

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

最佳創意獎

080412

破鏡重圓

高雄縣鳳山市南成國民小學

作者姓名：

小五 鄭朝元 小五 郭冠廷 小五 劉靜宜

指導老師：

游國榮 陳瑞庭

中 華 民 國 第 四 十 五 屆 中 小 學 科 學 展 覽 會

作 品 說 明 書

科別：數學科

組別：國小組

作品名稱：破鏡重圓

關鍵詞：重圓數、孿生重圓數

編號：

破 鏡 重 圓

壹、摘要

利用傳統方法(操作電算器及利用代數)及 Excel 套裝軟體，尋找 1~1000 所有的重圓數及孿生重圓數，結果發現了 9 個二次重圓數、18 個三次重圓數、22 個四次重圓數、6 組孿生重圓數及 2 組連續的三個重圓數。這次研究，讓我們認識到自然數的趣味及美妙之處，尋找出更多的重圓數與孿生重圓數，進而認識到掌握不同數學工具的重要性。希望以後長大之後，我們還能發現更多、更好用的方法，來探討研究重圓數與孿生重圓數，做更大、更深、更廣的研究。

貳、研究動機

在五年級上學期和下學期的數學課本裡，有一個單元是圖形的面積，另一個單元是體積，我們在寫習題時發現到 $45^2 = 2025$ ，由左向右拆成 20 及 25，再相加， $20 + 25 = 45$ 。我們對於這個發現非常有興趣，而且又很好奇，怎麼會那麼恰巧呢？有哪些數目符合這個規則呢？如果是拆成一個數字一個數字或三個數字三個數字加呢？如果是拆成不規則的數字相加呢？四次方可不可以呢？有沒有孿生的數呢？在下課的時候一直思考著這個問題，到底要如何找解答呢？對了，找全班同學幫忙計算、上網找資料，又到書局找到了「數學謎題二十種解法」這本書，再應用自己的電腦知識，在老師討指導下，做了以下的研究。

參、研究目的

一、找出二次重圓數

- (一) 1 個 1 個數字相加
- (二) 2 個 2 個數字相加
- (三) 3 個 3 個數字相加

二、找出三次重圓數

- (一) 1 個 1 個數字相加
- (二) 2 個 2 個數字相加
- (三) 3 個 3 個數字相加

三、找出四次重圓數

- (一) 1 個 1 個數字相加
- (二) 2 個 2 個數字相加

(三)3 個 3 個數字相加

四、 找出孿生重圓數

(一)規則性的孿生重圓數

(二)不規則性的孿生重圓數

肆、 研究過程

重圓數就是：

假設有 3 個數，分別是 P ， n ， M ，而且這 3 個數都是正整數的情形下，
在當 $P^n = M$ 時，把 M 從左向右分別拆成幾個整數為： $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ ，
使得 $m_1 + m_2 + \dots + m_k = P$

，則把自然數 P 叫做 n 次重圓數。

很特別的是，當 $n = 1$ 時，則把 P 叫做平凡重圓數。

例如：

$$1. \quad 45^1 = 45$$

$$2. \quad 45^2 = 20, 25 \quad \text{由左向右拆成 } 20 \text{ 及 } 25, \text{ 再相加。}$$

$$\longrightarrow \quad 20 + 25 = 45$$

$$3. \quad 45^3 = 9, 11, 25 \longrightarrow \quad 9 + 11 + 25 = 45$$

$$45^4 = 4, 10, 06, -25 \longrightarrow \quad 4 + 10 + 6 + 25 = 45$$

.

.

在 1. 的式子裡，因為 $n = 1$ ，所以 P 就叫做平凡重圓數，

在 2. 的式子裡，因為 $n = 2$ ，所以 P 就叫做 2 次重圓數，

在 3. 的式子裡，因為 $n = 3$ ，所以 P 就叫做 3 次重圓數，

.....

