出一個正立方體的表面(孫文先，民 84)。五年級數學課程中第三單元學到了正立方體，我們覺得內容難度並不高，所以激起了想要挑戰這個難題的想法，因此就以此做為研究的主題。

參、研究目的

用全部的 12 種五連塊不重疊地拼出一個正立方體的表面，可以有幾種不同的排列樣式。

肆、研究設備與器材

- 一、以硬方眼卡紙自製的 12 種五連塊。
- 二、方眼紙、硬方眼卡紙。
- 三、尺、彩色筆、膠帶、剪刀。

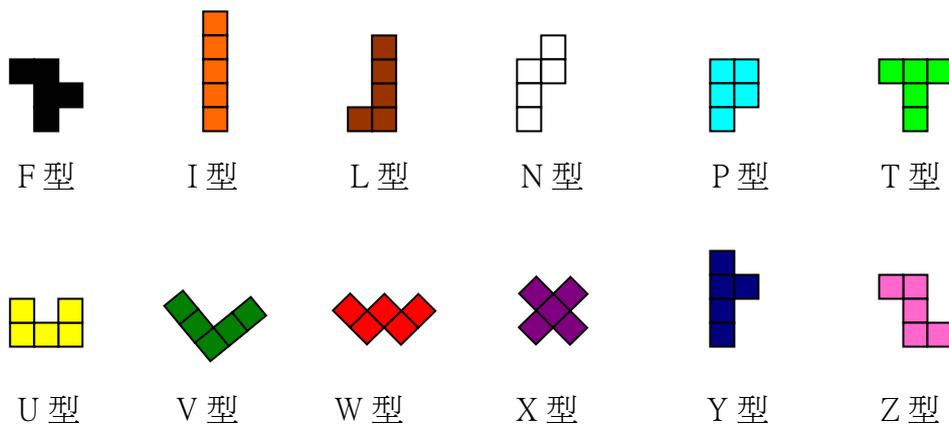
伍、研究過程及方法

- 一、將硬方眼卡紙做成每一單位為一平方公分的五連塊，命名並雙面塗色，以方便辨認。
- 二、用全部的 12 種五連塊拼貼一個正立方體的表面。
 - (一)、找出可形成正立方體的平面展開圖。
 - (二)、將展開圖畫在方眼紙上。
 - (三)、將自製的 12 種五連塊排在每一個模上，使其能摺疊成一個正立方體。
 - (四)、畫出五連塊的排列方式並塗色。
 - (五)、剪下正立方體平面展開圖，做成一正立方體。
 - (六)、核對並統計不同正立方體的數目。
- 三、用同一種正立方體的平面展開圖尋找其他的平面解。
 - (一)、將已能組成正立方體的模組 7-1 平面展開圖做區塊平移，以尋找其他的平面解。
 1. 移動展開圖形中主要的五連塊，使其成為其他的模組。
 2. 根據移動的五連塊的結構形狀，考慮立體空間中相對的位置，做旋轉調整。

3. 畫下五連塊的排列方式。
 4. 統計所能構成的不同平面個數及討論。
- (二)、沿模組 7-1 所組成的正立方體剪開五連塊邊線，以尋找其他的平面解。
1. 將模組 7-1 所組成的正立方體剪開，並攤平成平面圖。
 2. 畫下展開圖中五連塊的排列方式。
 3. 統計所能構成的不同平面個數及討論。

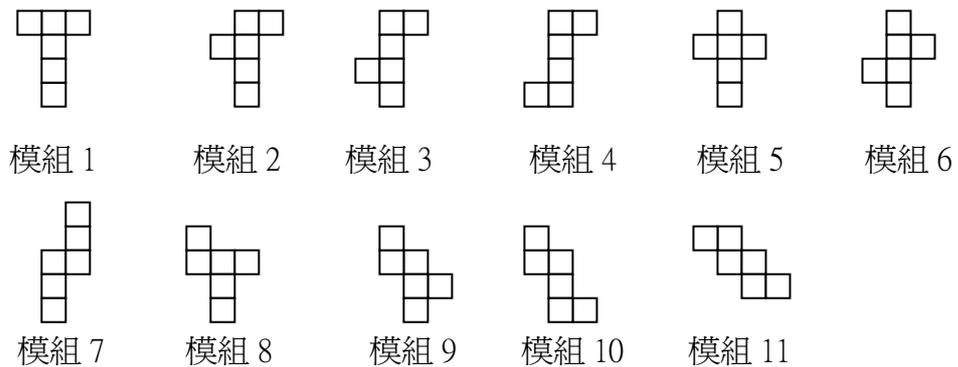
陸、研究結果

一、五連塊是由五個正方形以邊邊相連組合而成的圖形，經旋轉或翻轉均屬同一型。我們以英文字母外型相似為其命名的依據，並統一相同的顏色作為溝通的標準。如此所得之五連塊共有 12 型。分別是：



圖一、十二型五連塊的顏色、圖形及命名。

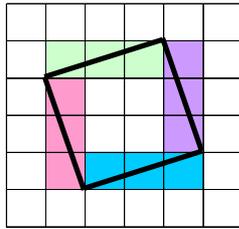
二、因為 12 型的五連塊是要不重疊地拼在一個正立方體的表面，所以我們將正立方體攤開成平面展開圖再進行拼組，發現能構成正立方體的平面展開圖共有 11 種(林傑斌，民 84)。分別是：



圖二、十一種能構成正立方體的展開圖。

三、一個五連塊是由五個一平方單位的正方形所組成的，所以一個五連塊的面積是 5 平方單位。因此，12 個五連塊的面積總共為 60 平方單位($5 \times 12 = 60$)。一個正立方體共有六個面，故正立方體的每一個面的面積應為 10 平方單位($60 \div 6 = 10$)。

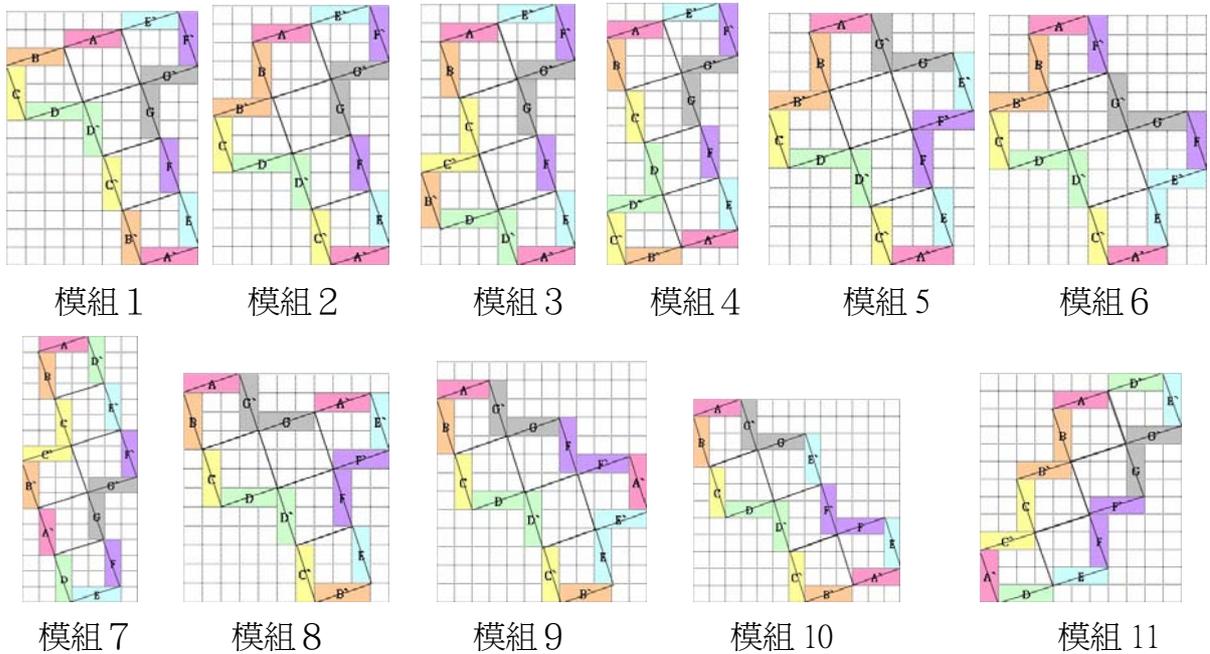
四、一個正方形面積為 10 平方單位，所以我們將圖形在方眼紙上表示成如下圖所示：



圖三、面積為 10 平方單位的正方形。

這正方形圖形中有 4 個完整的正方形和 4 個三角形。所以，面積為 $4 + (3 \div 2) \times 4 = 10$

五、因正立方體表面積為 60 平方單位，所以將所有模組的平面展開圖調整成下列的 11 種型式，再進行 12 型五連塊不重疊地拼組。展開圖中以相同的顏色和對應的字母做為空間中相連接邊的標示，因此，拼組 12 型五連塊時，要考慮相對位置的圖形形狀，才能拼出一個正立方體。



圖四、十一個表面積為 60 平方單位的正立方體模組。

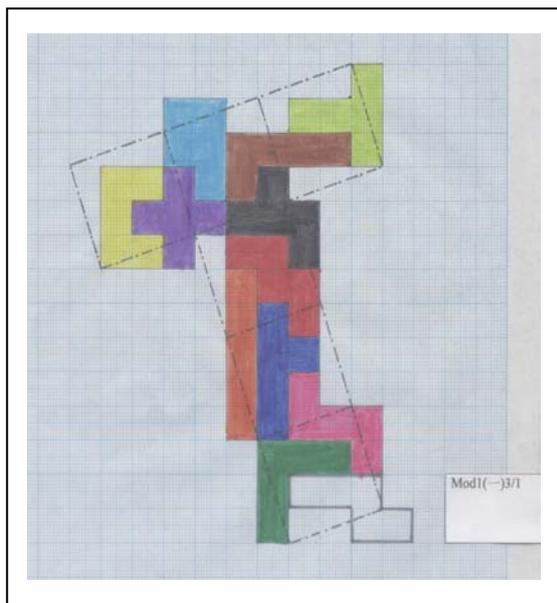
六、每一個模組的平面展開圖，可以用五連塊拼成正立方體的數量分別如下：

(一)、統計表:

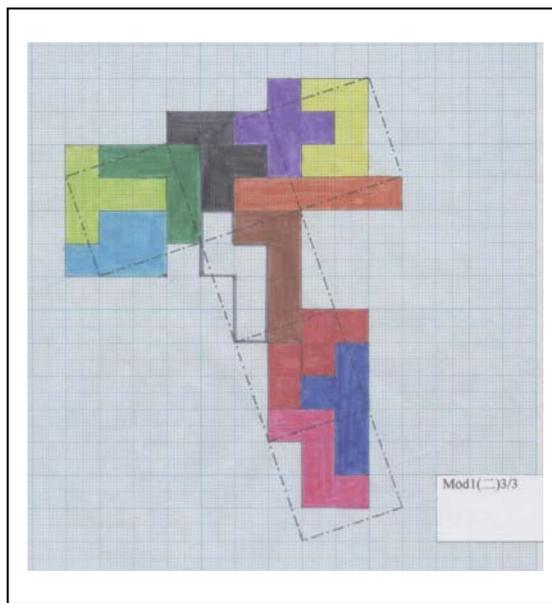
模組	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	合計
數目 (型)	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	20

