

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第一名

080414

天旋地轉~圓擺線花型的幾何基因

臺南縣鹽水鎮鹽水國民小學

作者姓名：

小六 林芳瑾 小六 賴韋辰 小六 曾建榮

小六 顏達錡

指導老師：

何鳳珠 洪啟智

摘要

一個小小的繪圖尺，2 個固定的外圓搭配 3 個內滾圓及多個筆插定點，就可以畫出 108 種花瓣圖形，令人嘖嘖稱奇，仔細探究發現竟與內外圓齒數的公因數公倍數及比例有相關，且察覺內外圓大小比例是影響花瓣數及花瓣形成軌跡的重要因素，其中外圓決定了花瓣數，而內滾圓則決定了花瓣形成軌跡的順序。

經由此研究探討後，我們已能從花瓣圖形中判定此圖形是由怎樣的內滾圓繞外圓旋轉，也能由內外圓的大小預測能畫出怎樣的圖形，同時更進一步我們也運用這些原理隨心所欲的創作出不同組合的繪圖尺，感到很有成就感。

關鍵字詞：因倍數、比例、正多角星形、圓擺線

天旋地轉—圓擺線花型的幾何基因

壹、研究動機

一個 10 元不起眼的小獎品～繪圖尺，能畫出滿紙張美麗花瓣圖形，這個繪圖尺有什麼神奇之處，上網查詢了這些圖形，原來是一種圓擺線，是圓周上的一點繞著另一圓運行的軌跡。當換上各種不同的圓繞行時，所畫出的圖形就不一樣，若再改變筆插點位置，圖形又更多樣化了，外圓、內滾圓及筆插點位置三者間究竟藏有什麼規律呢？另外我們能不能隨心所欲的設計出我們想要的圖形呢？哈哈～若可以的話，我們可以一起來申請專利哦！

貳、研究目的

- 一、探究繪圖尺的基本構造，並依據不同的內外滾圓組合，搭配各種筆插定點位置，繪製出所有圖像。
- 二、筆插定點位置不同，所繪製的圖形有何不同？
- 三、內外圓大小與所繪製出的圖形有何相關？
- 四、當內外圓半徑成整數倍關係時，所繪製的圖形有何不同？
- 五、內外滾圓中，固定一圓而改變另一圓大小，則所繪製的圖形會有什麼變化？
- 六、內外滾圓如何作搭配設計才能畫出比一般的繪圖尺更多樣化且漂亮的圖形？

參、實驗研究器材

繪圖尺、電算器、電腦、數位相機

肆、文獻探討

我們收集到的相關研究如下：

研究刊物或網站名稱		主題名稱
全國科展	第 40 屆國小組第一名	小齒輪挑戰大齒輪
益智工房出版的歡迎光臨！數學美術館(平面圖形)。		什麼是花瓣圖形？
bee 美麗之家（網站）		Flash 專輯

伍、研究歷程與方法

活動一：探究繪圖尺的基本構造，並依據不同的內外滾圓組合，搭配各種筆插定點

位置，繪製出所有圖像。

※本研究之【筆插定點】指的是“筆插定點孔到內滾圓圓心的距離”。

方 法：

1. 觀察【繪圖尺】的基本配備及構造，並記錄之。
2. 內外圓之齒數與其圓周或圓的半徑有何關係？
3. 圓洞中(外圓)旋轉圓盤(內滾圓)並搭配筆插定點的不同，共有幾種組合方式？
4. 畫出各種組合圖形，並對圖形進行編號，做為接續活動觀察之參考。

活動二：筆插定點位置不同，所繪製的圖形有何不同？

方 法：

1. 內外圓齒數固定，筆插定點位置改變，所畫出的圖形有何不同？
2. 任意搭配內外圓組合，是否都能畫出中心聚焦的花瓣圖形？同時觀察此時筆插定點位置與內外圓有何關係？
3. 筆插定點設在內滾圓圓周上或圓心上，所畫出的圖形與先前的圖形有何不同？

活動三：繪製出的圖形與內外圓大小有何相關？

方 法：

1. 探索圖形的花瓣數與內外圓的齒數（或半徑）有何關係？
2. 各種不同的內外圓半徑比與所繪製出的圖形有何關係？
3. 各種不同的內外圓半徑比與花瓣圖形形成的軌跡有何關係？
4. 能否由花瓣圖形反推得內外圓之大小？
5. 隱藏在花瓣圖形中的多角星形與內外圓大小有何關係？