孿生重圓數就是：

假設 P_1 ， P_2 兩個都是重圓數，且 P_1 ， P_2 為連續整數，則把 P_1 ， P_2 互稱孿生重圓數。

例如：

$$8^3 = 512, \quad \text{由左至右拆成 } 5 + 1 + 2 = 8$$

$$9^3 = 729, \quad \text{由左至右拆成 } 72 + 9 = 81, \quad 8 + 1 = 9$$

在上列兩個式子中，8、9 都是三次重圓數，且 8、9 又為重圓數，所以稱 8 及 9 為三次孿生重圓數。

我們發現找出重圓數可以利用的方法有下列三種：

第一、操作電算器找出重圓數

由 1、2、3...數字依序加大，二次方、三次方、四次方依序加深，1 個 1 個數字、相加 2 個 2 個數字相加、進而擴展到不規則數字的相加，由結果找出兩數只相差 1 的孿生重圓數。

經過動員全班的同學，發現花了很多的時間，找到的重圓數卻很有限，這樣一直慢慢找下去也不是辦法。

第二、利用代數方法找出重圓數

例如： $45^2 = 2025$ ，

45 在二次方後，可以得到一個 4 位數，我們假設前面 2 位（也就是 20）是 A，後面 2 位（也就是 25）是 B，且此數也假設為 P。

$$\text{則 } P = 45^2 = 2025 = 2000 + 25 = 100A + B$$

也可以寫成

$$\begin{aligned} 100A + B &= (A + B)^2 \\ \longrightarrow 100A + B &= A^2 + 2AB + B^2 \\ \text{移項後} \longrightarrow A^2 + 2(B - 50)A + (B^2 - B) &= 0 \\ \text{解 } A, \text{ 可以利用一元二次方程式的解 } X &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

$$\text{因此 } A = (50 - B) \pm \sqrt{(B - 50)^2 - (B^2 - B)}$$

$$= (50 - B) \pm \sqrt{2500 - 99B}$$

其中 根號內的數必須是一個完全平方數，所以 $2500 - 99B \geq 0$

$$\longrightarrow 0 \leq B \leq 25$$

0 ~ 25 逐一代入，B 可以是 0，1，25

當 $B = 0$ ， $A = 100$ 或 0

$B = 1$ ， $A = 98$ 或 0

$B = 25$ ， $A = 30$ 或 20

$$\text{又 } P = 100A + B$$

$$\longrightarrow A = 100, B = 0 \rightarrow P = 10000,$$

$$\longrightarrow 100^2 = 10000$$

$$\longrightarrow A = 98, B = 1 \rightarrow P = 9801,$$

$$\longrightarrow 99^2 = 9801$$

$$\longrightarrow A = 30, B = 25 \rightarrow P = 3025,$$

$$\longrightarrow 55^2 = 3025$$

$$\longrightarrow A = 20, B = 25 \rightarrow P = 2025,$$

$$\longrightarrow 45^2 = 2025$$

〔說明〕

找二次重圓數的過程中運用到二次方程式，必須求出它的解，同樣的道理，找三次重圓數的過程中必須運用到三次方程式，也必須求出它的解，但三次方程式以上要求出它的解，就沒那麼容易了，因此我們又再尋找其他方法尋找重圓數。

第三、運用 Excel 套裝軟體找出重圓數

小組裡面有人會使用微軟出產的辦公室套裝軟體-試算表(Excel)，他建議大家不妨嘗試利用電腦的數學運算能力，帮助大家找尋更多的重圓數。於是，在大家一同努力之下開始了尋找”重圓數”之旅。

(1)設定範圍(1~1000)

查過市面上的 Excel 參考書後，才知道電腦並非萬能，有處理範圍的限制再加上過於龐大的數字，超過我們目前所學的範圍。經過大家討論後決定以 1~1000 為範圍，由此往上找其平方數、立方數及四次方，看看是否為重圓數。

(2)輸入資料(1~1000)

在 Excel 中選定一欄，將第一步驟所決定的設定範圍 (1~1000)，依序輸入。

(3)輸入平方數

考慮到立方數以上的不規則拆解有許多方式，大家決定將平方數與立方數、四次方分開不同的頁籤分列處理。

利用 Excel 內建平方數的函數以及公式複製能力，輸入”1^2”的公式後，即用滑鼠輕點此欄位右下角的”+”號，自動複製到”1000^2”，順利地完成此步驟。

(4)將平方數依其數字，依序拆開成 7 個欄位。

以最後一個數字 1000 為基準，它平方後可得到”1,000,000”的數，共有 7 位數字往上推至 1 的平方數 1，將不滿 7 位數的位數補上零。此 7 個欄位，以 a、b、c、d、e、f、g 代表，此步驟的公式依次為：

a= INT(E3/1000000);

b= INT(E3/100000)-F3*10;

c= INT(E3/10000)-F3*100-G3*10;

d= INT(E3/1000)-F3*1000-G3*100-H3*10;

e= INT(E3/100)-F3*10000-G3*1000-H3*100-I3*10;

f= INT(E3/10)-F3*100000-G3*10000-H3*1000-I3*100-J3*10;

g=INT(E3/1)-F3*1000000-G3*100000-H3*10000-I3*1000-J3*100-K3*10

(5)平方數規律的找尋方式

每個位數之和($a+b+c+d+e+f+g$)

a. 將此公式: $a+b+c+d+e+f+g$ 輸入欄位中，再複製公式到最後一列。

b. 判別是否合乎條件:

利用 Excel 內建的” if-else” 判斷函數，將公式輸入欄位中，此公式為 { if 各位數和=基數，” 是重圓數” ，” 非” }，最後複製公式到最後一列。

c. 使用資料篩選功能

用工具列之資料篩選功能，篩選出合乎條件的重圓數。

電腦運算後，所得結果如下（一）、（二）、（三）、（四）；

（一）1~1000 的平方數中，屬於規則性的重圓數的有：

甲、 每位數之和，等於原來的數。

1，9 共兩個數。

驗證結果：

1. $1 \times 1 = 1$

$$1 = 1$$

$$1^2 = 1 \quad \text{得證！}$$

2. $9 \times 9 = 81$

$$8 + 1 = 9$$

$$9^2 = 81 \quad \text{得證！}$$

乙、 每兩位數之和，等於原來的數。

45，55，99 共三個數。

驗證結果：

1. $45 \times 45 = 2025$

$$20 + 25 = 45$$

$$45^2 = 2025 \quad \text{得證！}$$

2. $55 \times 55 = 3025$

$$30 + 25 = 55$$

$$55^2 = 3025 \quad \text{得證！}$$

3. $99 \times 99 = 9801$

$$98 + 1 = 99$$

$$99^2 = 9801 \quad \text{得證！}$$

丙、 每三位數之和，等於原來的數。

297，703，999 共三個數。

驗證結果：

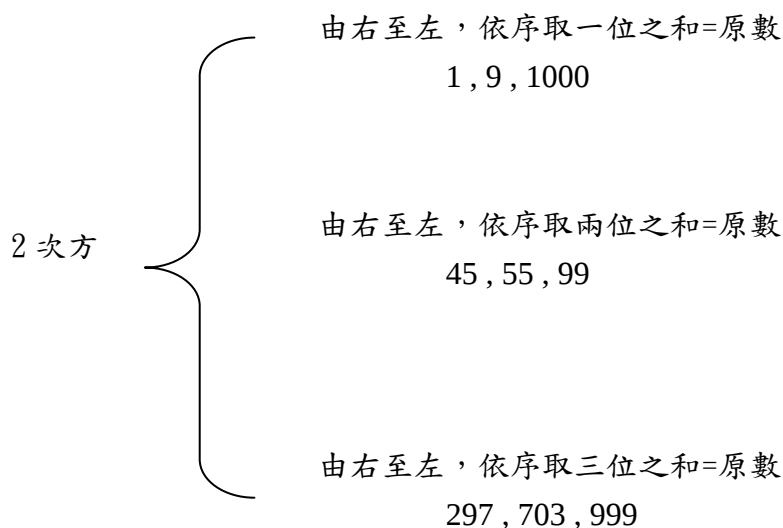
1. $297 \times 297 = 88209$

$$88 + 209 = 297$$

$$297^2 = 88209 \quad \text{得證！}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 703 \times 703 = 494209 \\
 & 494 + 209 = 703 \\
 & 703^2 = 494209 \quad \text{得證！}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & 999 \times 999 = 998001 \\
 & 998 + 1 = 999 \\
 & 999^2 = 998001 \quad \text{得證！}
 \end{aligned}$$



〔說明〕在規則性的二次重圓數中,我們發現了一組規則性的孿生重圓數

(6)輸入立方數

利用 Excel 內建立方數的函數以及公式複製能力，輸入”1^3”的公式後，即用滑鼠輕點此欄位右下角的”+”號，自動複製到”1000^3”，順利地完成此步驟。

(7)將立方數依其數字，依序拆開成 10 個欄位。

以最後一個數字 1000 為基準，它立方後可得到 1,000,000,000”的數，共有 10 位數字往上推至 1 的立方數 1，將不滿 10 位數的位數補上零。此 10 個欄位，以 a、b、c、d、e、f、g、h、i、j 代表，此步驟的公式依次為：