表一、可以拼成正立方體的五連塊排列圖面數量統計表。

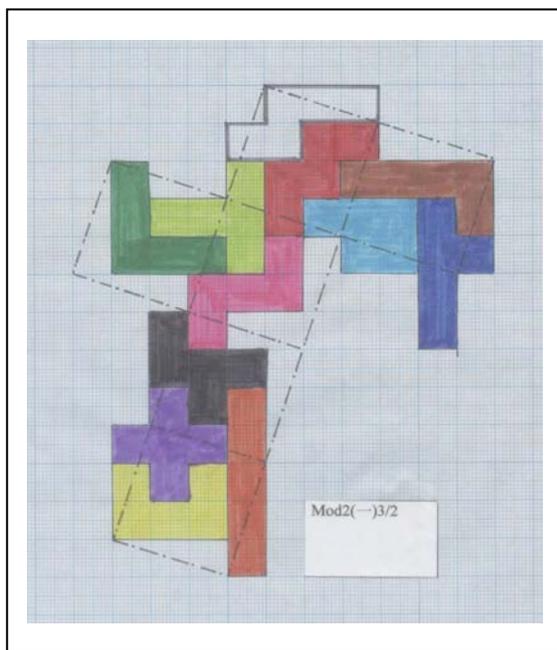
(二)、可以拼成正立方體的五連塊排列圖圖面：



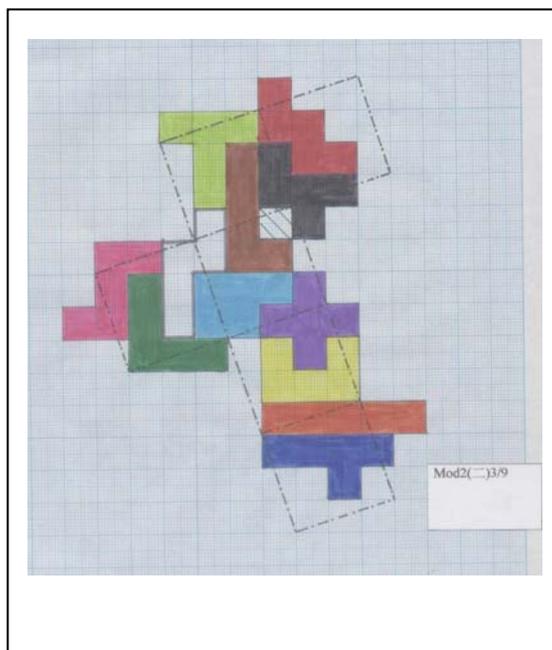
模組 1-1



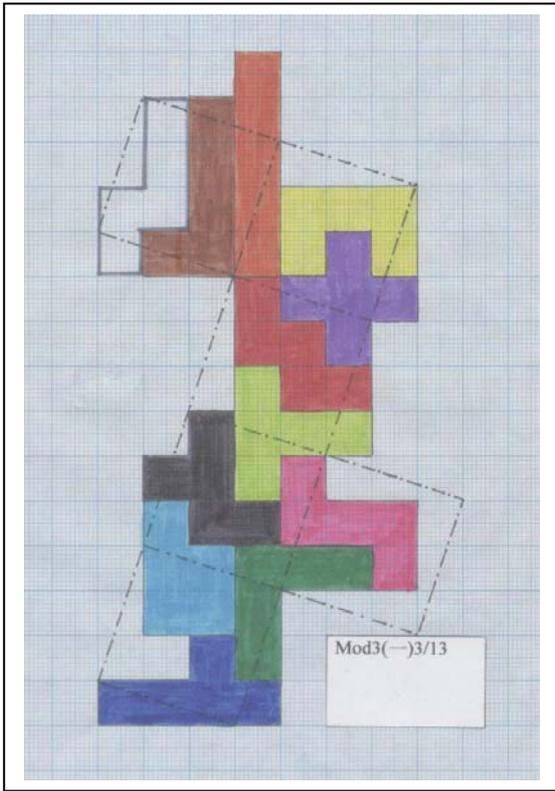
模組 1-2



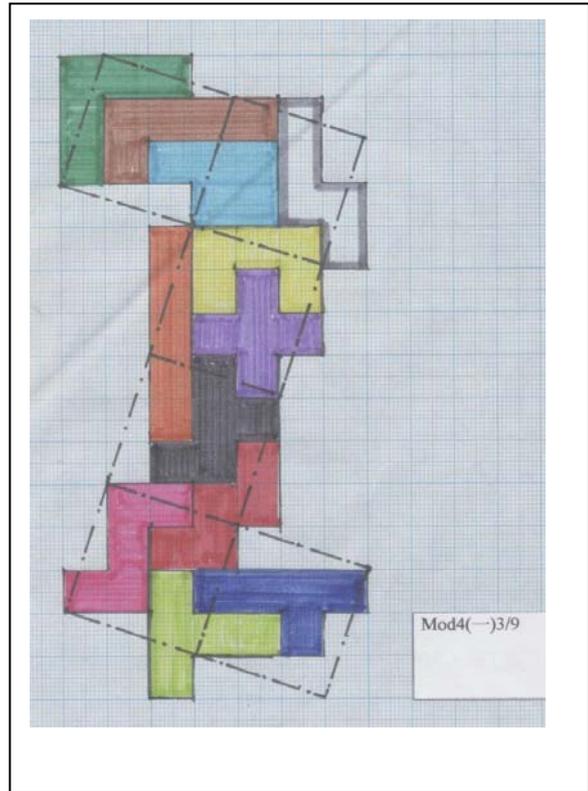
模組 2-1



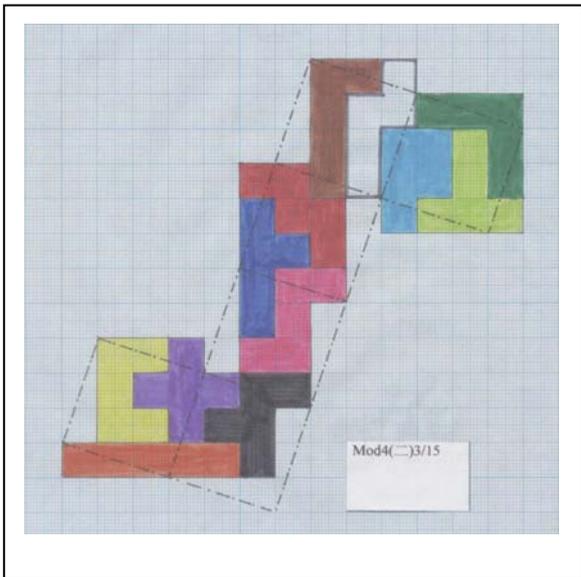
模組 2-2



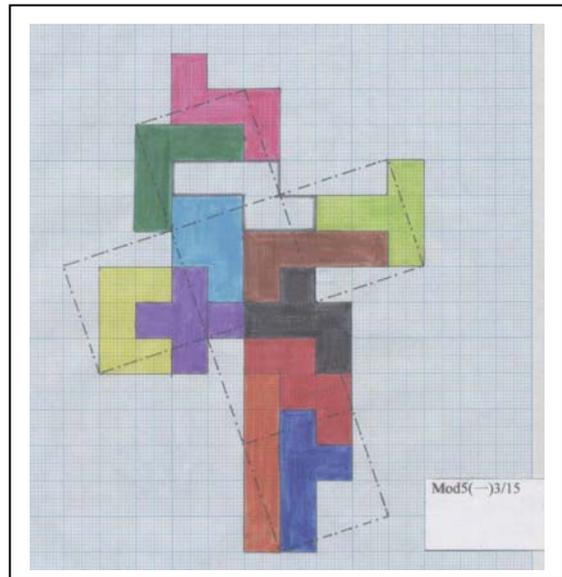
模組 3-1



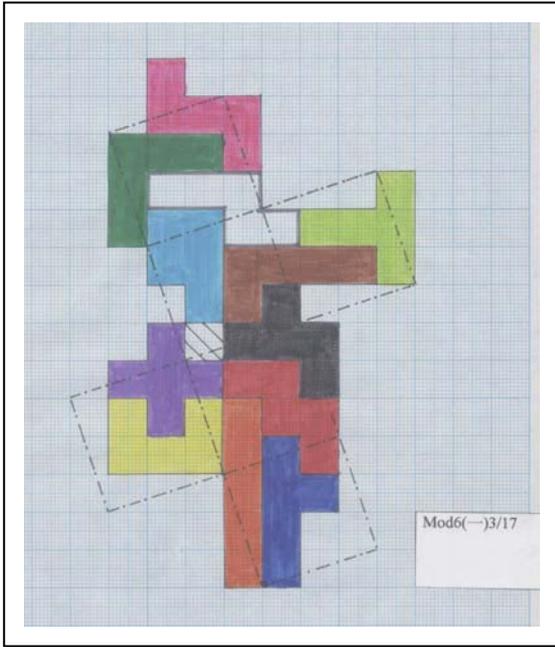
模組 4-1



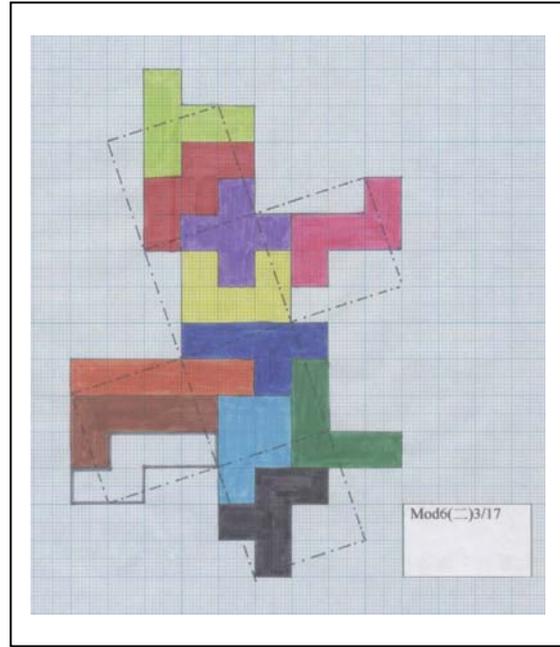
模組 4-2



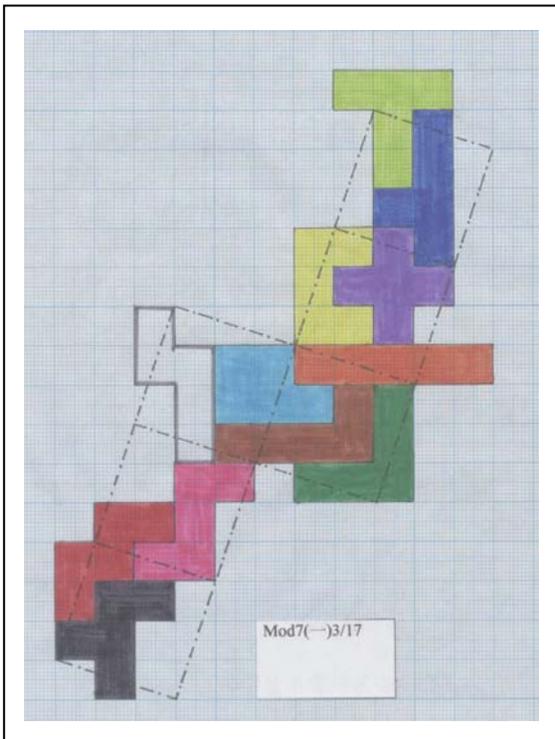
模組 5-1



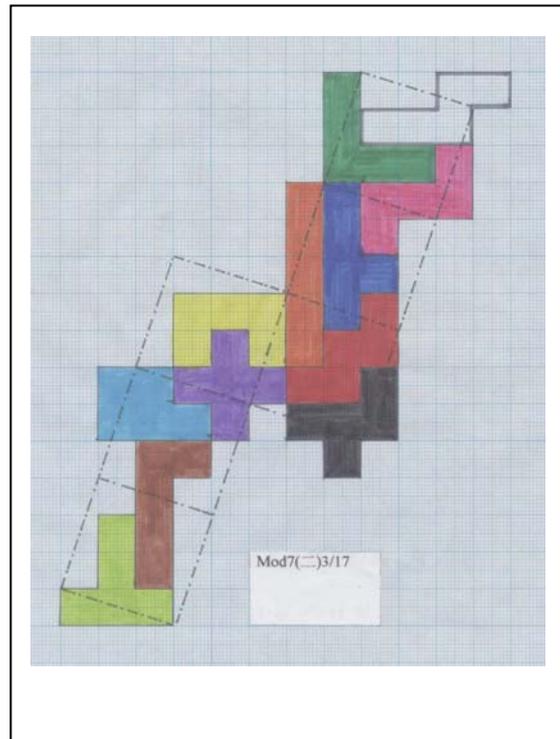
模組 6-1



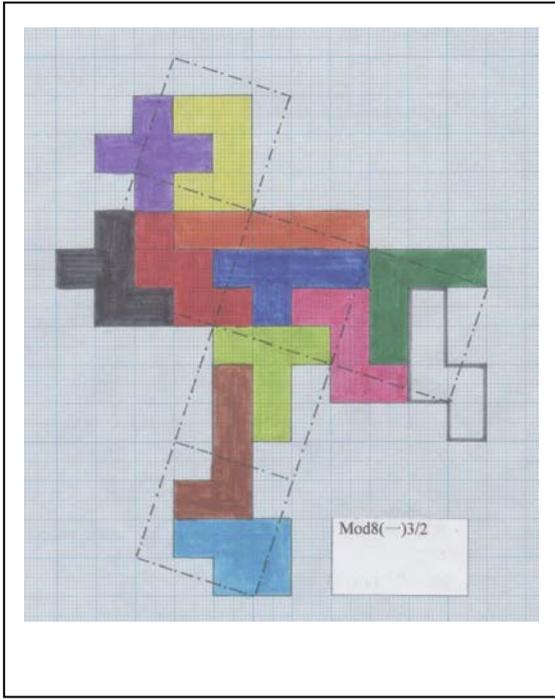
模組 6-2



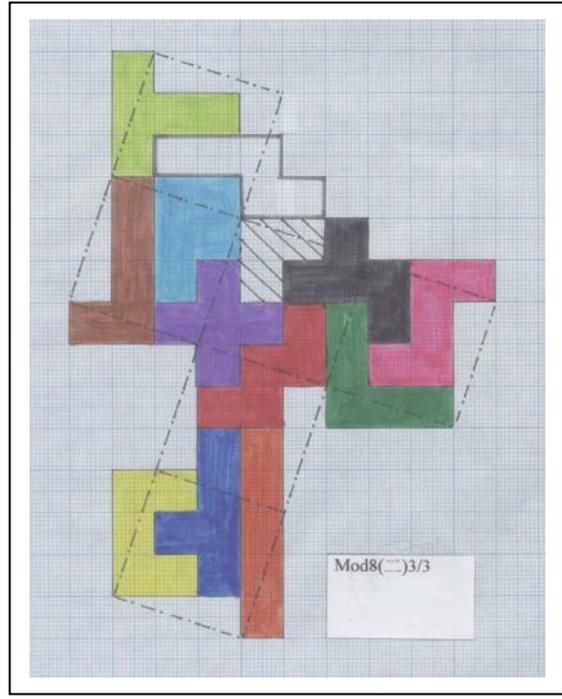