活動四：當外圓半徑為內滾圓半徑的整數倍時，所繪製的圖形是否相異之處？

方 法：

1. 當外圓半徑為內圓半徑的整數倍時，則所繪製出的圖形有何差異？
2. 內外圓半徑關係為整數倍時，改變筆插定點位置，則所繪製出的圖形有何差異？

活動五：一個圓保持固定，另一個圓改變大小，則所繪製的圖形會有什麼變化？

方 法：

1. 固定外圓大小，改變內滾圓的大小，觀察所繪製出的圖形有何改變？
2. 固定內滾圓大小，改變外圓的大小，觀察所繪製出的圖形有何改變？

活動六：內外滾圓如何設計才能跑出比一般的繪圖尺更多樣化且漂亮的花瓣圖形？

天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

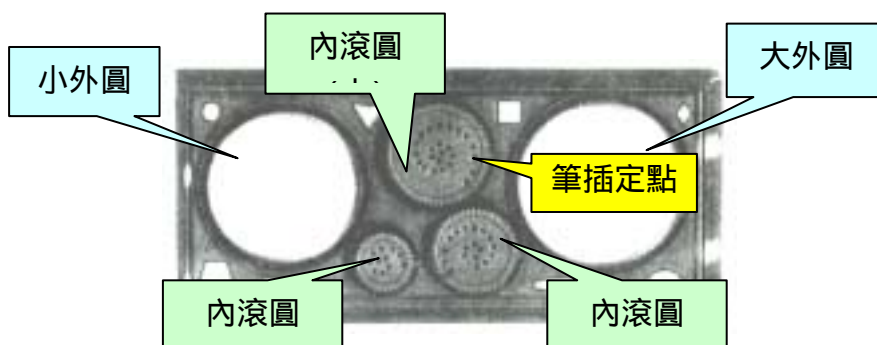
方 法：

1. 內外圓如何設計才能畫出比一般的繪圖尺更多樣化且漂亮的花瓣圖形？
2. 歸納設計內外圓組合的原則。

陸、研究結果：

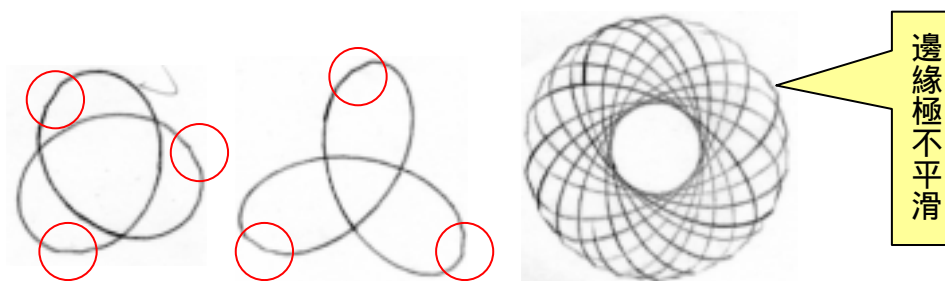
活動一實驗結果

(一) 我們收集到 2 組外型幾乎一模一樣的繪圖尺，觀察其構造並列表記錄如下：



	大外圓	小外圓	內滾圓(大)	內滾圓(中)	內滾圓(小)
繪圖尺 A	105 齒	96 齒	64 齒 筆插定點數為 24 孔	52 齒 筆插定點數為 19 孔	36 齒 筆插定點數為 11 孔
繪圖尺 B	105 齒	96 齒	63 齒 筆插定點數為 24 孔	52 齒 筆插定點數為 19 孔	36 齒 筆插定點數為 11 孔

我們發現 A、B 兩種繪圖尺的外觀及大小皆相同，唯一不同的地方在於大的內滾圓齒數，一個是 64 齒，一個是 63 齒，雖只有一齒之差，但所繪製出的圖就有不同，且繪製過程中發現：繪圖尺 B 繪製圖形時很自然平順，但繪圖尺 A 在繪製圖形時，每當內滾圓即將繞完一圈時會出現旋轉不平順且有點跳躍的感覺（如下圖），因此我們初步斷定繪圖尺 A 是為瑕疵品。



(二) 觀察繪圖尺的 2 個外圓及 3 個內滾圓其半徑及筆插孔到圓心的距離，記錄如下：

※筆插定點位置（距內圓圓心）～由外而內依序編號

※單位：公分

天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

	齒數	半徑	筆插定點位置（距圓心）～由外而內依序編號							
大外圓(A)	105	3.2								
小外圓(B)	96	3								
大滾圓(a)	63	2	1	2	3	4	5	6	7	8
			1.4	1.35	1.3	1.25	1.2	1.15	1.1	1.05
			9	10	11	12	13	14	15	16
			1	0.95	0.9	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65
			17	18	19	20	21	22	23	24
			0.6	0.55	0.5	0.45	0.4	0.35	0.3	0.25
中滾圓(b)	52	1.7	1	2	3	4	5	6	7	8
			1.2	1.15	1.1	1.05	1	0.95	0.9	0.85
			9	10	11	12	13	14	15	16
			0.8	0.75	0.7	0.65	0.6	0.55	0.5	0.45
			17	18	19					
			0.4	0.35	0.3					
小滾圓(c)	36	1.2	1	2	3	4	5	6	7	8
			0.7	0.65	0.6	0.55	0.5	0.45	0.4	0.35
			9	10	11					
			0.3	0.25	0.2					

依據我們測量出來的結果，發現：

1. 筆插定點距內滾圓圓心之距離以 0.05 公分呈遞減之數列排列。
2. 在每齒的形狀大小固定下，齒數比＝圓周比＝直徑比＝半徑比。

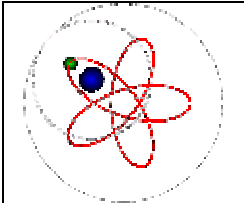
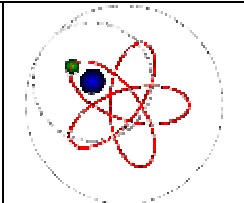
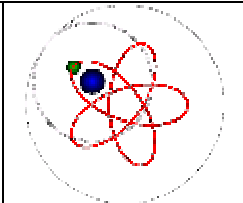
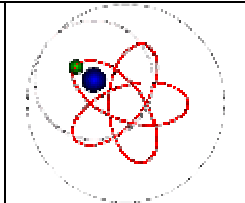
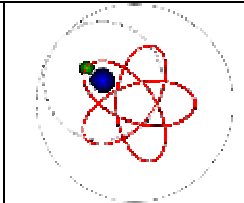
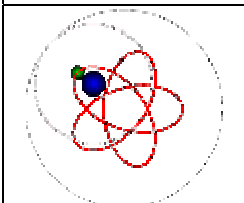
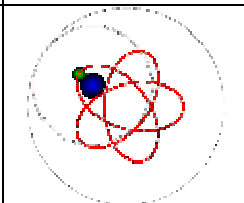
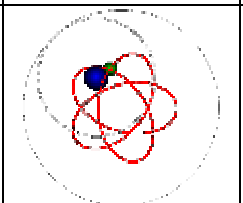
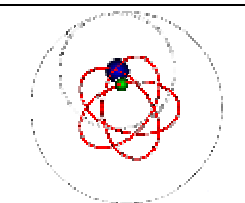
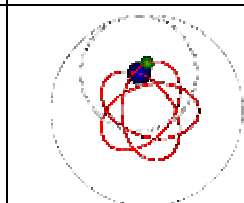
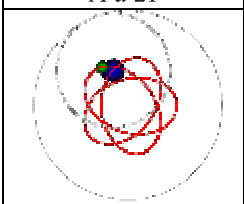
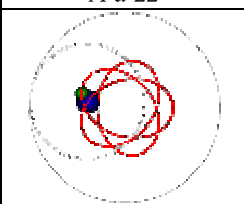
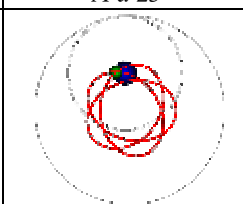
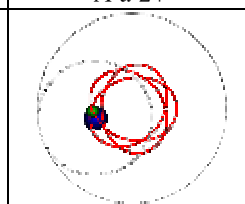
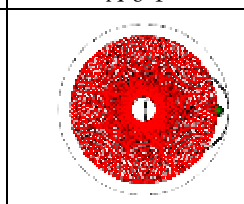
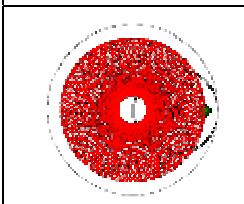
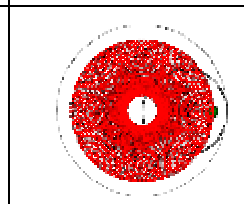
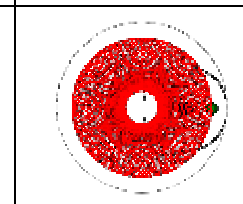
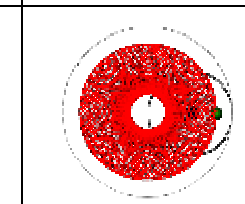
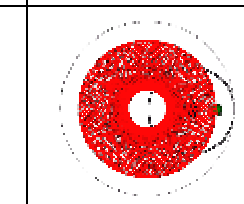
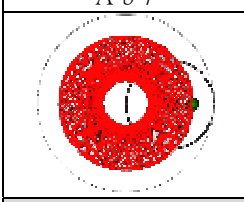
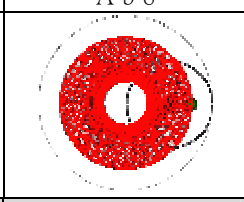
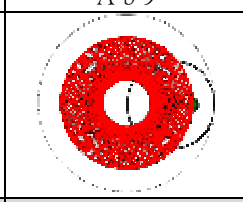
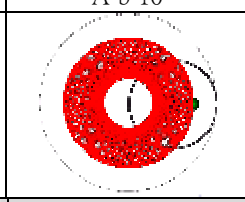
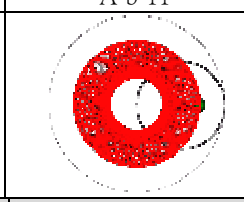
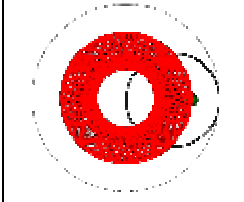
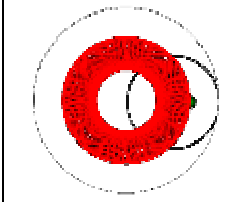
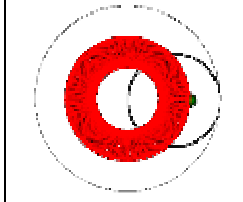
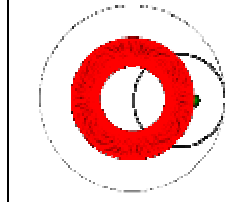
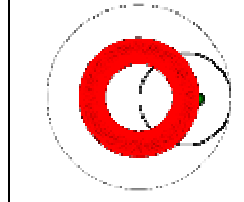
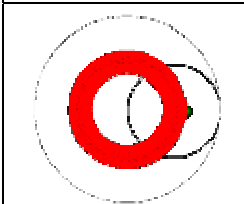
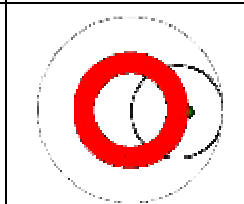
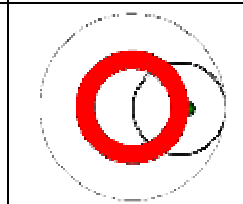
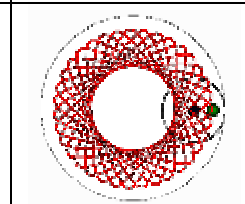
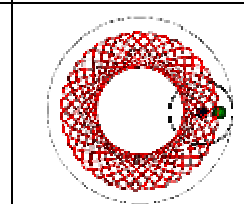
(三)依據排列組合原理，繪圖尺 2 種外圓及 3 種內滾圓，再搭配筆插孔數，共可形成 $(24+19+11) \times 2 = 108$ 種組合。