百億位,

a= INT(C4/10000000000);

億位,

b= INT(C4/1000000000)-D4*10;

千萬位,

$$c = \text{INT}(C4/10000000) - D4*100 - E4*10;$$

百萬位,

$$d = \text{INT}(C4/1000000) - D4*1000 - E4*100 - F4*10$$

十萬位,

$$e = \text{INT}(C4/10000) - D4*100000 - E4*10000 - F4*1000 - G4*100 - H4*10;$$

萬位,

$$f = \text{INT}(C4/10000) - D4*100000 - E4*10000 - F4*1000 - G4*100 - H4*10;$$

千位,

$$g = \text{INT}(C4/1000) - D4*1000000 - E4*100000 - F4*10000 - G4*1000 - H4*100 - I4*10;$$

百位,

$$h = \text{INT}(C4/100) - D4*10000000 - E4*1000000 - F4*100000 - G4*10000 - H4*1000 - I4*100 - J4*10$$

十位,

$$i = \text{INT}(C4/10) - D4*100000000 - E4*10000000 - F4*1000000 - G4*100000 - H4*10000 - I4*1000 - J4*100 - K4*10$$

個位,

$$j = C4 - D4*1000000000 - E4*100000000 - F4*10000000 - G4*1000000 - H4*100000 - I4*10000 - J4*1000 - K4*100 - L4*10$$

(二) 1~1000 的立方數中，屬於規則性的重圓數的有：

甲、每位數之和，等於原來的數。

1, 8, 17, 18, 26, 27 共六個數

驗證結果：

1. $1 \times 1 \times 1 = 1$

$1 = 1$ 得證！

2. $8 \times 8 \times 8 = 512$

$5 + 1 + 2 = 8$ 得證！

3. $17 \times 17 \times 17 = 4913$

$4 + 9 + 1 + 3 = 17$ 得證！

4. $18 \times 18 \times 18 = 5832$

$5 + 8 + 3 + 2 = 18$ 得證！

5. $26 \times 26 \times 26 = 17576$

$1 + 7 + 5 + 7 + 6 = 26$ 得證！

6. $27 \times 27 \times 27 = 19683$

$1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$ 得證！

乙、每兩位數之和，等於原來的數。

10, 45, 109, 143, 153, 154, 188, 197, 198, 199, 208 共

十一個數。

驗證結果：

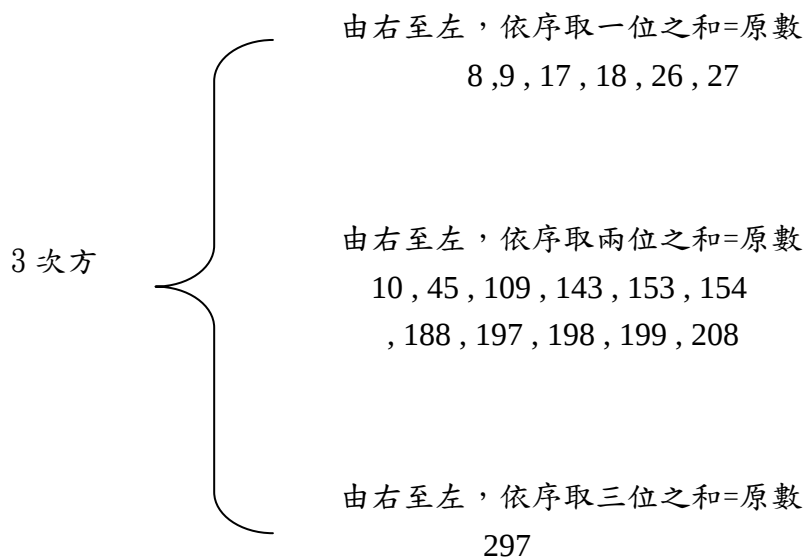
1. $10 \times 10 \times 10 = 1000$
 $10 + 0 = 10$ 得證！
2. $45 \times 45 \times 45 = 91125$
 $9 + 11 + 25 = 45$ 得證！
3. $109 \times 109 \times 109 = 1295029$
 $1 + 29 + 50 + 29 = 109$ 得證！
4. $143 \times 143 \times 143 = 2924207$
 $2 + 92 + 42 + 7 = 143$ 得證！
5. $153 \times 153 \times 153 = 3581577$
 $3 + 58 + 15 + 77 = 153$ 得證！
6. $154 \times 154 \times 154 = 3652264$
 $3 + 65 + 22 + 64 = 154$ 得證！
7. $188 \times 188 \times 188 = 6644772$
 $6 + 64 + 47 + 72 = 188$ 得證！
8. $197 \times 197 \times 197 = 7645373$
 $7 + 64 + 53 + 73 = 197$ 得證！
9. $198 \times 198 \times 198 = 7762392$
 $7 + 76 + 23 + 92 = 198$ 得證！
10. $199 \times 199 \times 199 = 7880599$
 $7 + 88 + 5 + 99 = 199$ 得證！
11. $208 \times 208 \times 208 = 8998912$
 $8 + 99 + 89 + 12 = 208$ 得證！