模組 7-1



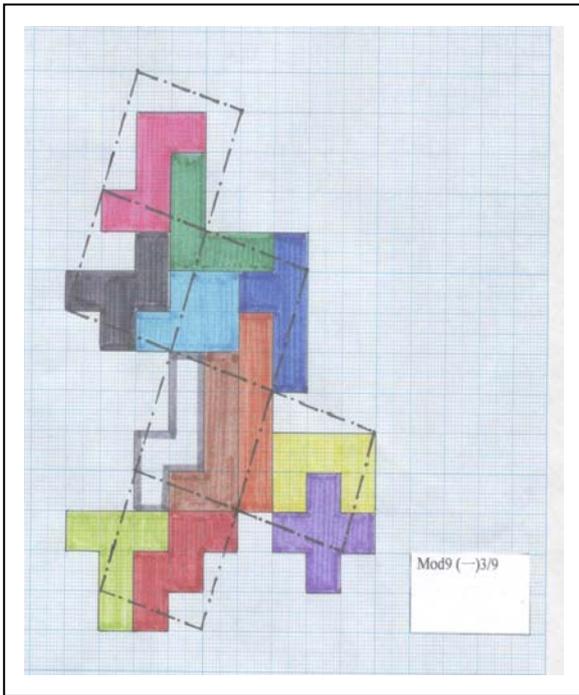
模組 7-2



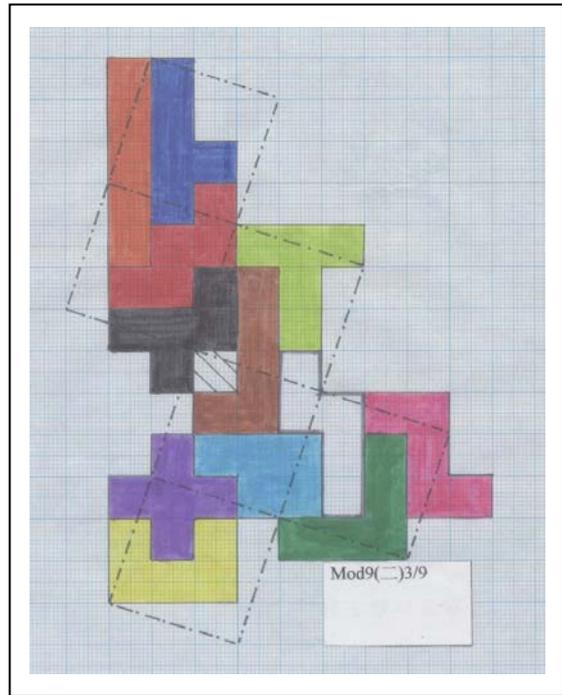
模組 8-1



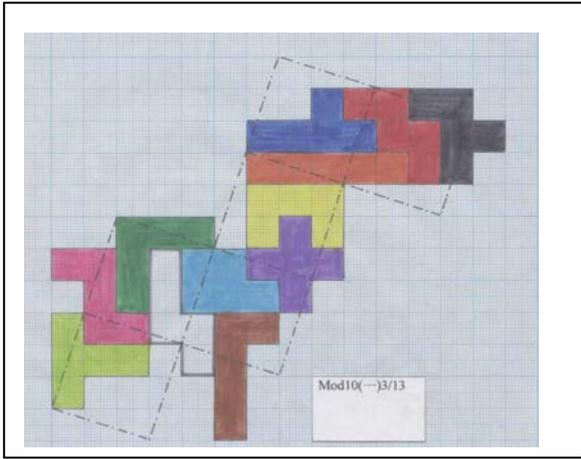
模組 8-2



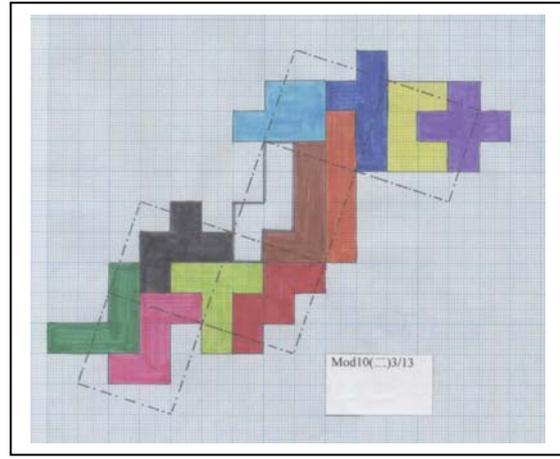
模組 9-1



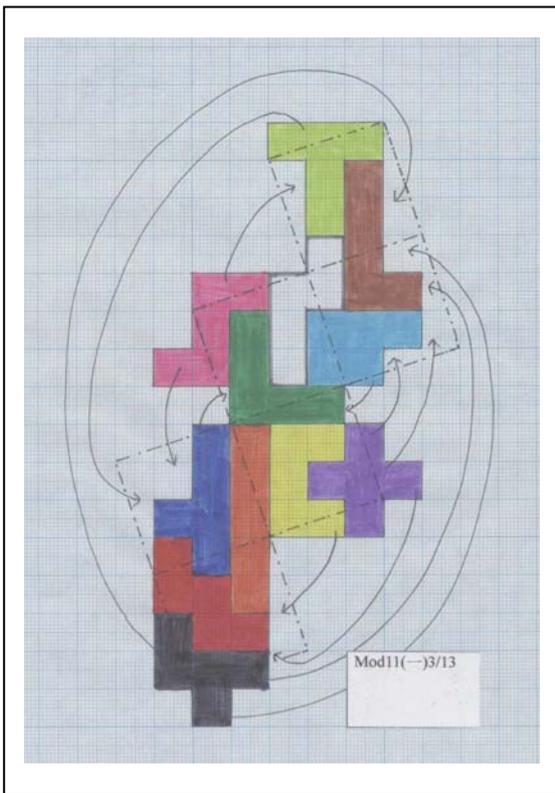
模組 9-2



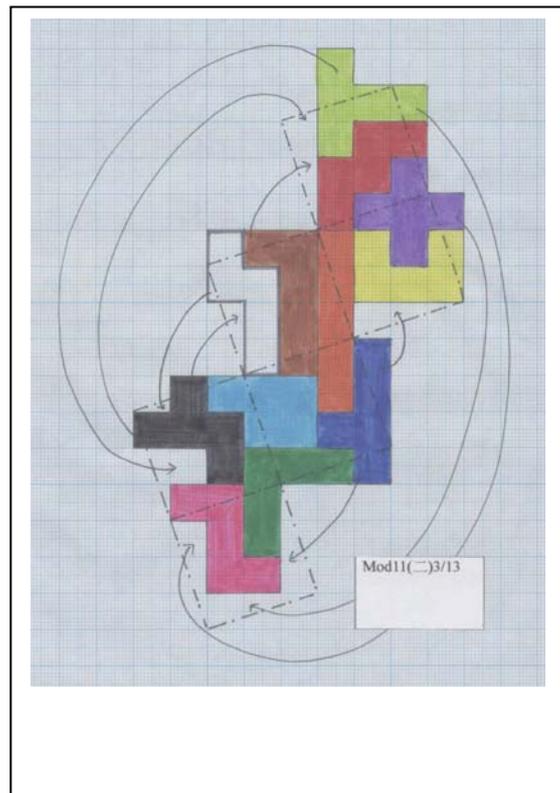
模組 10-1



模組 10-2



模組 11-1



模組 11-2

圖五、可以拼成正立方體的五連塊排列圖圖面。

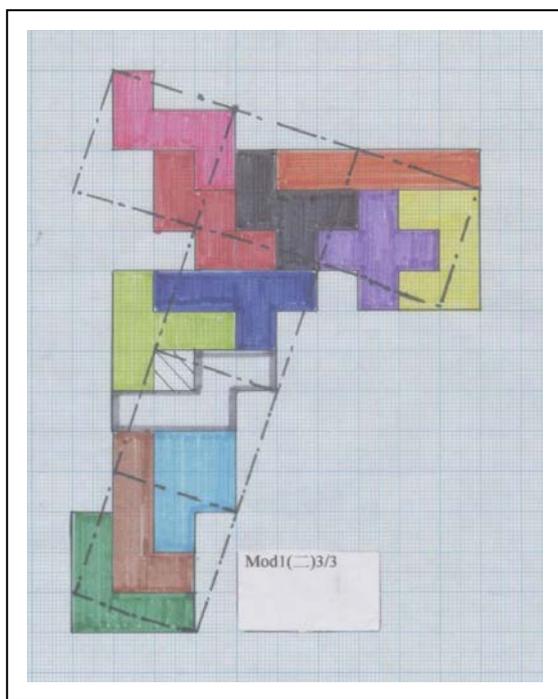
七、移動圖六模組 7-1 所得到的不同平面展開圖共有 57 種，不同型的平面統計表及圖形如下：

(一)、統計表：

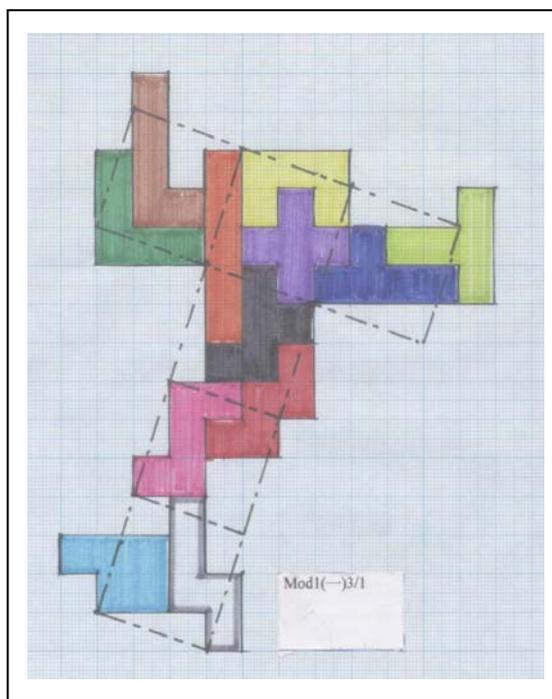
模組	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合計
合計	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	2	57