(四)因受限於繪圖尺條件限制，我們利用電腦程式來輔助繪製這 108 種圖形(下載處：

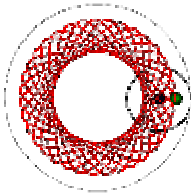
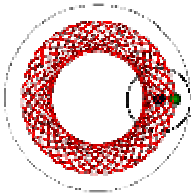
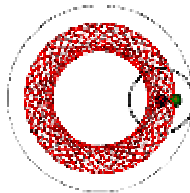
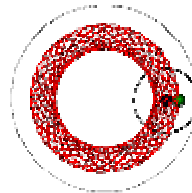
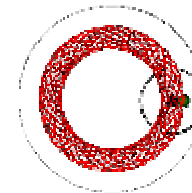
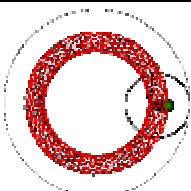
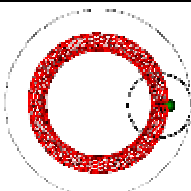
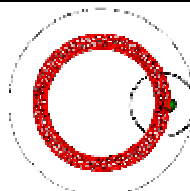
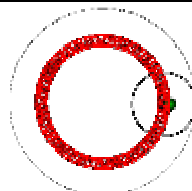
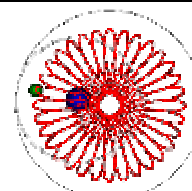
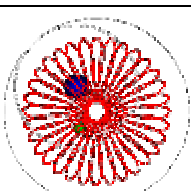
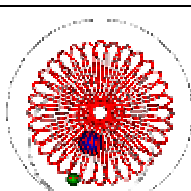
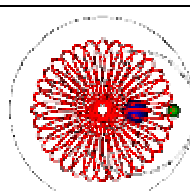
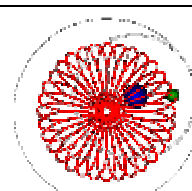
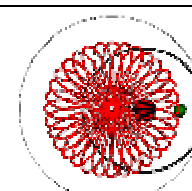
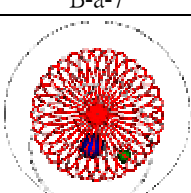
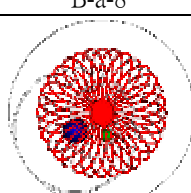
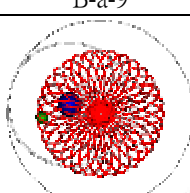
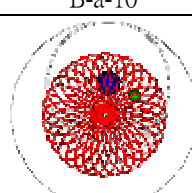
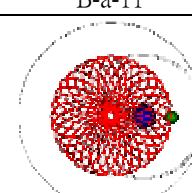
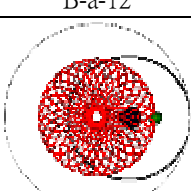
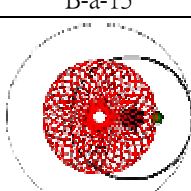
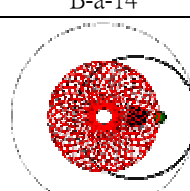
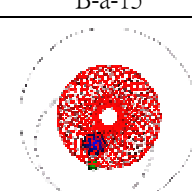
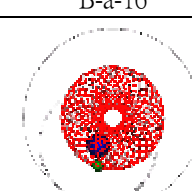
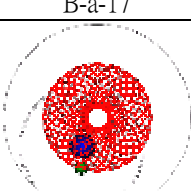
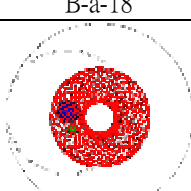
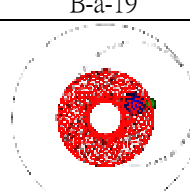
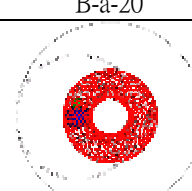
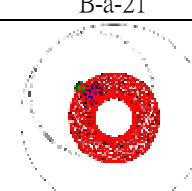
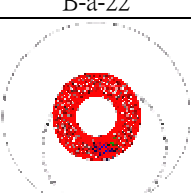
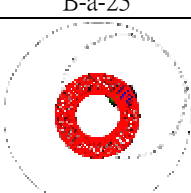
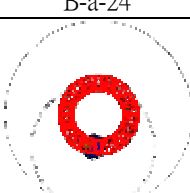
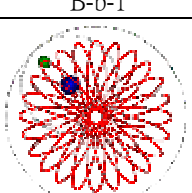
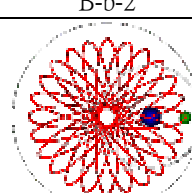
bee 美麗之家 <http://web.chsh.chc.edu.tw/bee/oldmath/first.htm>)：