丙、每三位數之和，等於原來的數。

297 共一個數。

驗證結果：

$$297 \times 297 \times 297 = 26198073$$
$$26 + 19 + 80 + 73 = 297 \quad \text{得證！}$$



〔說明〕在規則性的三次

重圓數中,我們發現了六組規則性的學生重圓數,最特別的是有一組三胞胎(三個重圓數連在一起)。

(8)輸入四次方數

利用 Excel 內建立方數的函數以及公式複製能力，輸入”1⁴”的公式後，即用滑鼠輕點此欄位右下角的”+”號，自動複製到”1000⁴”，順利地完成此步驟。

(9)將四次方數依其數字，依序拆開成 13 個欄位。

以最後一個數字 1000 為基準，它四次方後可得到 1,000,000,000,000”的數，共有 13 位數字往上推至 1 的四次方數 1，將不滿 13 位數的位數補上零。此 13 個欄位，以 a、b、c、d、e、f、g、h、i、j、k、l、m 代表，此步驟的公式依次為：

兆位

a=INT(C3/1000000000000)

千億位

b=INT(C3/100000000000)-D3*10

百億位

c=INT(C3/10000000000)-D3*100-E3*10

十億位

d=INT(C3/1000000000)-D3*1000-E3*100-F3*10

億位

e=INT(C3/100000000)-D3*10000-E3*1000-F3*100-G3*10

千萬位

$$f = \text{INT}(C3/10000000) - D3*100000 - E3*10000 - F3*1000 - G3*100 - H3*10$$

百萬位

$$g = \text{INT}(C3/1000000) - D3*1000000 - E3*100000 - F3*10000 - G3*1000 - H3*100 - I3*10$$

十萬位

$$h = \text{INT}(C3/100000) - D3*10000000 - E3*1000000 - F3*100000 - G3*10000 - H3*1000 - I3*100 - J3*10$$

萬位

$$i = \text{INT}(C3/10000) - D3*100000000 - E3*10000000 - F3*1000000 - G3*100000 - H3*10000 - I3*1000 - J3*100 - K3*10$$

千位

$$j = \text{INT}(C3/1000) - D3*1000000000 - E3*100000000 - F3*10000000 - G3*1000000 - H3*100000 - I3*10000 - J3*1000 - K3*100 - L3*10$$

百位

$$k = \text{INT}(C3/100) - D3*10000000000 - E3*1000000000 - F3*100000000 - G3*10000000 - H3*1000000 - I3*100000 - J3*10000 - K3*1000 - L3*100 - M3*10$$

十位

$$l = \text{INT}(C3/10) - D3*100000000000 - E3*10000000000 - F3*1000000000 - G3*100000000 - H3*10000000 - I3*1000000 - J3*100000 - K3*10000 - L3*1000 - M3*100 - N3*10$$

個位

$$m = C3 - D3*1000000000000 - E3*100000000000 - F3*10000000000 - G3*1000000000 - H3*100000000 - I3*10000000 - J3*1000000 - K3*100000 - L3*10000 - M3*1000 - N3*100 - O3*10$$

(三) 1~1000 的四次方數中，屬於規則性的重圓數的有：

甲、每位數之和，等於原來的數。

1、7、22、25、28、36 共六個重圓數。

驗證結果：

1. $1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$1 = 1$ 得證！

2. $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$

$2 + 4 + 0 + 1 = 7$ 得證！

3. $22 \times 22 \times 22 \times 22 = 234256$

$2 + 3 + 4 + 2 + 5 + 6 = 22$ 得證！

4. $25 \times 25 \times 25 \times 25 = 390625$

- $$3+9+0+6+2+5=25 \quad \text{得證！}$$
5. $28 \times 28 \times 28 \times 28 = 614656$
 $6+1+4+6+5+6=28 \quad \text{得證！}$
6. $36 \times 36 \times 36 \times 36 = 1679616$
 $1+6+7+9+6+1+6=36 \quad \text{得證！}$