表二、移動圖六模組 7-1 所得到的不同五連塊排列平面圖統計表。

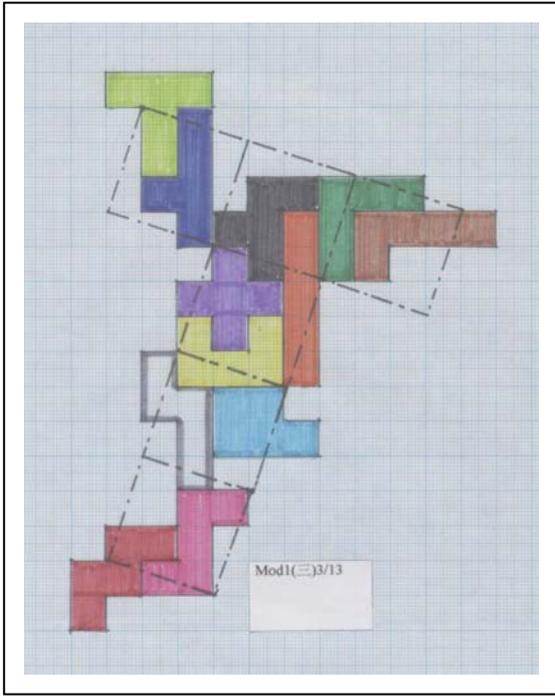
(二)、模組 7-1 之平移展開圖圖面：



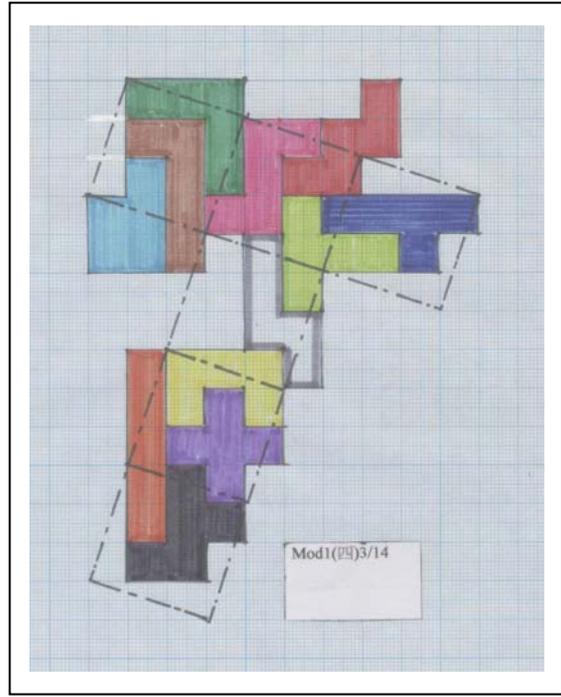
模組 1-1



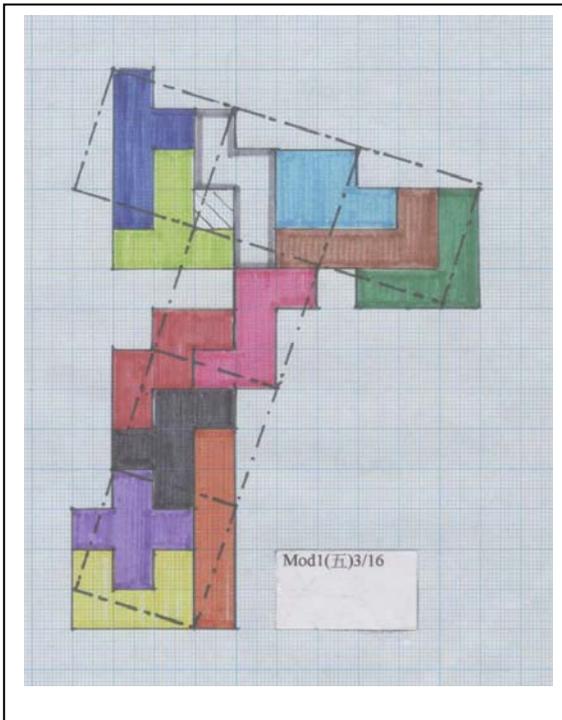
模組 1-2



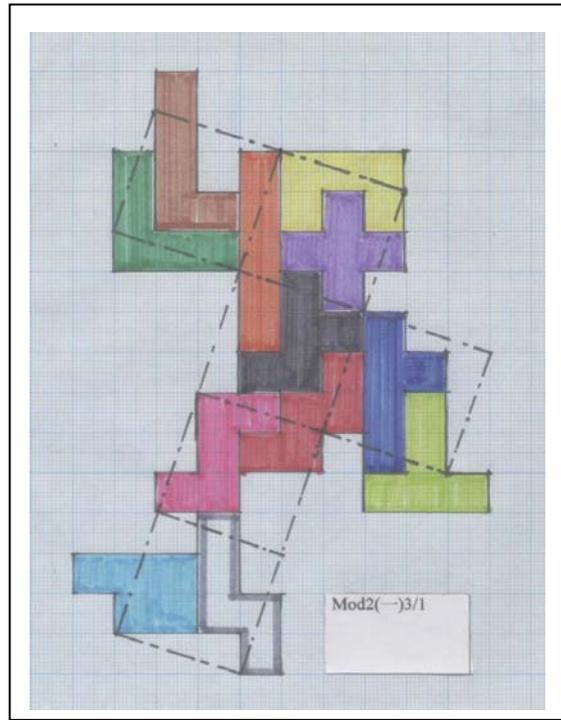
模組 1-3



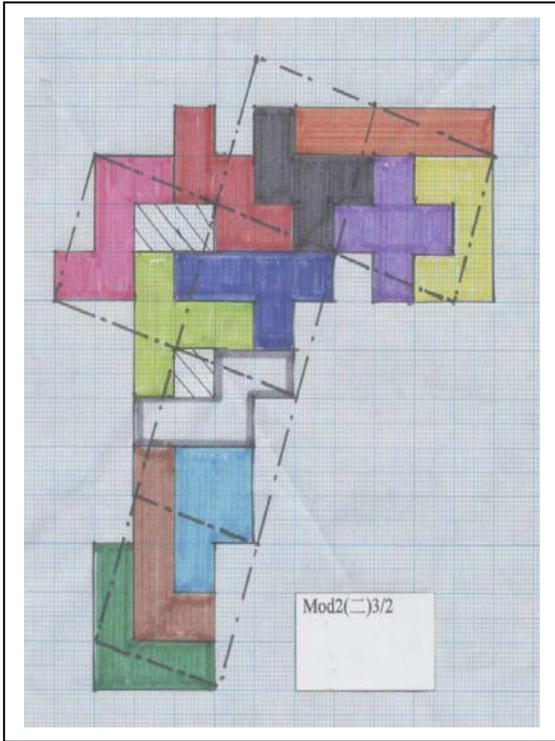
模組 1-4



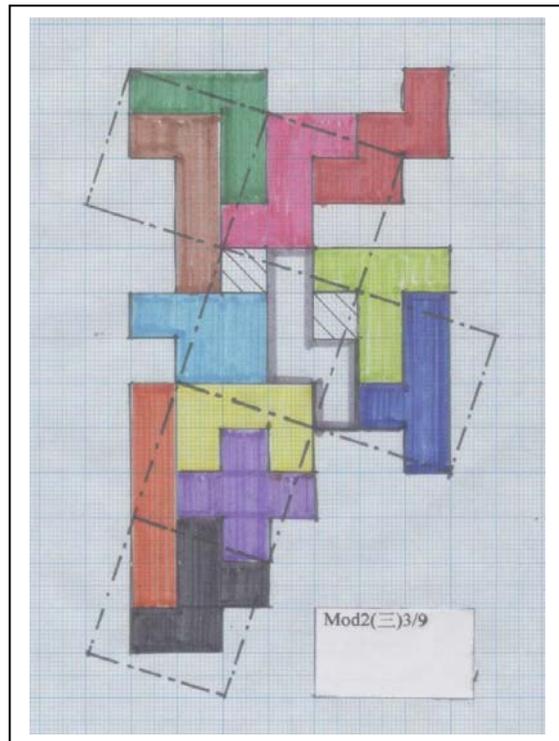
模組 1-5



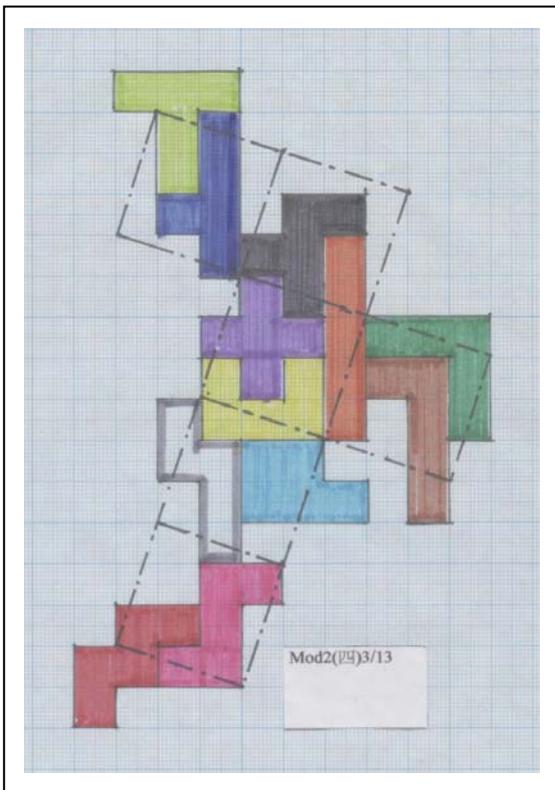
模組 2-1



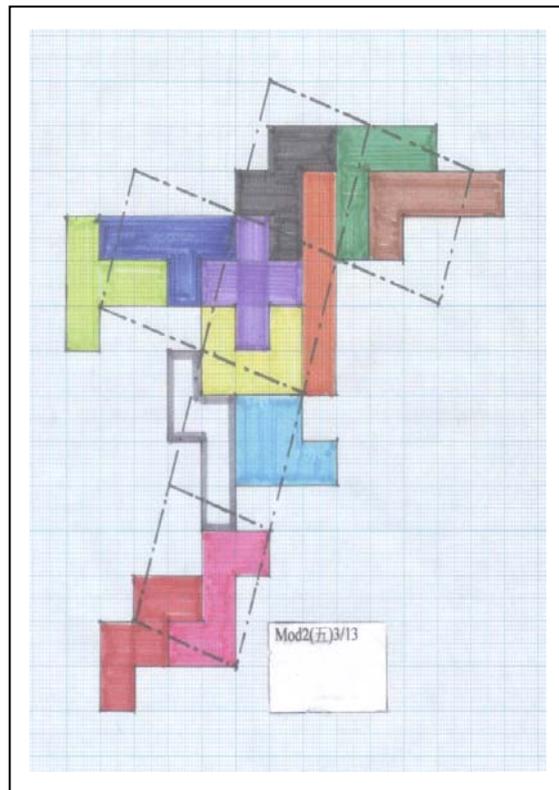
模組 2-2



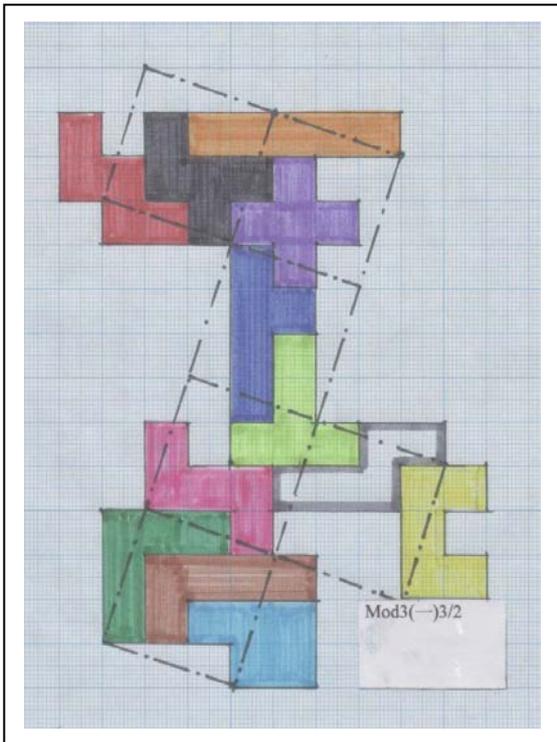
模組 2-3



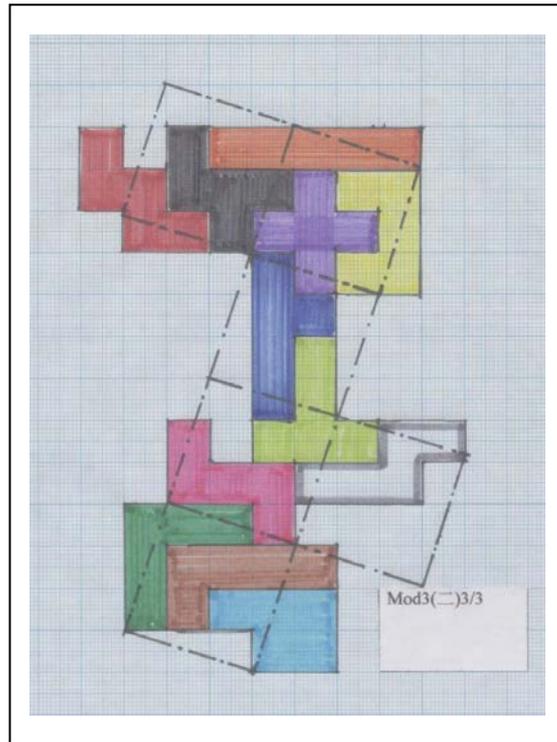
模組 2-4



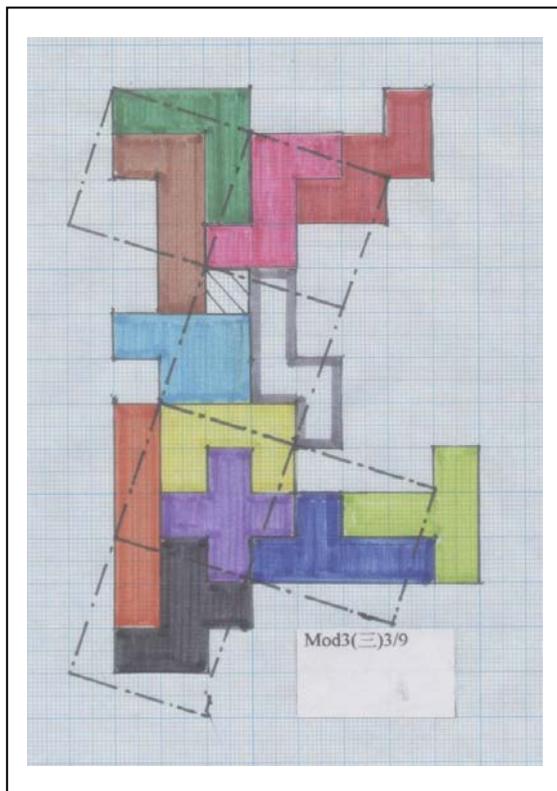
模組 2-5



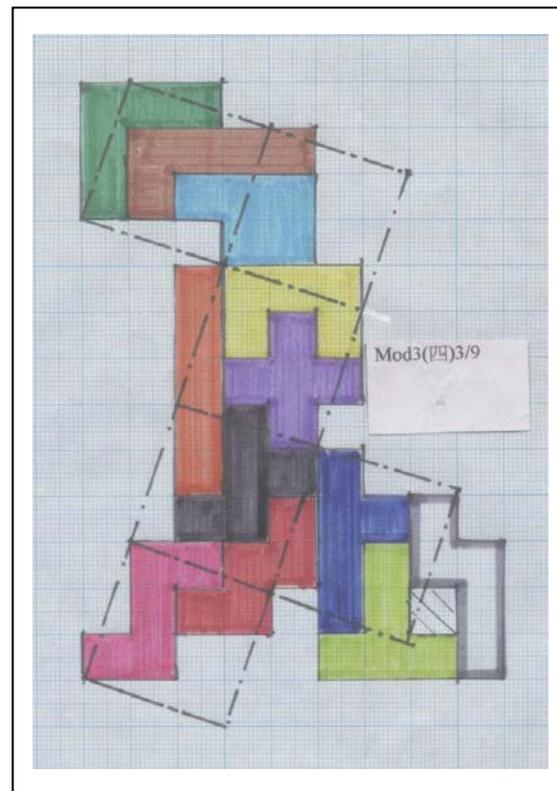
模組 3-1



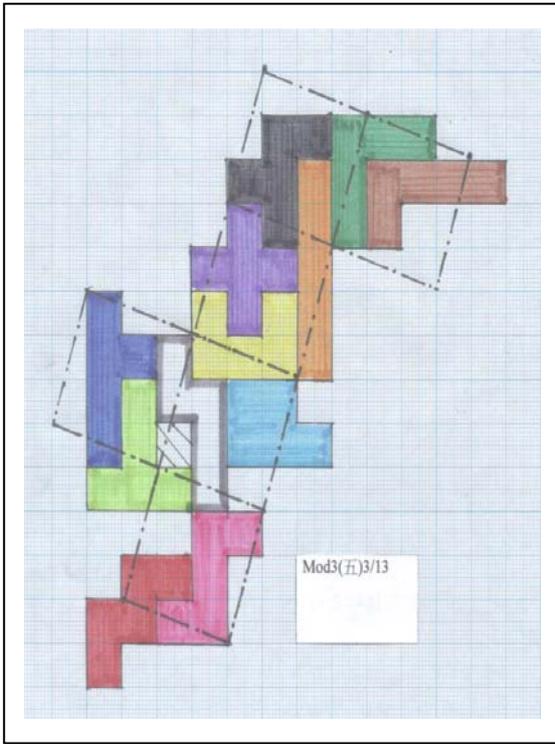
模組 3-2



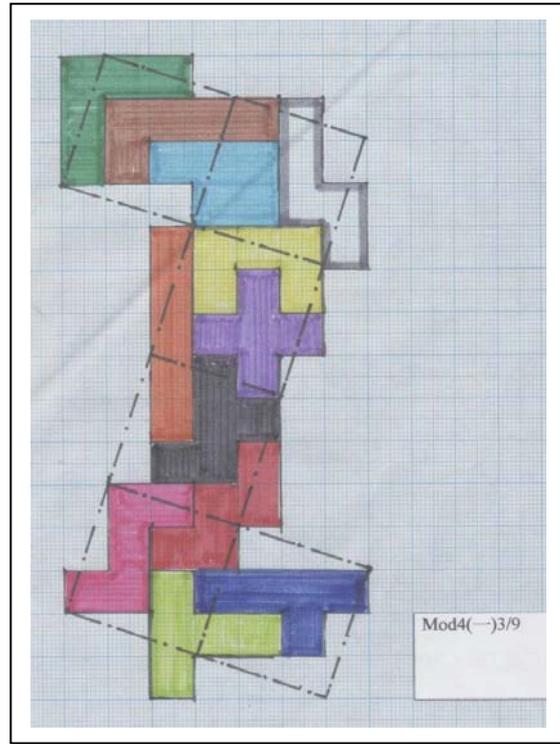
模組 3-3



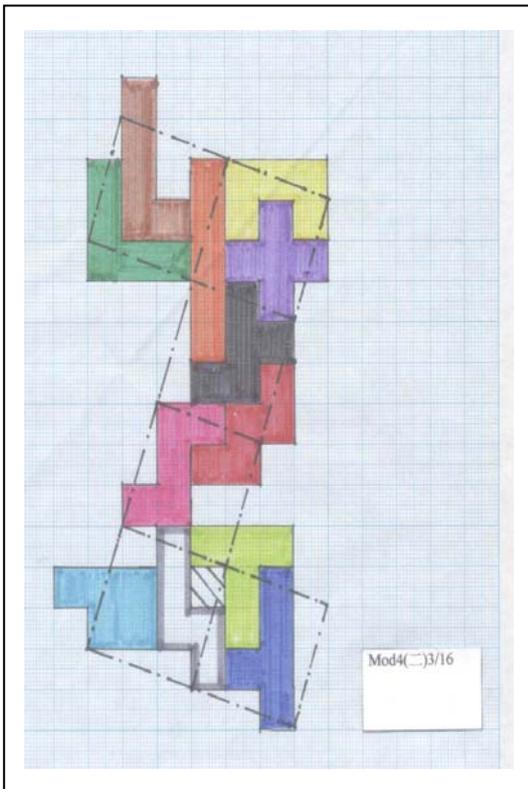
模組 3-4



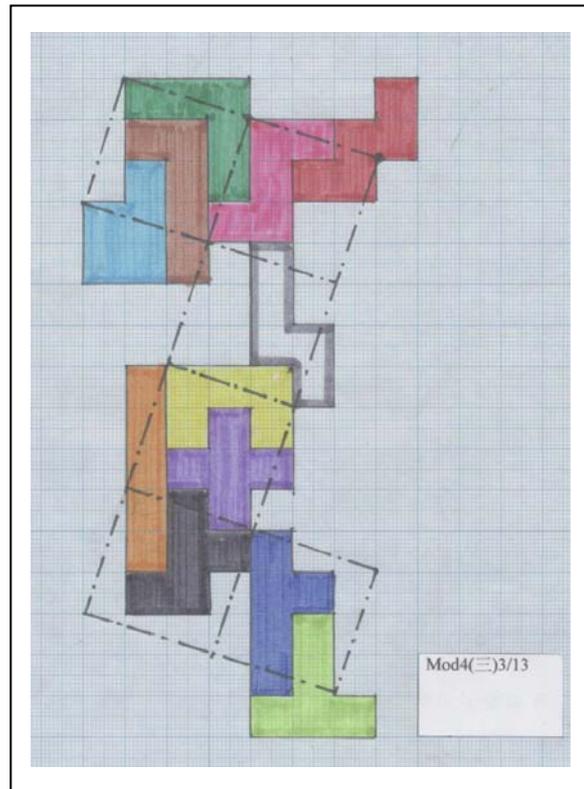
模組 3-5



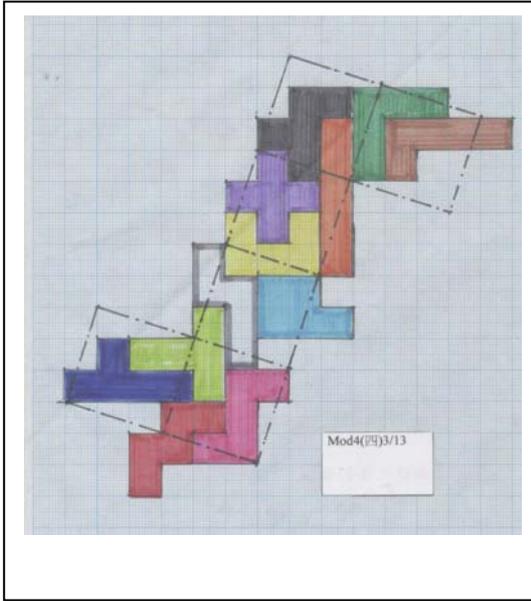
模組 4-1



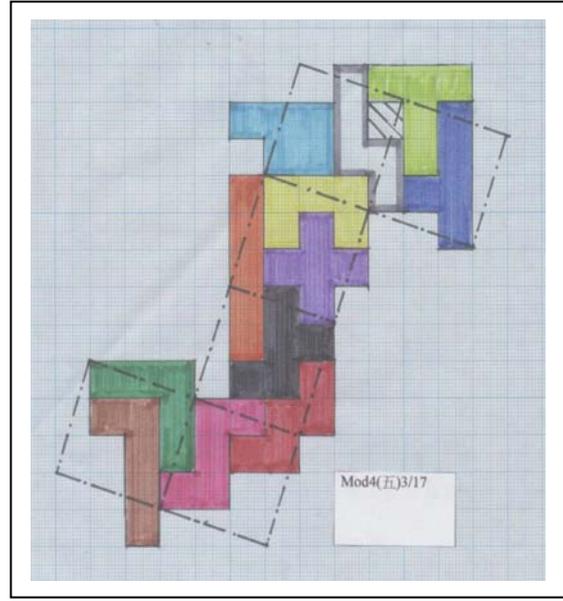
模組 4-2



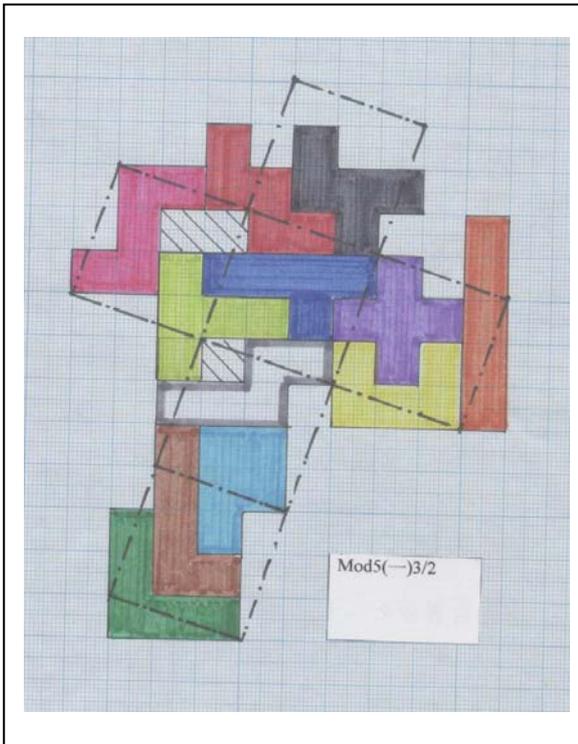
模組 4-3



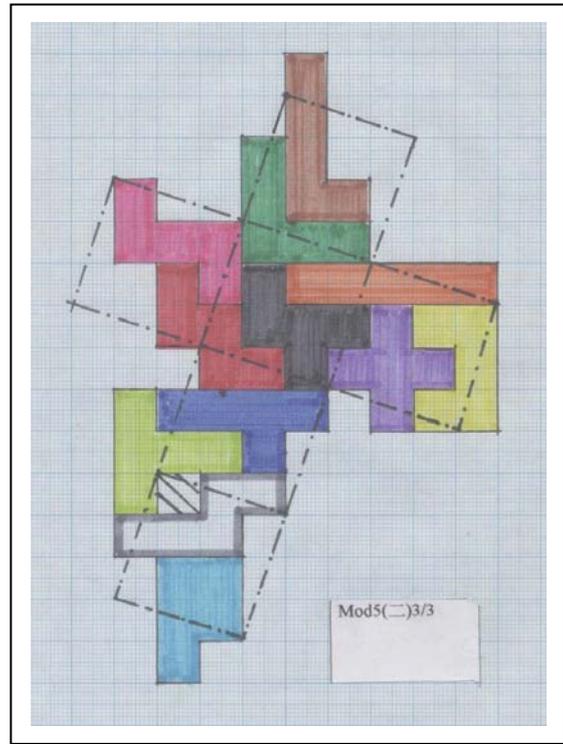
模組 4-4