1	2	3	4	5
A-a-1	A-a-2	A-a-3	A-a-4	A-a-5
6	7	8	9	10
A-a-6	A-a-7	A-a-8	A-a-9	A-a-10
11	12	13	14	15
A-a-11	A-a-12	A-a-13	A-a-14	A-a-15

天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

				
16	17	18	19	20
A-a-16	A-a-17	A-a-18	A-a-19	A-a-20
				
21	22	23	24	25
A-a-21	A-a-22	A-a-23	A-a-24	A-b-1
				
26	27	28	29	30
A-b-2	A-b-3	A-b-4	A-b-5	A-b-6
				
31	32	33	34	35
A-b-7	A-b-8	A-b-9	A-b-10	A-b-11
				
36	37	38	39	40
A-b-12	A-b-13	A-b-14	A-b-15	A-b-16
				
41	42	43	44	45
A-b-17	A-b-18	A-b-19	A-c-1	A-c-2
				
46	47	48	49	50

天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

A-c-3	A-c-4	A-c-5	A-c-6	A-c-7
				
51	52	53	54	55
A-c-8	A-c-9	A-c-10	A-c-11	B-a-1
				
56	57	58	59	60
B-a-2	B-a-3	B-a-4	B-a-5	B-a-6
				
61	62	63	64	65
B-a-7	B-a-8	B-a-9	B-a-10	B-a-11
				
66	67	68	69	70
B-a-12	B-a-13	B-a-14	B-a-15	B-a-16
				
71	72	73	74	75
B-a-17	B-a-18	B-a-19	B-a-20	B-a-21
				
76	77	78	79	80
B-a-22	B-a-23	B-a-24	B-b-1	B-b-2
				

天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

81 B-b-3	82 B-b-4	83 B-b-5	84 B-b-6	85 B-b-7
86 B-b-8	87 B-b-9	88 B-b-10	89 B-b-11	90 B-b-12
91 B-b-13	92 B-b-14	93 B-b-15	94 B-b-16	95 B-b-17
96 B-b-18	97 B-b-19	98 B-c-1	99 B-c-2	100 B-c-3
101 B-c-4	102 B-c-5	103 B-c-6	104 B-c-7	105 B-c-8
106 B-c-9	107 B-c-10	108 B-c-11		

活動二實驗結果

(一)當內外圓齒數固定，筆插定點位置改變，所畫出的圖形也有所不同，分析如下：

觀察項目	筆插定點由外往內移，所形成的圖形變化
花瓣形狀	由細長變成短胖，整個花瓣圖形由大變小

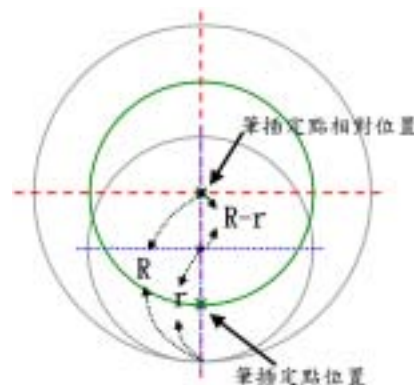
天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

花瓣交疊部分	逐漸變大
中間空洞部分	A-b、A-c、B-b、B-c 之圖形中間的空洞部分逐漸擴大 A-a、B-a 之圖形中間的空洞先縮小再逐漸擴大

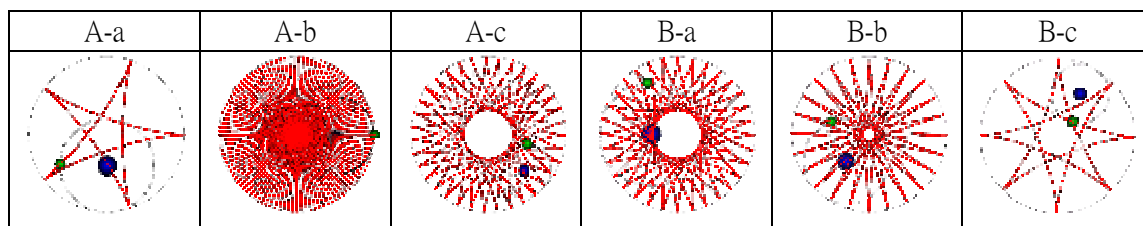
(二) 我們發現能畫出聚焦於一點的花瓣圖形之組合，其內滾圓的直徑都超過外圓的一半 $< A-a (63:105)$ 及 $B-a(63:96)$ 沒聚焦，但當把筆插點再往外挪即可出現聚焦的圖形 $>$ ，且聚焦點剛好是內外圓半徑（或齒數）的差。

因此，我們得到二個結論：

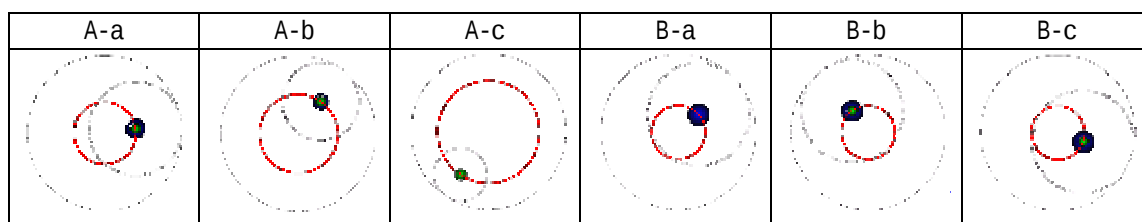
- 當內滾圓超過外圓的一半，且筆插定點剛好落在外圓圓心上時，就能繪製出中間聚焦的花瓣圖形。
- 當內滾圓未超過外圓的一半時，則無法畫出中間聚焦之花瓣圖形。