乙、每兩位數之和，等於原來的數。

1、45、55、67、133、166、187、198、199、232、243、253、286、342

共 14 個數。

驗證結果：

1. $1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$
 $1=1 \quad \text{得證！}$
2. $45 \times 45 \times 45 \times 45 = 4100625$
 $25+6+10+4=45 \quad \text{得證！}$
3. $55 \times 55 \times 55 \times 55 = 9150625$
 $25+6+15+9=55 \quad \text{得證！}$
4. $67 \times 67 \times 67 \times 67 = 20151121$
 $21+11+15+20=67 \quad \text{得證！}$
5. $133 \times 133 \times 133 \times 133 = 312900721$
 $21+7+90+12+3=133 \quad \text{得證！}$
6. $166 \times 166 \times 166 \times 166 = 759333136$
 $36+31+33+59+7=166 \quad \text{得證！}$
7. $187 \times 187 \times 187 \times 187 = 1222830961$
 $61+9+83+22+12=187 \quad \text{得證！}$
8. $198 \times 198 \times 198 \times 198 = 1536953616$
 $16+36+95+36+15=198 \quad \text{得證！}$
9. $199 \times 199 \times 199 \times 199 = 1568239201$
 $1+92+23+68+15=199 \quad \text{得證！}$
10. $232 \times 232 \times 232 \times 232 = 2897022976$
 $76+29+2+97+28=232 \quad \text{得證！}$
11. $243 \times 243 \times 243 \times 243 = 3486784401$
 $1+44+78+86+34=243 \quad \text{得證！}$
12. $253 \times 253 \times 253 \times 253 = 4097152081$
 $81+20+15+97+40=253 \quad \text{得證！}$
13. $286 \times 286 \times 286 \times 286 = 6690585616$
 $16+56+58+90+66=286 \quad \text{得證！}$
14. $342 \times 342 \times 342 \times 342 = 13680577296$
 $1+36+80+57+72+96=342 \quad \text{得證！}$

丙、每三位數之和，等於原來的數。

1、10、100、433 共 4 個數。

驗證結果：

1. $1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$1 = 1$ 得證！

2. $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$

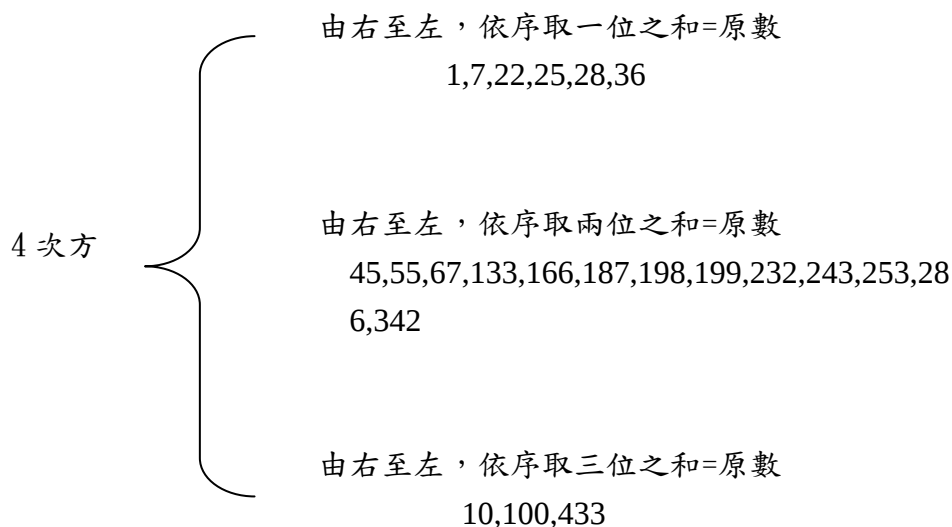
$10 + 0 = 10$ 得證！

3. $100 \times 100 \times 100 \times 100 = 100000000$

$100 + 0 = 100$ 得證！

4. $433 \times 433 \times 433 \times 433 = 35152125121$

$35 + 152 + 125 + 121 = 433$ 得證！



〔說明〕在規則性的四次重圓數中，我們發現了一組規則性的孿生重圓數

（四）1~1000 中，不規則性的孿生重圓數：

1. 在二位數中，三次孿生重圓數有 27 和 28，62 和 63，71 和 72，81 和 82，共 4 對。

$27^3 = 19683 \rightarrow 1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$ 得證！