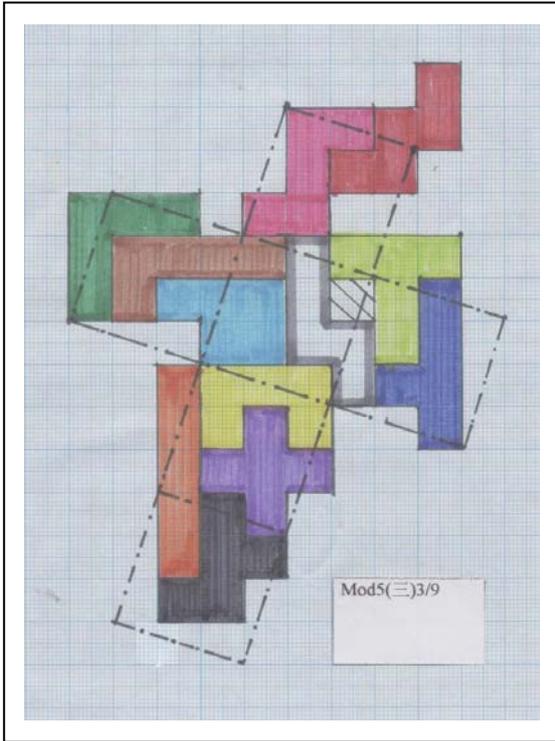
模組 4-5



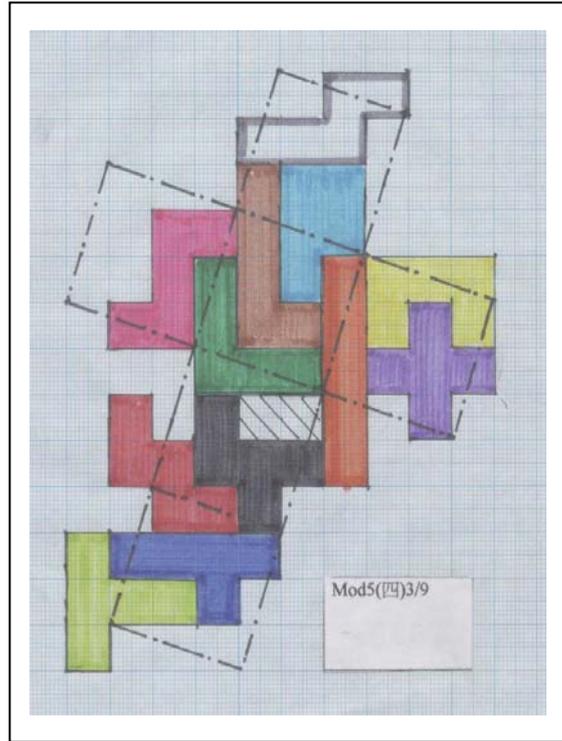
模組 5-1



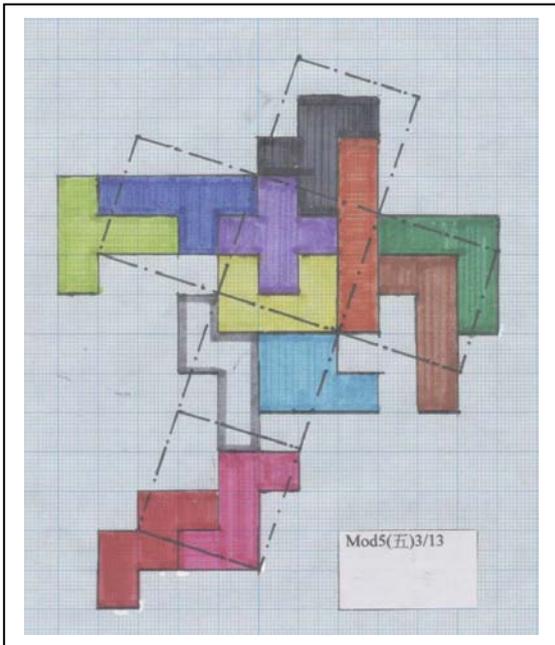
模組 5-2



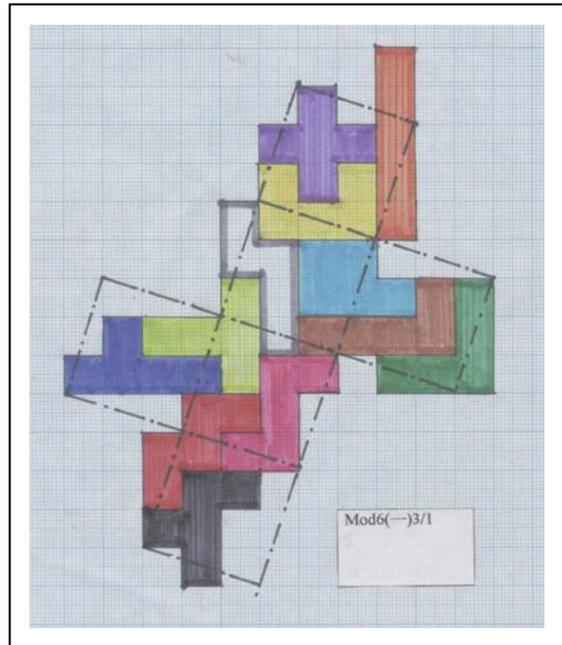
模組 5-3



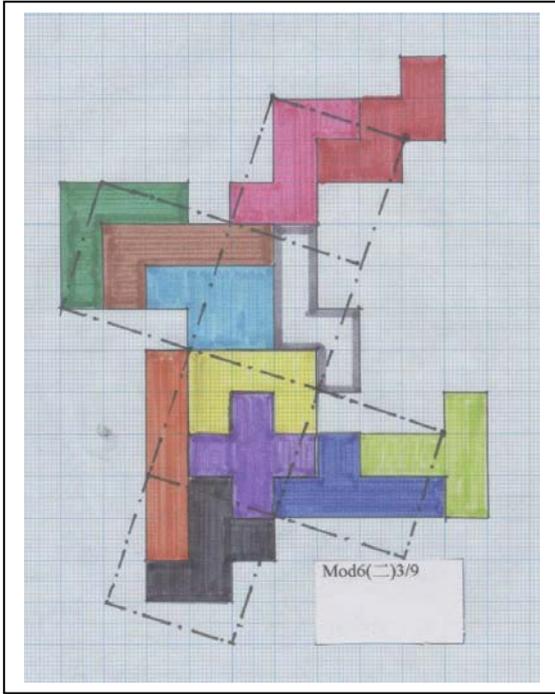
模組 5-4



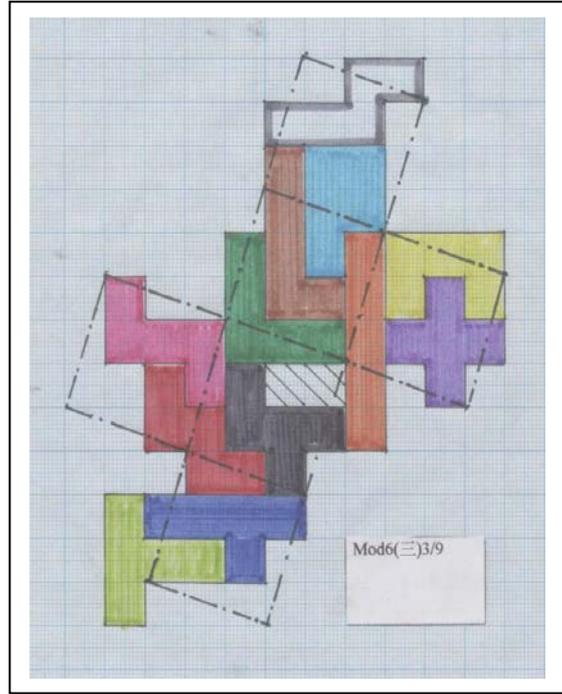
模組 5-5



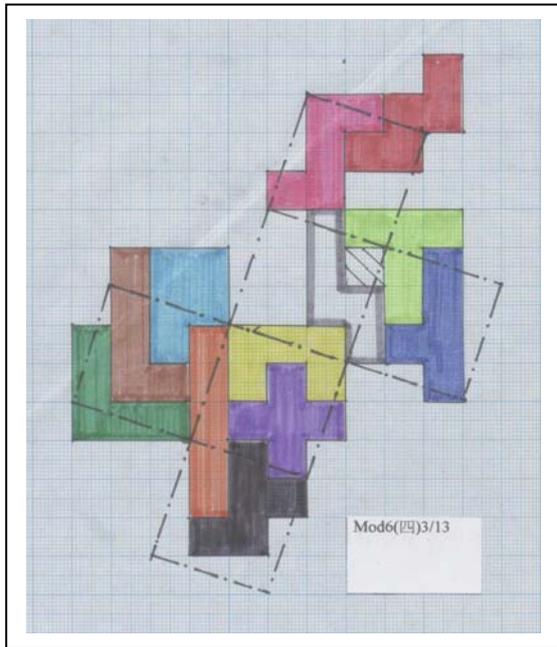
模組 6-1



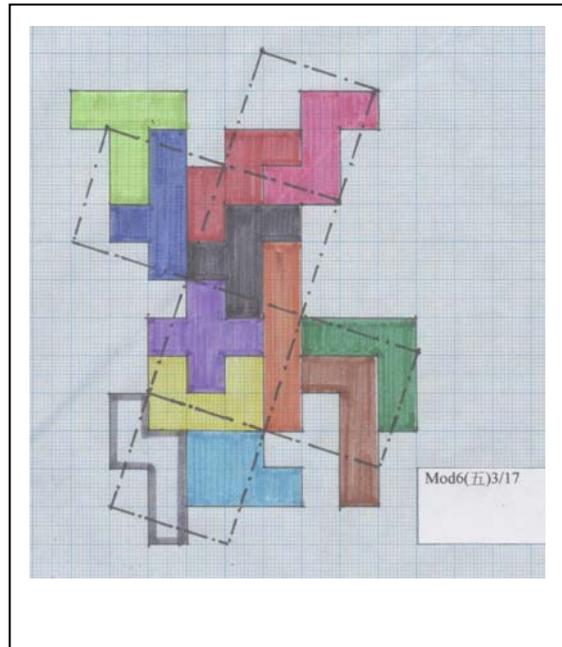
模組 6-2



模組 6-3



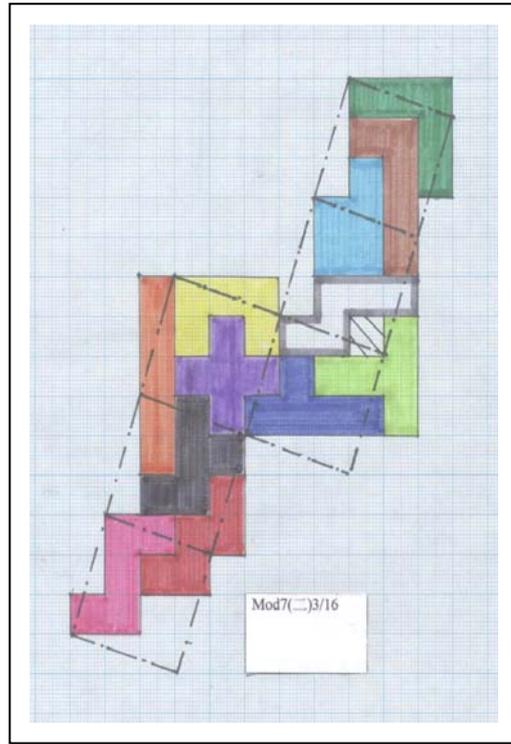
模組 6-4



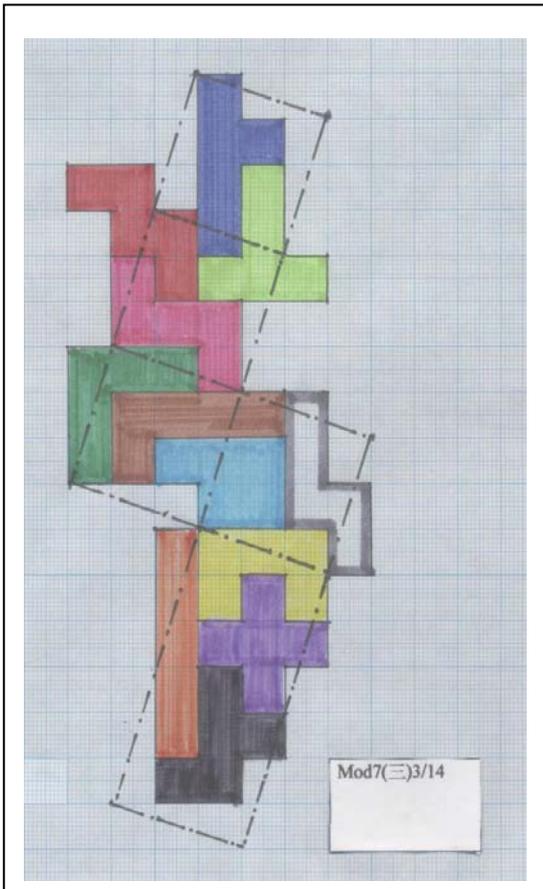
模組 6-5



模組 7-1



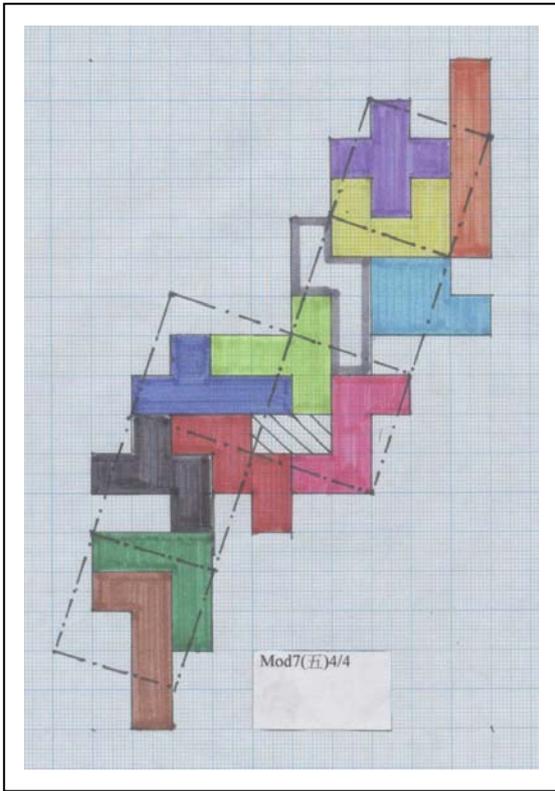
模組 7-2



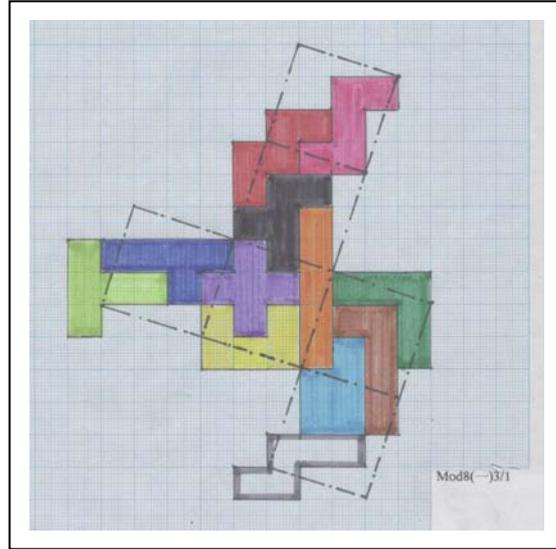
模組 7-3



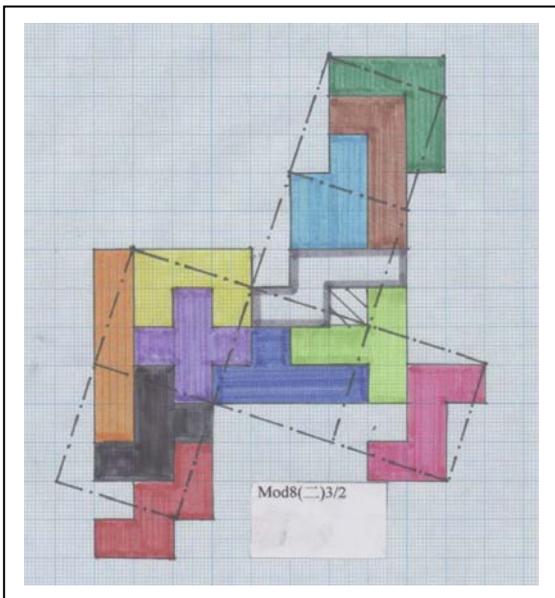
模組 7-4



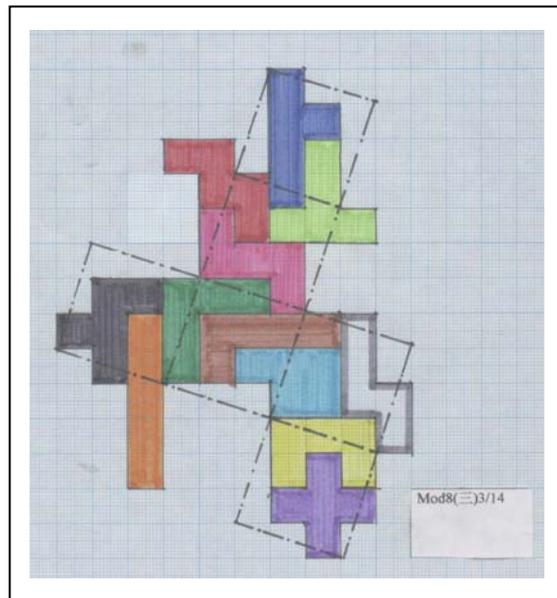
模組 7-5



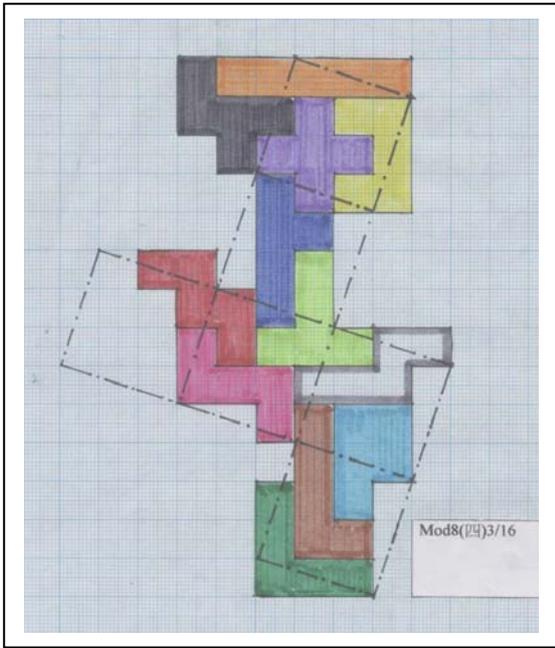
模組 8-1



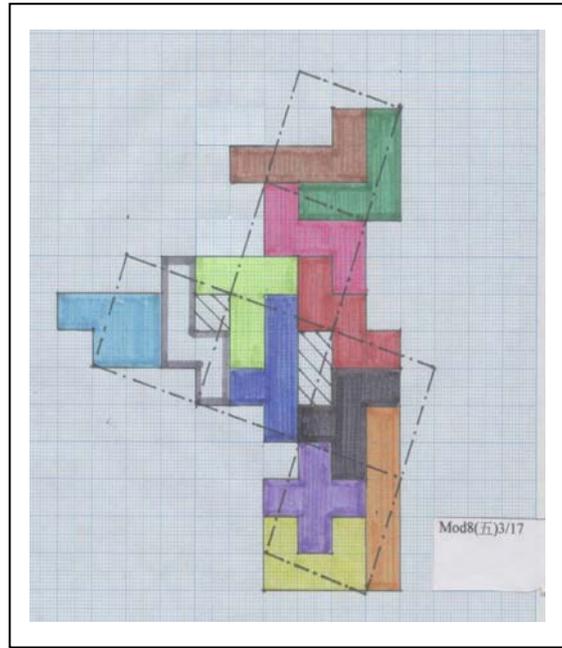
模組 8-2



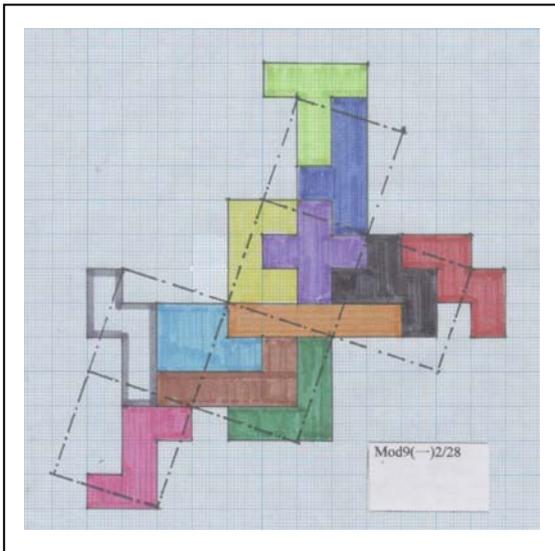
模組 8-3



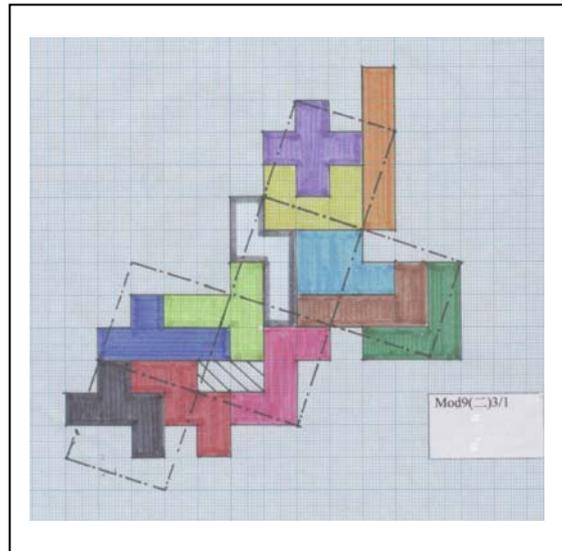
模組 8-4



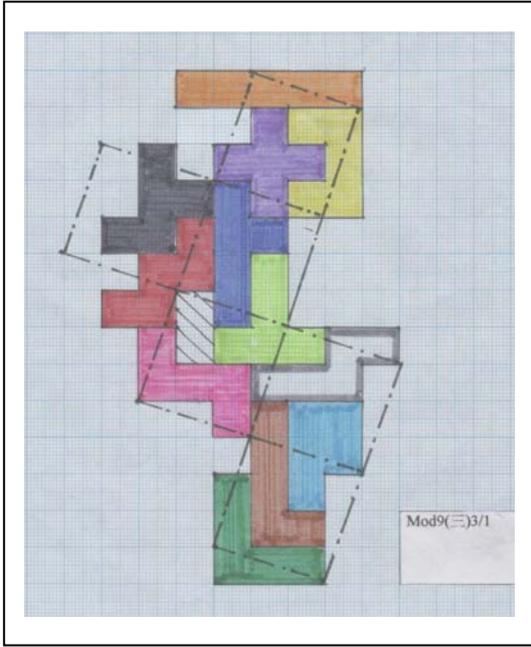
模組 8-5



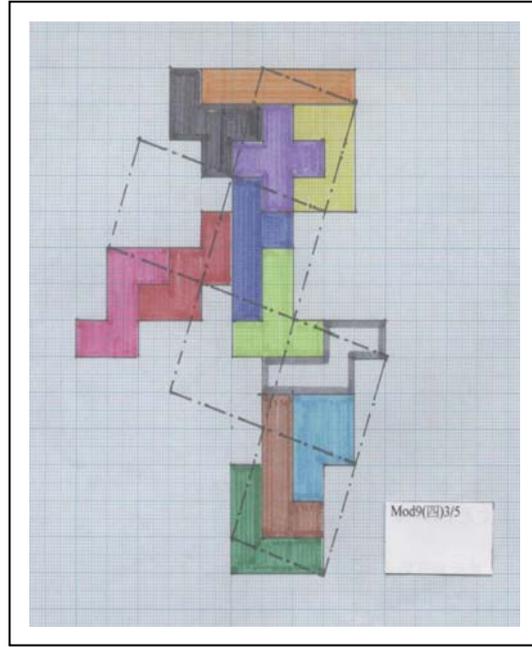
模組 9-1



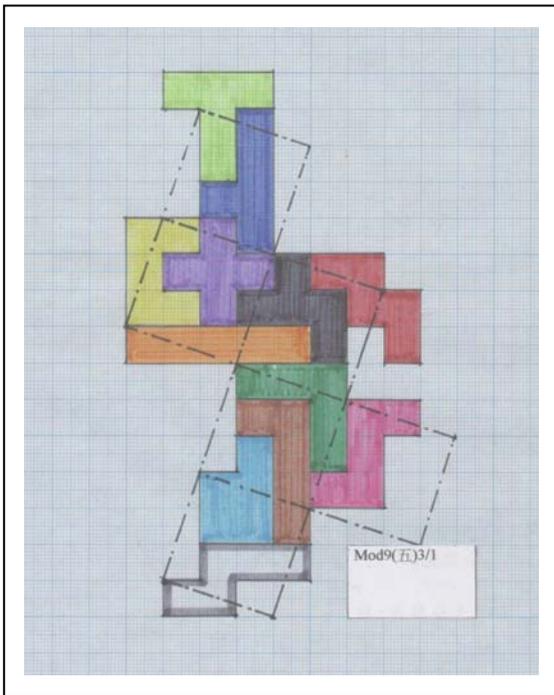