(三) 筆插定點設定在內滾圓的圓周上時，所繪製出來的花瓣圖形皆與外圓圓周相連，且花瓣都呈尖形。



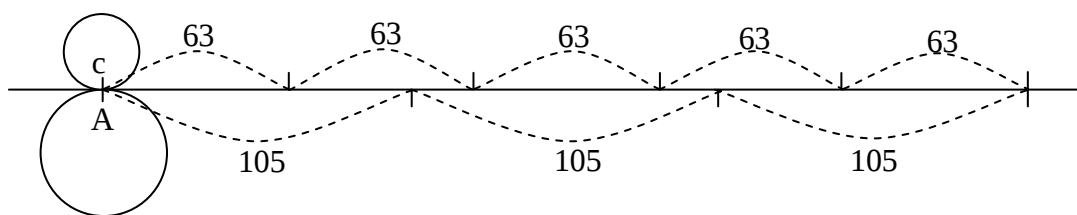
(四) 筆插定點設定在內滾圓的圓心上時，所繪製出來的圖形皆呈圓形狀，且內滾圓愈小，所繪製出的圓形愈大。



活動三實驗結果

(一) 我們發現，花瓣圖形的形成與內外圓齒數的最小公倍數有關。以下圖為例，我們將齒輪旋轉拉成一直線來看，內外圓交接處各做一個記號 A(外圓 105 齒)、a(內滾圓 63 齒)，當齒輪轉動 315 齒（即 105 和 63 的最小公倍數），A、a 兩點又會交疊在一起，此時，內滾圓剛好自轉了 5 圈。

天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因



又在繞行時，我們發現內滾圓自轉 1 圈剛好形成一片花瓣，因此得到一個

結論： $\frac{\text{內外圓齒數的最小公倍數}}{\text{內滾圓齒數}} = \text{花瓣數}$ 。

當我們將內外圓進行短除法求最小公倍數時，意外發現一個能更快的預測出花瓣數的方法（如右圖），外圓被內外圓齒數之最大公因數除盡後的數即為花瓣數，因此可以更進一步得到以下結論：

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 36 \quad 105} \\ \underline{12} \quad \quad \quad \textcircled{35} \\ 3 \times 12 \times 35 \\ \underline{3 \times 12} \quad \quad \quad \\ 35 \end{array}$$

$$\text{花瓣數} = \frac{\text{內外圓齒數的最小公倍數}}{\text{內滾圓齒數}} = \frac{\text{外圓齒數}}{\text{內外圓齒數的最大公因數}}$$

(二) 我們也發現，若將內外圓（以 A-c 為例）以比的形式來表示（36：105），若將其化成最簡單的整數比（12：35），後項（外圓）即為花瓣數（35 瓣），其道理和外圓用最大公因數去除所得的結果相同。以下我們再作幾個例証：

<筆插點的位置固定在 1：2(筆插定點距內滾圓圓心：內滾圓半徑)>

內圓:外圓	1:2	1:3	2:3	1:4	2:4
化簡單整數比	1:2	1:3	2:3	1:4	1:2
預測	2 瓣	3 瓣	3 瓣	4 瓣	2 瓣
實際圖形					
內圓:外圓	3:4	1:5	2:5	3:5	4:5
化簡單整數比	3:4	1:5	2:5	3:5	4:5
預測	4 瓣	5 瓣	5 瓣	5 瓣	5 瓣
實際圖形					
內圓:外圓	1:6	2:6	3:6	4:6	5:6
化簡單整數比	1:6	1:3	1:2	2:3	5:6
預測	6 瓣	3 瓣	2 瓣	3 瓣	6 瓣
實際圖形					
內圓:外圓	1:7	2:7	3:7	4:7	5:7

天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

化簡單整數比	1:7	2:7	3:7	4:7	5:7
預測	7 瓣	7 瓣	7 瓣	7 瓣	7 瓣
實際圖形					
內圓:外圓	6:7	1:8	2:8	3:8	4:8
化簡單整數比	6:7	1:8	1:4	3:8	1:2
預測	7 瓣	8 瓣	4 瓣	8 瓣	2 瓣
實際圖形					
內圓:外圓	5:8	6:8	7:8	1:9	2:9
化簡單整數比	5:8	3:4	7:8	1:9	2:9
預測	8 瓣	4 瓣	8 瓣	9 瓣	9 瓣
實際圖形					
內圓:外圓	3:9	4:9	5:9	6:9	7:9
化簡單整數比	1:3	4:9	5:9	2:3	7:9
預測	3 瓣	9 瓣	9 瓣	3 瓣	9 瓣
實際圖形					
內圓:外圓	8:9	1:10	2:10	3:10	4:10
化簡單整數比	8:9	1:10	1:5	3:10	2:5
預測	9 瓣	10 瓣	5 瓣	10 瓣	5 瓣
實際圖形					
內圓:外圓	5:10	6:10	7:10	8:10	9:10
化簡單整數比	1:2	3:5	7:10	4:5	9:10
預測	2 瓣	5 瓣	10 瓣	5 瓣	10 瓣
實際圖形					

由上表中我們得到幾個結論：

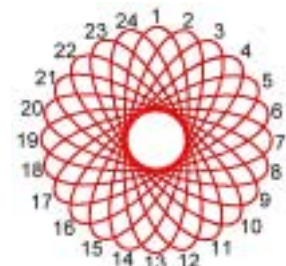
1. 比值相等時，所畫出的圖形皆相同，僅在於圖形大小不同罷了。
2. 圖形中的花瓣數即為內外圓的最簡單整數比中的後項(外圓)之數值。

(三) 再觀察內外圓半徑比之前項數字與圖形之關係，我們發現內外圓半徑之最簡單

天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

整數比的前項（內滾圓）數字代表著繞行軌跡的順序。舉例說明：

以 B-b 為例，內外圓齒數之最簡單整數比為 13 : 24，將繪製成的花瓣依序編號，起點為 1，第 1 號花瓣形成後，即繞到第 14 號花瓣，再繞到第 3 號花瓣，然後再繞到第 17 號花瓣，其順序為 1→14→3→16→5→18→7…，以 +13 的方式繞行，此數字剛好是內外圓齒數之簡單整數比（13 : 24）之前項。



綜合(二)及(三)，得到以下結論～內圓齒數：外圓齒數 = a : b (a、b 互質)

則 **a = 花瓣圖形繞行的軌跡順序**，**b = 形成的花瓣數**。

(四)我們利用”圓擺線實驗器”搭配 PhotoImpact 影像處理軟體繪製出數千個花瓣圖形（請見實驗附件），歸納其規律，可以做到從圖中得知以下訊息：

判斷法則一：內圓是否過半(即內圓是否 $> 1/2$ 外圓)