$28^3 = 21952 \rightarrow 2 + 19 + 5 + 2 = 28$ 得證！

$$\begin{array}{ll}
62^3 = 238328 & \rightarrow 23 + 8 + 3 + 28 = 62 \quad \text{得證！} \\
63^3 = 250047 & \rightarrow 2 + 50 + 0 + 4 + 7 = 63 \quad \text{得證！} \\
71^3 = 357911 & \rightarrow 3 + 57 + 9 + 1 + 1 = 71 \quad \text{得證！} \\
72^3 = 373248 & \rightarrow 37 + 3 + 24 + 8 = 72 \quad \text{得證！} \\
81^3 = 531441 & \rightarrow 5 + 31 + 44 + 1 = 81 \quad \text{得證！} \\
82^3 = 551368 & \rightarrow 5 + 5 + 1 + 3 + 68 = 82 \quad \text{得證！}
\end{array}$$

2. 在三位數中，二次孿生重圓數有 369 和 370，990 和 991，共 2 對。

$$369^2 = 136161 \quad \rightarrow 1 + 361 + 6 + 1 = 369 \quad \text{得證！}$$

$$370^2 = 136900 \quad \rightarrow 1 + 369 + 0 + 0 = 370 \quad \text{得證！}$$

$$990^2 = 980100 \quad \rightarrow 980 + 10 + 0 = 990 \quad \text{得證！}$$

$$991^2 = 982081 \quad \rightarrow 982 + 0 + 8 + 1 = 991 \quad \text{得證！}$$

二位三次孿生重圓數有 <u>27 和 28</u> 、 <u>62 和 63</u> 、 <u>71 和 72</u> 、 <u>81 和 82</u> ，共 4 對
三位二次孿生重圓數有 <u>369 和 370</u> 、 <u>990 和 991</u> ，共 2 對

表 一

〔說明〕不規則性的二次孿生重圓數及三次孿生重圓數共有六對

伍、研究結果

一、1~1000 中，二次重圓數

範圍 重圓數 結果	1-9	10-99	100-1000
	統計結果	1 9 44 45 99	297 703 999 1000

合計	兩個	三個	四個
----	----	----	----

表 二

二、 1~1000 中，三次重圓數

範圍 重圓數 結果	1-9	10-99	100-1000
統計結果	8 9	10,17, 18,26, 27,45,	109, 143, 153, 154, 188, 197, 198, 199, 208, 297
合計	兩個	六個	十個

表三

三、 1~1000 中，四次重圓數

範圍 重圓數 結果	1-9	10-99	100-1000
統計結果	1 7 10	22,25, 28,,36, 45,55, 67,	100, 133, 166, 187, 198, 199, 232, 243, 253, 286, 342, 433
合計	三個	七個	十二個

表四

四、 1~1000 中，二次、三次、四次重圓數

範圍 重圓數 結果	1-9	10-99	100-1000

統計結果	1, 7, 8,9,10	10,17,18, 22,25,26, 27,28,,36, 44,45,67, 99	100, 109, 133, 143, 153, 154, 166, 187, 188, 197, 198, 199, 208, 232, 243, 253, 286, 297, 342, 433, 703, 999,1000
合計	五個	十三個	二十三個

表五

五、 1~1000 中，孿生重圓數

範圍 孿生重圓數 結果	1-9	10-99	100-1000
統計結果	8 和 9 ，	17 和 18 ， 26 和 27	153 和 154 ， 197 和 198 ， 198 和 199
合計	一組	兩組	三組

表六

六、 1~1000 中，二次、三次、四次孿生重圓數有：

次方 重圓數 結果	二次方	三次方	四次方
統計結果	無	8 和 9 ， 17 和 18 ， 26 和 27, 153 和 154 ， 197 和 198 ， 198 和 199	198 和 199
合計	無	六組	一組