模組 9-2



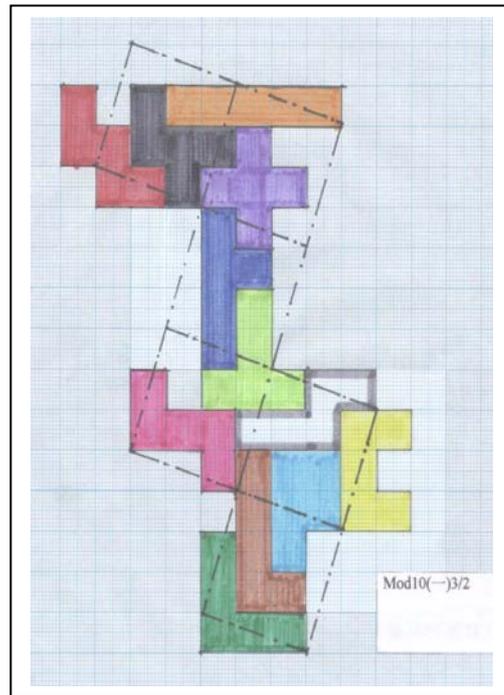
模組 9-3



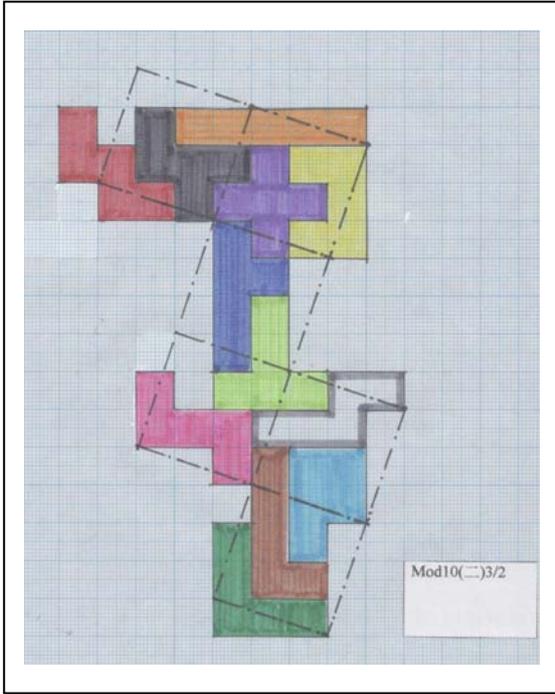
模組 9-4



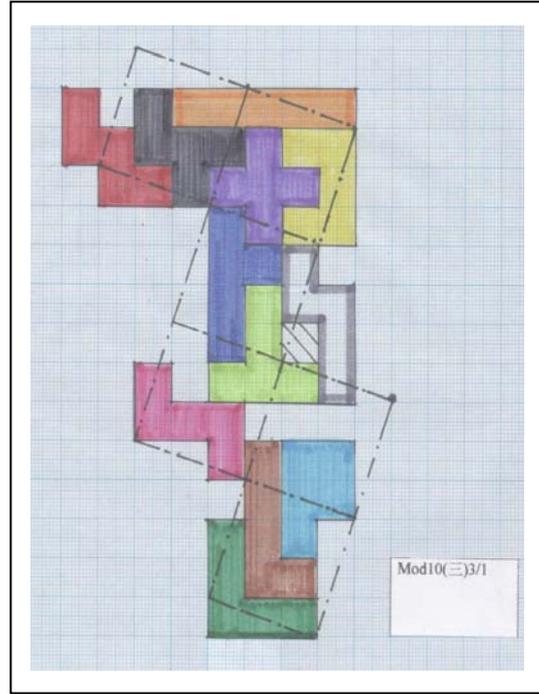
模組 9-5



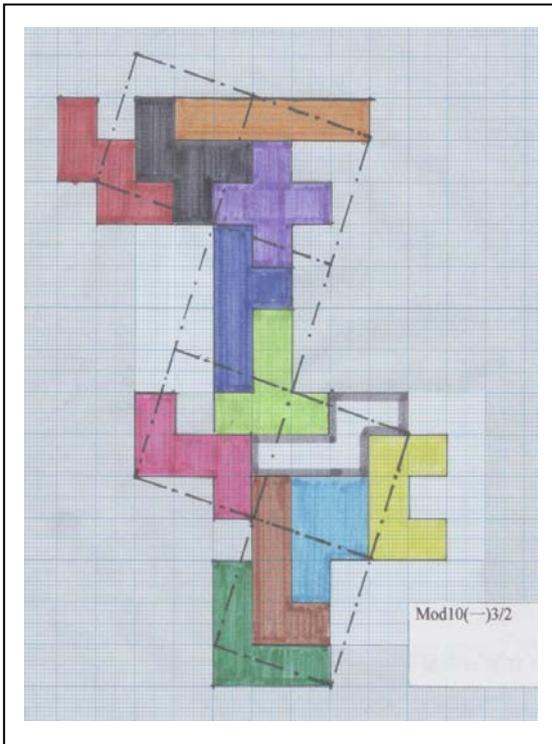
模組 10-1



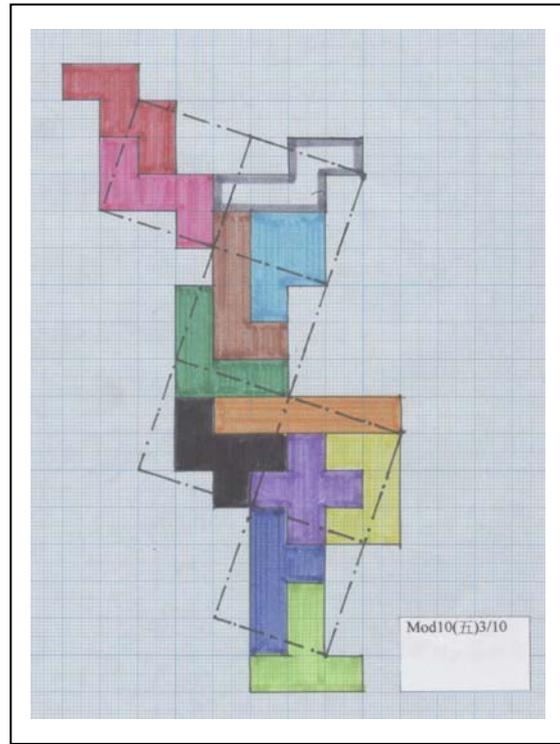
模組 10-2



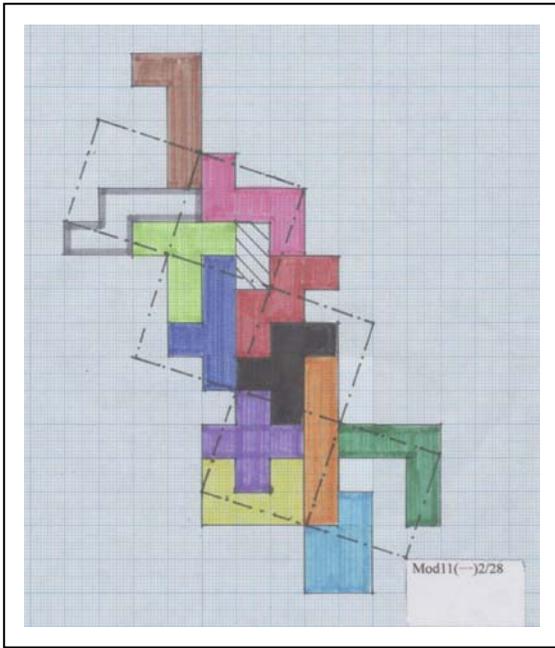
模組 10-3



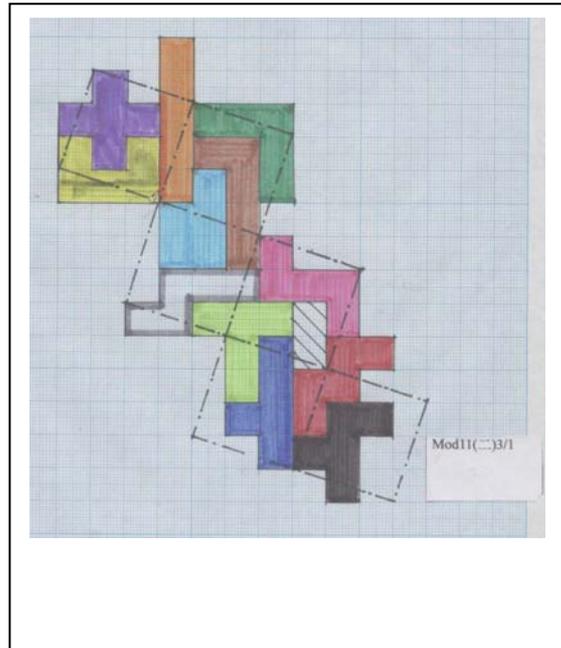
模組 10-4



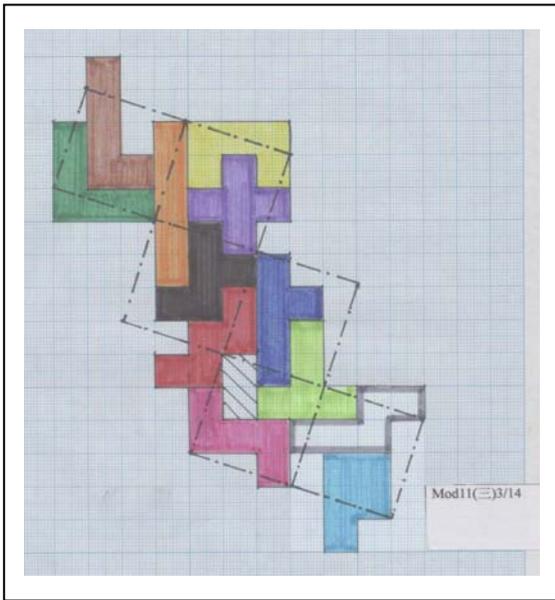
模組 10-5



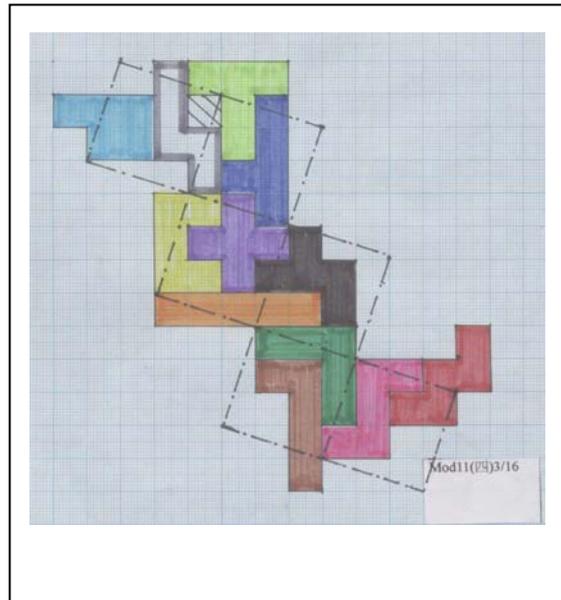
模組 11-1



模組 11-2



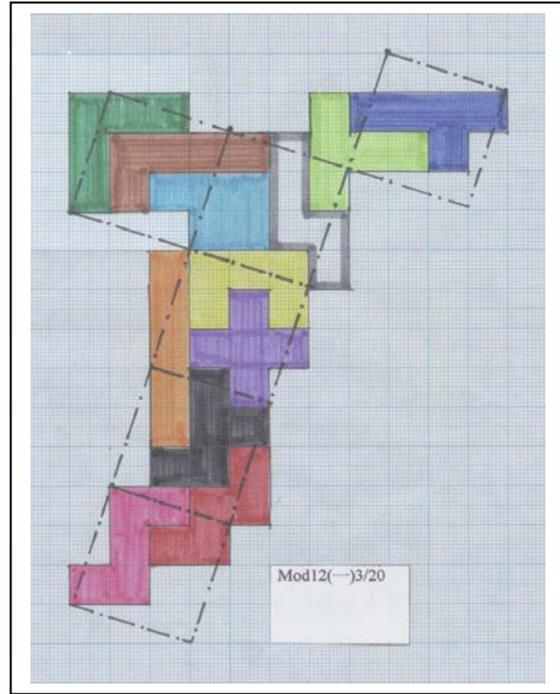
模組 11-3



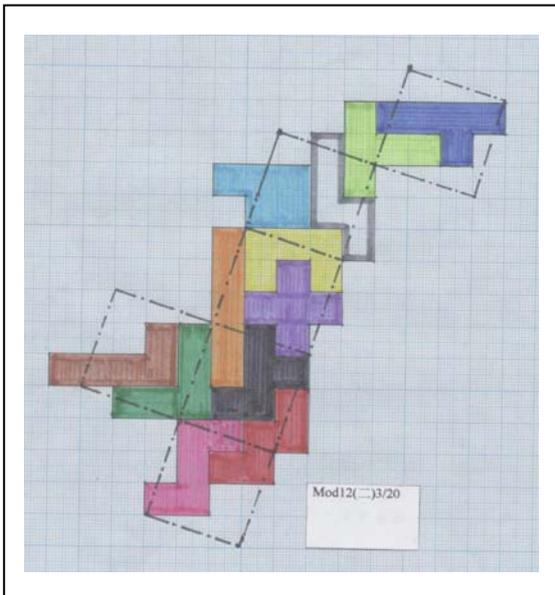
模組 11-4



模組 11-5



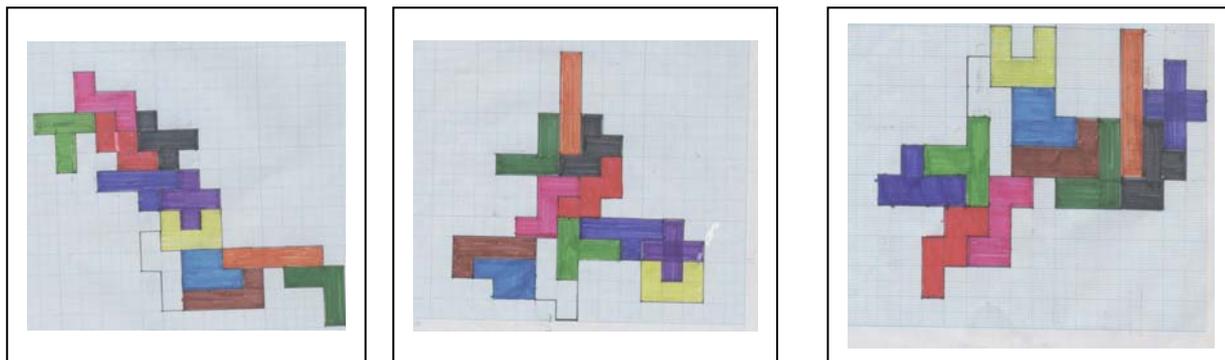
模組 12-1



模組 12-2

圖六、移動圖六模組 7-1 所得到的不同型五連塊平面排列圖。

八、用剪刀將圖六模組 7-1 所構成的正立方體剪開並攤平，所得的三個平面展開圖，如下：



圖七、用剪刀將圖六模組 7-1 所構成的正立方體剪開並攤平，所得的平面圖。

柒、討論

一、利用十二型五連塊拼組正立方體表面的展開圖時，拼組時並不需沿邊線對齊即可放置，要考慮的是互相對應的邊其五連塊圖形樣式能相互嵌合。以圖五模組 11 為例，我們發現構成立體圖時互相連接的邊，所放的五連塊圖形樣式要能互相對應填補，如此才有辦法拼成正立方體。所以拼正立方體的平面展開圖模組時，模組的邊線所提供的是一種拼組的參考概念而非限制。

二、在拼製不同模組，所採取的方式並非一成不變，以圖五模組 2-1 和模組 4-2 為例：

(一)、圖五模組 2-1，所採取的步驟為下：