→檢視花瓣線條是否相交，若相交則有過半，若未相交則沒有過半。

花瓣未相交（表示內圓 $< 1/2$ 外圓）			花瓣有相交（表示內圓 $> 1/2$ 外圓）		

判斷法則二：看圖形即能知內外圓比為多少

→以繞行軌跡決定內圓，以花瓣數決定外圓。

內：外 = 3 : 10	內：外 = 2 : 5	內：外 = 5 : 24	內：外 = 5 : 9	內：外 = 7 : 12	內：外 = 13 : 20

判斷法則三：看圖形即能判斷出筆插定點大約設定在哪裡

→內圓未過半時：花瓣頂點呈尖形則筆插點在圓周上，其餘的在非圓周上。

→內圓過半時：花瓣線條在中心點對面相交，則筆插定點在聚焦點偏內；

若在未過中心點即相交，則筆插定點在聚焦點偏外。

內圓未過半之圖形			內圓過半之圖形		
內：外 = 3 : 10	內：外 = 2 : 5	內：外 = 5 : 24	內：外 = 5 : 9	內：外 = 7 : 12	內：外 = 13 : 20

天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

(四) 活動中所繪製出的花瓣圖形皆屬等距圖形，若以直線連接花瓣頂點即可成為正多角星形。

內:外		1:7	2:7	3:7	4:7	5:7	6:7
七瓣圖形	定點在圓周						
	定點在非圓周						
	直線連接頂點						
圓周上等距取 7 點依序連接	相鄰點連線						
	正七邊形						
	2 點循環連線						

歸納上表，我們的發現：

- 1.若筆插定點設定在圓周上，則畫出的 2:7 與 5:7 的圖形相同，3:7 與 4:7 相同，只是繞行方向不同罷了。
- 2.連接圖形中各花瓣頂點可形成正多角星形，且 2:7 與 5:7 的圖形相同，但大小不同，因為內外圓差距愈小，所形成的圖形就愈小。
- 3.同樣是正七角星形，但連接的方法不同(n 點循環)，所形成的多角星也有所不同。
- 4.當內圓愈接近外圓的一半時(如 3:7 及 4:7)，所畫出的正多角星形頂角角度愈小。
- 5.由正多角星形每個頂點所對應的弧長，我們也可以推得出正多角星形頂角之角度。

例：以內外圓比為 2:9 的圖形為例，連接花瓣頂點則形成正九角

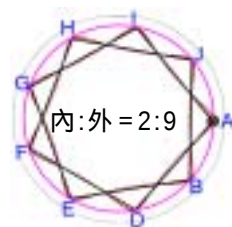
星形(右圖上)， $\angle DAI$ 所對應的弧占圓周長的 $\frac{5}{9}$ ，因此 $\angle$

$DAI = 360^\circ \times \frac{5}{9} \div 2 = 100^\circ$ (圓周角 = 圓心角的一半)，由此可

知連接頂點所成的多角星形之頂角為 100° 。

歸納出的正多角星形頂角公式為： $360^\circ \times \frac{m-2n}{m} \div 2$ 。

(說明：內:外 = $n:m$ ，且 $n < \frac{1}{2}m$ 。註 $\sim n:m$ 與 $m-n:m$ 之圖相同)



天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

活動四實驗結果

(一)設定外圓半徑為內滾圓半徑的整數倍時（如內外圓比分別為 $1:2$ 、 $1:3$ 、 $1:4$ ……），且筆插定點皆固定在內圓半徑的中點位置，分別畫出其圖形：

內：外	$1:2$	$1:3$	$1:4$	$1:5$	$1:6$
圖形					
內：外	$1:7$	$1:8$	$1:9$	$1:10$	
圖形					

由上圖中，我們發現當外圓半徑為內滾圓半徑的整數倍時，所畫出的圖形皆不會呈現交疊的現象，所形成的圖像是近似多邊形而非花瓣圖形。

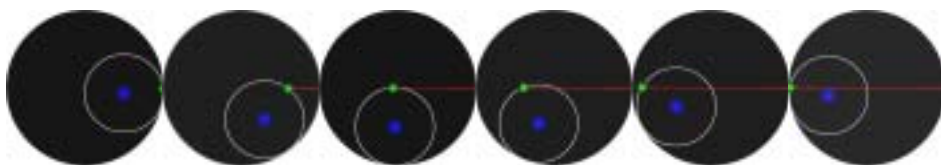
(二)當外圓半徑為內滾圓半徑的整數倍時，改變其筆插定點位置分別為 $1:1$ 、 $4:5$ 、 $3:5$ 、 $2:5$ 、 $1:5$ 、 $0:5$ ，則所繪製出來的圖形由連接外圓圓周之圖形慢慢收斂成一個圓，如下圖：

內半:外半	$1:2$	$1:3$	$1:4$	$1:5$
定點:內半	$1:1$	$1:1$	$1:1$	$1:1$
圖形				
內半:外半	$1:2$	$1:3$	$1:4$	$1:5$
定點:內半	$4:5$	$4:5$	$4:5$	$4:5$
圖形				
內半:外半	$1:2$	$1:3$	$1:4$	$1:5$
定點:內半	$3:5$	$3:5$	$3:5$	$3:5$
圖形				
內半:外半	$1:2$	$1:3$	$1:4$	$1:5$
定點:內半	$2:5$	$2:5$	$2:5$	$2:5$
圖形				
內半:外半	$1:2$	$1:3$	$1:4$	$1:5$

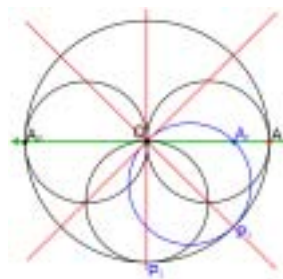
天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

定點:內半	1 : 5	1 : 5	1 : 5	1 : 5
圖形				
內半:外半	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5
定點:內半	0 : 5	0 : 5	0 : 5	0 : 5
圖形				