表七

陸、 討論與推廣應用

一、 本文探討的重圓數中以 45 出現的次數最多(二次重圓數、三次重圓數、四次重圓數)，因此重圓數 45 值得更進一步的探討。

$$\begin{aligned}
45^1 &= 45 \\
45^2 &= 20, 25 \quad \text{由左向右拆成 20 及 25，再相加。} \\
&\longrightarrow 20 + 25 = 45 \\
45^3 &= 9, 11, 25 \longrightarrow 9 + 11 + 25 = 45 \\
45^4 &= 4, 10, 06, 25 \longrightarrow 4 + 10 + 6 + 25 = 45 \\
45^5 &= 1, 84, 52, 81, 25 \\
&\longrightarrow 1 + 84 + 52 + 81 + 25 = 243, \quad 2 + 43 = 45 \\
45^6 &= 83, 03, 76, 56, 25 \\
&\longrightarrow 83 + 03 + 76 + 56 + 25 = 243, \quad 2 + 43 = 45 \\
45^7 &= 37, 36, 69, 45, 31, 25 \\
&\longrightarrow 37 + 36 + 69 + 45 + 31 + 25 = 243, \quad 2 + 43 = 45 \\
45^8 & \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}$$

如果不分數字相加的規則性，那麼由以上的算式得知，45 是二次重圓數，也是三次重圓數、四次重圓數、五次重圓數、六次重圓數、七次重圓數…無窮次重圓數。

二、重圓數 55 出現兩次，如果不分數字相加的規則性，55 也具有無窮次重圓的性質

三、由表二、表三、表四得知，自然數的範圍取的愈大，所得到的規則性重圓數愈多。

四、由表二、表三、表四得知，次方的次數取的愈高，所得到的規則性重圓數愈多。

五、由表三，在規則性的三次重圓數中，我們發現了一組連續的孿生重圓數(197、198、199 三個重圓數連在一起)。由表一及表三，若不考慮規則性，我們還發現另一組連續的孿生重圓數(26、27、28 三個重圓數連在一起)。

六、由表六得知，在規則性的孿生重圓數中，自然數的範圍取的愈大，所得到的規則性孿生重圓數愈多。

七、由表七得知，二位自然數中無二次孿生重圓數

八、由表七得知，次方的次數為三次方時，所得到的規則性孿生重圓數最多組(六組)。

九、本文的自然數範圍取 1~1000 做探討研究，它日也可以取 1~2000 或更大的範圍，再比較 1~1000 和 1~2000 之間是否有共通性，以及重圓數之間的距離是否拉近。

十、本文取一次方、二次方、三次方、四次方做探討研究，它日也可以取到五次方、六次方或更大，之後再比較自然數的範圍、重圓數、孿生重圓數與規則性的相互關係，做更深、更廣的研究。

柒、 結論與心得

一、本文探討的項目共有：自然數的範圍、次方、重圓數、孿生重圓數、與規則性。

二、尋找重圓數的方法有三個：操作電算器找出重圓數、利用代數方法與運用 Excel 套裝軟體找出重圓數。

三、操作電算器找出重圓數這個方法曠日費時、易有遺漏。利用代數方法尋找重圓數這個方法只適合找到二次重圓數，再高次一些的重圓數，若沿用代數方法尋找，就會顯得很笨拙。運用 Excel 套裝軟體找出重圓數這個方法迅速又準確好用。

四、在這次的研究中，利用試算表來代替人工，進行繁雜但是有規律的計算，可以學習到數學與電腦的統整應用；雖然電腦是一個很好的運用工具，但最後一定還要經過自己用筆親自計算，驗證答案，讓我們不僅學習到次方的觀念，也可以在這個驗證的過程中加強計算與心算能力。

五、這次研究，透過大家分工合作，來探討重圓數與孿生重圓數，讓我們認識到自然數的趣味及美妙之處，並因而拓展了想像力；在此要感謝老師以及所有同學的幫忙，讓我們尋找出更多的重圓數與孿生重圓數，進而認識到掌握不同數學工具的重要性。希望以後長大之後，我們還能發現更多、更好用的方法，來探討研究重圓數與孿生重圓數，做更大、更深、更廣的研究。最後，希望各位評審老師給予我們指教。

捌、 參考資料

- 一、數學課本康軒版第九冊(五上)第七單元「體積」。
- 二、數學課本康軒版第十冊(五下)第五單元「圖形的面積」。
- 三、張贊 論孿生重圓數 香港數學教育學會刊物
- 四、中村義作 數學謎題・20 種解法 益智工房。

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國小組 數學科

最佳創意獎

080412

破鏡重圓

高雄縣鳳山市南成國民小學

評語：

研究主題富趣味性，研究目的清晰，亦能細心觀察與檢驗。唯對於某些公式之應用，內涵宜更深入理解，並多一些創意。