- 1.先組合形狀較複雜不規則的 X 形和 U 形，並放於邊緣轉角處，如此可減少 X 圖形所造成的凹凸不平的困擾。
- 2.因為 X 圖形有一個角還沒處理，所以就將 F 圖形放入填補。
3. I 圖形是長條狀，很難找到能擺放的位置，剛好 X U 圖形旁邊有一個直條的位置，所以就將 I 圖形放在 X 和 U 的旁邊。
- 4.因為考慮在 U 圖形空間相對位置中要多出一個三角形，所以放入 N 圖形。
- 5.再放 W 圖形，因為 W 圖形有很多凹凸，如果不先放 W 圖形就會沒位置可以放。
- 6.因為放了 W 圖形之後，就產生了兩個缺角，因此用 L、Y 和 P 圖形來調整。
- 7.考慮立體空間連接關係可以放 Z 圖形，最後將 V 和 T 圖形放入即完成。

(二)、圖五模組 4-2，所採取的步驟為下：

- 1.先組合形狀較複雜不規則的 X 形和 U 形，並放於邊緣轉角處，如此可減少 X 圖形所造成的凹凸不平的困擾。
- 2.因為 X 圖形有一個角還沒處理，所以就將 F 圖形放入填補。
3. I 圖形是長條狀，很難找到能擺放的位置，剛好 X U 圖形旁邊有一個直條的位置，所以就將 I 圖形放在 X 和 U 的旁邊。
- 4.將 Z、Y 及 W 組合，考慮立體空間連接關係放置於 F 上相連。
- 5.V、T 及 P 可組合成較完整的圖形，並且依空間對應位置圖形填補所需擺放。
- 6.最後將 L 和 N 圖形根據連接位置擺放即完成。

我們在拼製的過程中，通常先放形狀較複雜的 X 型，並將其放置於模組的圍邊轉角位置，再配合能填補它空缺的區塊，如 U 型等這樣較容易先解決圖形凹凸的困擾，也較易

成功拼出所想要完成的圖形（如圖八）；此外 P 圖形也很有用，因為它能和其他的五連塊做出其他所需的形狀（如圖九），這和我們在考資料中所看到的一個經驗「儘早先用掉較麻煩的那幾片（X、T、W 和 Z），把較容易的那參幾片留到最後再用」不謀而合(孫文先，民 88)。

- 三、在製作過程中，發現雖然平面排列圖不相同，可是一旦製成立體模型時卻有完全相同的情形產生（如圖十）。因此以五連塊顏色較顯眼的 U 型在立體模型中所在的位置，做為個別比對的基準，並刪除相同樣式的模型。我們發現用 12 片五連塊會因不同的排列而構成不同的表面排列立體圖（如表一及圖五），一共有 20 種不同平面展開圖及 6 種不同的正立方體表面樣式（如圖十一）。