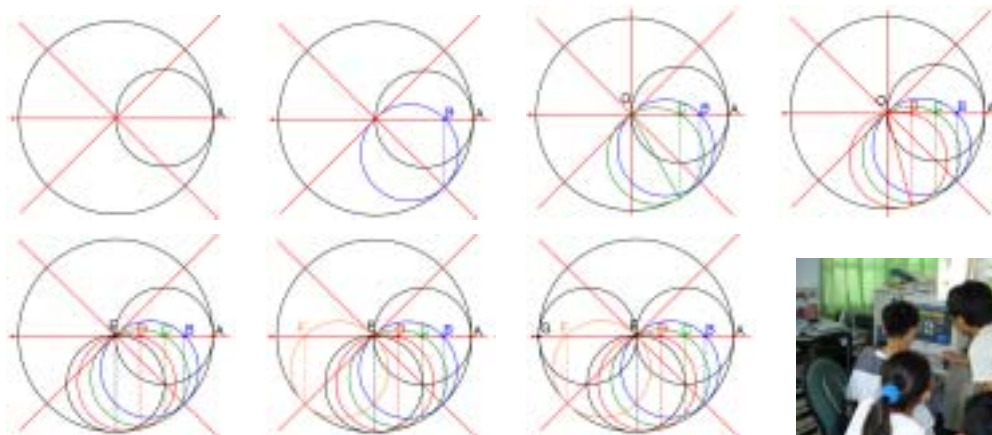
另外我們也發現，當外圓半徑是內滾圓的 2 倍，且筆插定點在圓周上時，所畫出來的圖形竟然是一直線（如圖）。



我們畫出分解圖如右，由於外圓半徑為內滾圓的 2 倍，因此圓周長亦為 2 倍，當內滾圓由起始點 A 開始繞著外圓順時針方向旋轉 $\frac{1}{8}$ 圈（至 P_1 點）時，相當於內滾圓轉了 $\frac{1}{4}$ 圈，此時的 A 會跑到 A_1 點；當內滾圓轉 $\frac{1}{2}$ 圈時，原 A 位置則移至外圓圓心 O，與外圓之接點剛好在外圓的 $\frac{1}{4}$ 處（ P_2 點）；當內滾圓轉 1 圈時，原 A 點位置剛好跑到對面的 A_3 點，將 A、 A_1 、O、 A_3 點連起來，剛好是外圓直徑。



另外，我們也發現筆插定點與兩圓接點連線都會與筆插定點所走的路徑垂直，其原因是內滾圓直徑所對應的圓周角必為 90° 。



天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

活動五實驗結果

(一)固定外圓而改變內滾圓所繪製出來的圖形如下。

<本活動以中間聚焦之圖形來進行探究>

內：外	4:7	5:7	6:7
筆插定點 在大圓圓 心上			



※爲了形成中間聚焦之圖形，因此選擇的內滾圓大小需超過外圓的一半。

內：外	6:11	7:11	8:11	9:11
筆插定點 在大圓圓 心上				

由上表中歸納結論：外圓固定，內滾圓由小變大時，所繪出的聚焦圖形會因內外圓差距變小而相對縮小。

(二)固定外圓而改變內滾圓所繪製出來的圖形如下：

內：外	7:10	7:11	7:12	7:13
筆插定點 在大圓圓 心上				

內：外	11:15	11:17	11:19	11:21
筆插定點 在大圓圓 心上				

由上表中歸納結論：圖形繞行的規律相同，但花瓣數會因外圓逐漸變大而變多，同時所繪出的聚焦圖形會因內外圓差距變小而相對變大。

活動六實驗結果

(一)依據前五個活動的探究成果，利用組合原理來做不同的繪圖尺設計。

首先，我們將 2 個外圓齒數的因數一一列出，發現繪製的花瓣數剛好都是 2 個外圓齒數的因數（如下表）。

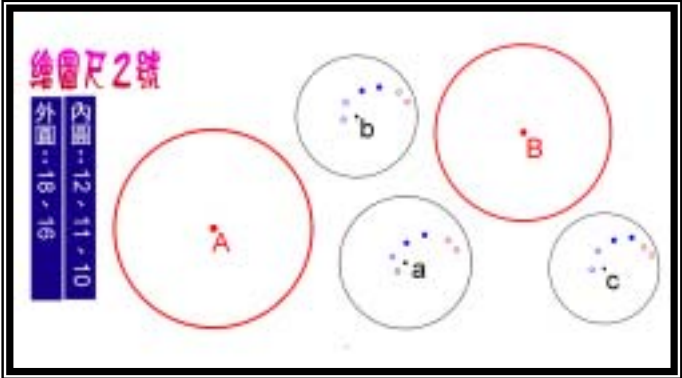
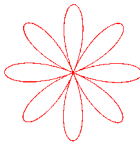
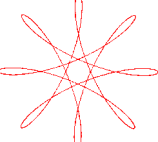
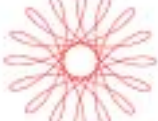
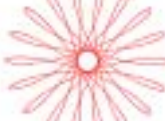
105 的因數	96 的因數
1、3、 <u>5</u> 、7、15、21、 <u>35</u> 、 <u>105</u>	1、2、3、4、6、 <u>8</u> 、12、16、 <u>24</u> 、 <u>32</u> 、48、96

再設定兩個外圓半徑（或齒數）找出符合需求的內圓組合。以半徑 16 和

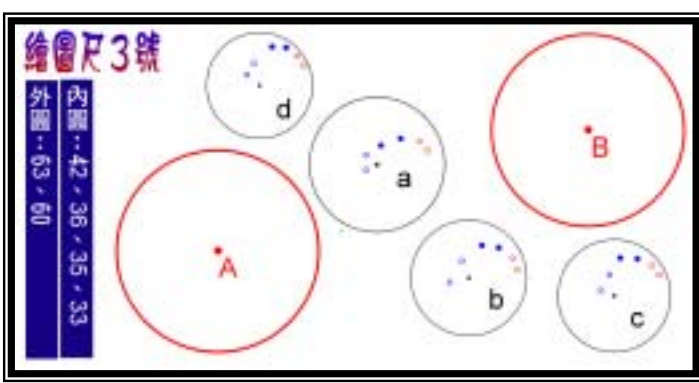
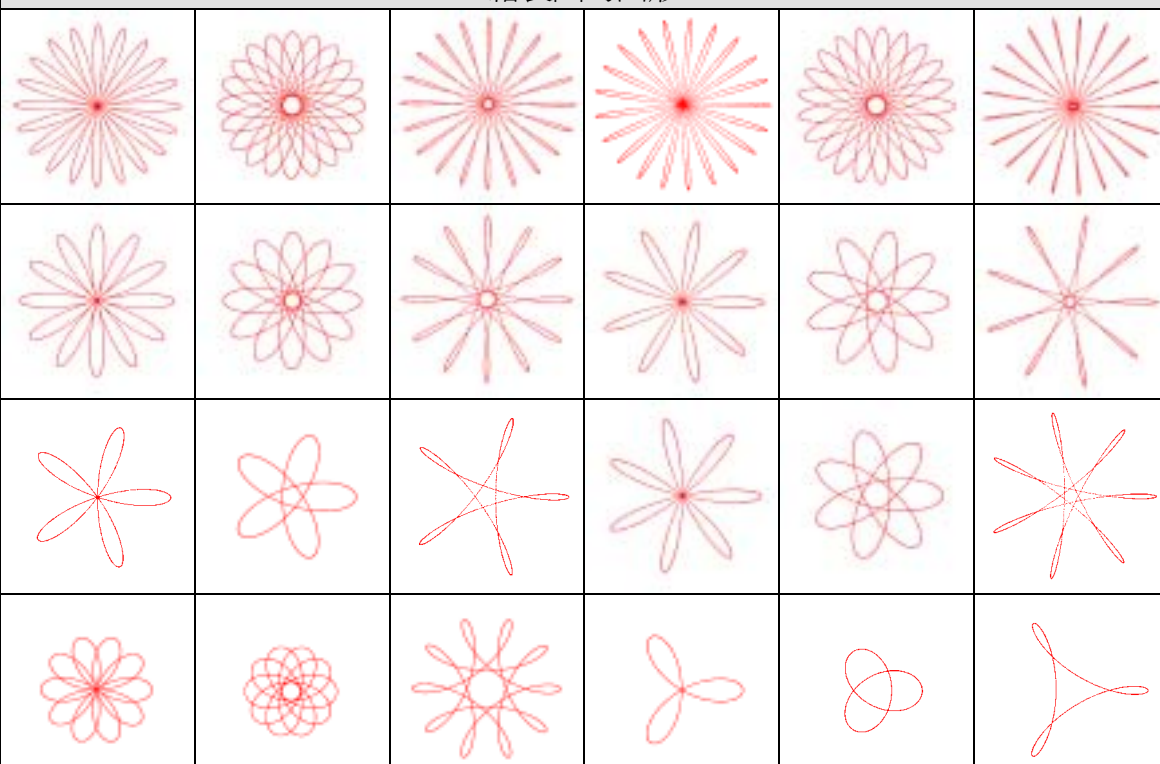
天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

18 兩外圓爲例，其步驟如下：

- a. 分別列出 16 和 18 的因數，並框出可能成形的花瓣數。
- 16 的因數有 1、2、4、8、16
- 18 的因數有 1、2、3、6、9、18
- b. 先以因數較少數優先判斷，如 16 當外圓，若要做出 4 瓣，則需搭配內滾圓半徑為 12，形成內外圓半徑之最簡單整數比為 3：4。
- c. 再以此 12 單位的內滾圓和另一個外圓 18 單位的外圓搭配，形成 2：3，因此可以做出 3 瓣。
- d. 以此類推，找出 6 種圖形（或 8 種、10 種）的搭配方式，每種組合皆繪製三種代表圖。

【繪圖尺2號】					
外圓		內滾圓			
18、16		12、11、10			
繪出的花瓣圖形之瓣數					
3、4、8、9、16、18					
					
繪製出的圖形					
					
					
					

天旋地轉 - 圓擺線花型的幾何基因

【繪圖尺 3 號】	
	
外圓	內滾圓
63、60	42、36、35、33
繪出的花瓣圖形之瓣數	
3、5、7、9、10、12、20、21	
繪製出的圖形	
	

※組合方式有很多種（請見附件及實驗內容）。

柒、討論建議

- 一、市售常見的繪圖尺，在外圓、內滾圓及數個筆插定點搭配組合下，可畫出 108 種不同的圖形，其成形花瓣數分別有 5、8、24、32、35、105 瓣。
- 二、內外圓的齒數比＝內外圓的圓周比＝內外圓的半徑比＝內外圓的直徑比。
- 三、當內外圓固定時，筆插定點愈靠內滾圓圓心，則形成的圖形會愈來愈小，且中間的洞口會愈來愈大，形成像甜甜圈似的環狀帶。
- 四、當內滾圓半徑大於外圓的一半，且筆插定點位置正好落在外圓的圓心上，則能繪出聚焦於中心點的花瓣圖形。

- 五、當筆插定點落在圓周上時，所繪製的圖形皆與外圓周相連，且頂點皆呈尖形；若筆插定點落在圓心上時，則所繪製的圖形成圓形。
- 六、將內外圓半徑比（或齒數比）化爲最簡單整數比，則後項（外圓）數字即爲花瓣數，前項（內滾圓）數字即爲圖形繞行軌跡的順序，反之，由圖形的花瓣數及花瓣繞行軌跡，我們也能判斷其繪製出此圖形的內外圓半徑比是多少了。
- 七、任選兩個數字當成內外圓的半徑或齒數，我們即能預測出所成圖形的花瓣數、繞行軌跡、聚焦圖形形成的筆插點位置、繪製出的圖形大小……等等相關訊息
- 八、依繞行的軌跡順序以直線連接花瓣的頂點，會形成不同的正多角星形或正多邊形，且同花瓣數的圖形內圓過半與不過半的圖形有對稱關係。
- 九、當外圓半徑爲內圓半徑的整數倍時，無法繪製出花瓣圖形。此時，當筆插定點愈接近內滾圓圓心時，圖形越趨近於圓形。
- 十、當外圓半徑是內圓半徑的 2 倍且筆插定點設定在圓周上時，則繪製出來的圖形成一直線。
- 十一、外圓固定，內滾圓由小變大，形成的花瓣圖形交疊部分也愈來愈大，整個圖形愈變愈小；反之，若內滾圓固定，外圓由小變大，則花瓣間重疊的部分愈來愈小，圖形越趨於細長型，整個圖形也變大了。
- 十二、繪製出的圖形花瓣數必定爲外圓半徑（或齒數）的因數。
- 十三、決定兩外圓大小後再利用其因數決定花瓣數，再來推出內滾圓的大小，如此可以做出不同的組合，設計出不同且符合需求的繪圖尺。
- 十四、繪圖尺是利用一個圓沿著另一個圓(圓內)滾動時，將圓上的一個固定點的繞行軌跡描繪下來，形成漂亮的花瓣型圖形，據資料查證這些圖形皆屬於圓擺線。由於圓擺線的成形過程不是我們目前所能理解的，因此在本研究中，我們僅就由各種設定下產生的圖形中去尋求規律，並期望由圖中去預測出內外圓大小組合，或由內外圓大小去預測可能形成的花瓣圖形爲何。
- 十五、若此圓不是在圓內滾動，而是在圓外滾動，或甚至在一條不規則的圖形上滾動，自然也可以生成繞形的軌跡，很想知道會是怎樣的一個軌跡，這就留到下次有機會再探討了。

活動剪影



中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國小組 數學科

第一名

080414

天旋地轉~圓擺線花型的幾何基因

臺南縣鹽水鎮鹽水國民小學

評語：

內容極為豐富，生動且有趣。主題及材料難易度適合國小程度。說明書整理得相當完整，而且現場解說條理分明。特別是多項應用於畫多邊形及多角星形上非常有創意。是一份非常高水準的作品。