- 四、在研究的討論過程中，因為發現雖然平面排列圖不同，可是一旦製成立體模型時卻有完全相同的情形產生，而原因是因為用一個已能拼成正立方體展開圖，只要再稍加移動其中的幾個五連塊調整即可成為另一個不同的平面排列解。以圖六模組 7-1 型為例，我們可以用平移配合旋轉等方式，至少再找出 57 種不同的平面圖解，涵蓋所有的 11 模組，甚至也能是非原先設定的新第 12 模組（如表二及圖六）。我們也相信必然還有更多的不同的平面排列解會產生。當我們試著用剪刀將正立方體沿著五連塊的邊線剪開並攤平（如圖七），發現要得到一個不同的平面排列解，一點都不困難。如果以此類推其他的模組，那所有的平面排列解的數量是十分龐大的。
- 五、我們發現平面排列解的數量很多，而找出「在有限的面積」或「最小的長方形面積」可能排出的平面排列圖解，應該也是一個很有趣研究的方向。



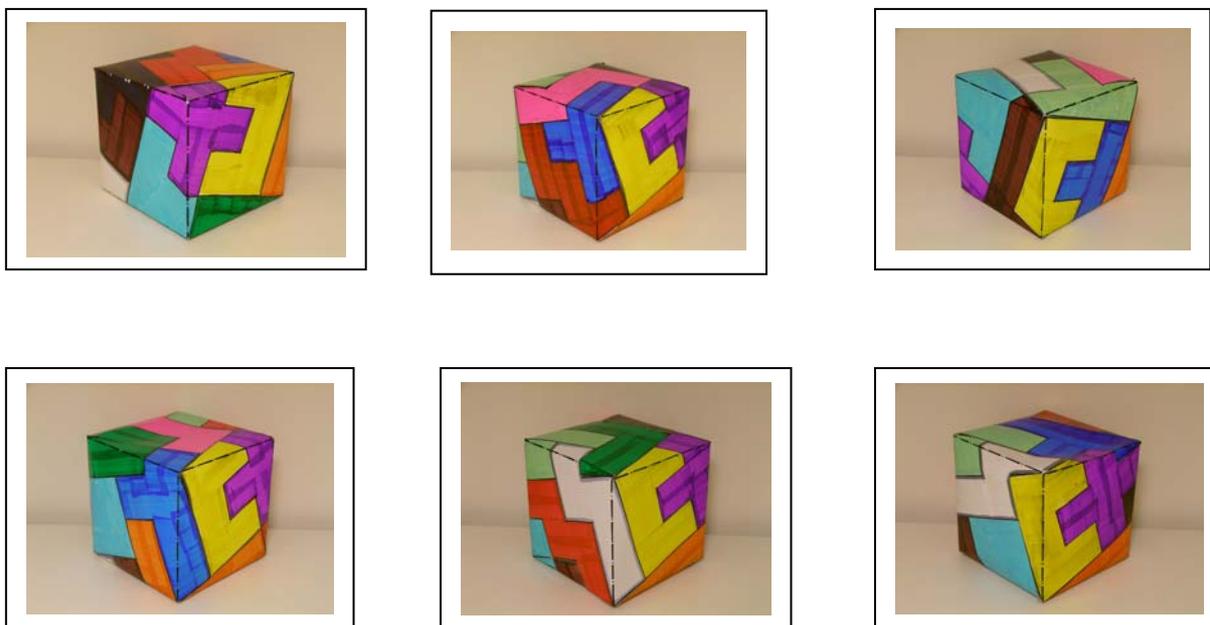
圖八、U 型能克服 X 型凹凸情形。



圖九、P 形能和多種五連塊形成簡單的構形。



圖十、不同的平面展開圖卻形成相同的立體圖。



圖十一、六個不同的正立方體的立體圖。

捌、結論

- 一、用全部的 12 片五連塊不重疊地拼出一個正立方體的表面，我們一共找出了 6 種不同的正立方體模型，如果不是因為時間及人力等問題的限制，我們相信還有更多不同的正立方體的會出現！
- 二、用一個圖六模組 7-1 型即可找出 60 種不同的平面圖解。我們推論應該還有非常多種不同的平面解，甚至可以說已超乎我們所能估算的範圍。感覺就像在做太空探索一樣，似乎無邊無際，真是太過癮了。相信雖然這只是所有解中的一小部份，但是經過這次的探索讓我們發現這個「用全部的 12 片五連塊不重疊地拼出一個正立方體的表面積」的難題並不像原本想像中的困難，這大概就是所謂的「天下無難事，只怕有心人」吧！

玖、參考資料及其他

- 一、林傑斌(民 84)。數學樂園之茅塞頓開。臺北：牛頓。
- 二、孫文先(民 88)。多方塊的數學問題、拼圖謎題與遊戲。臺北：九章。
- 三、<http://residence.educities.edu/proteon/note11.htm>

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國小組 數學科

最佳創意獎

080415

正立方體的變裝秀---五連塊 (Pentominoes)
拼拼樂

臺北市大安區龍安國民小學

評語：

本研究是尋找如何將 12 型五連塊不重疊的拼組在 11 種的正立方體平面展開圖上，再摺出立方體，問題有趣，創意佳，研究結果可再繼續擴增。