

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

080407

神奇線條魔法秀

南投縣水里鄉水里國民小學

作者姓名：

小六 吳佳家 小六 黃蕙婷 小六 陳逸恩

指導老師：

謝慶暉

神奇線條魔法秀

壹、研究動機

去年，我們以《女生來做數學》一書中的拓荒遊戲分析致勝的關鍵；今年，老師又教大家研究另一個題目－線條遊戲，當線條數目一樣時，會有各種的選擇方式；當線條數目不一樣，會有不同的輸贏結果。要如何從繁雜的過程中找到相同點呢？先下手為強？還是禮讓對方呢？這些疑問引起大家熱烈地討論，決定要再次攜手合作進行這項任務。

貳、研究目的

- 一、分析遊戲的所有情形，比較雙方的優勢。
- 二、歸納遊戲的共同現象，探討致勝的策略。
- 三、統整遊戲的各種結果，呈現有趣的變化。

參、研究設備

紙、筆。

肆、研究過程

一、遊戲方法說明：

〈一〉畫數條並列的線。(如圖 a)



〈二〉每位玩家輪流畫掉兩條相鄰的線條。(如圖 b)



〈三〉畫掉最後一條線的人獲勝。

〈四〉遊戲結束時，通常會留下一些落單的線條。(如圖 c)



二、小組求證試驗：

〈一〉以各種不同數的線條呈現遊戲。

〈二〉每一種情況都要玩，判斷先玩或後玩誰會獲勝。

〈三〉以 2~13 條線條為說明範圍。

三、問題一：當線條數目一樣時，落單的線條有幾條？

〈一〉當線條數是 2，只有一種畫法，落單數是 0。

〈二〉當線條數是 3。

1.從左側第 1 條線開始畫記，落單數是 1。

2.從左側第 2 條線開始畫記，落單數是 1。

〈三〉當線條數是 4。

1.從左側第 1 條線開始畫記，落單數是 0，畫記沒有中斷。

2.從左側第 2 條線開始畫記，落單數是 2。

3.因此，落單數是 0 或 2。

〈四〉當線條數是 5。

1.從左側第 1 條線開始畫記，落單數是 1，畫記可以沒有中斷或中斷 1 次。

2.從左側第 2 條線開始畫記，落單數是 1，畫記沒有中斷。

3.因此，落單數是 1，畫記可以連續或是中斷。

〈五〉我們以同樣方式分析線條數是 10。

1.從左側第 1 條線開始畫記，以連續畫記到中斷 1 次、2 次、3 次……。

中斷數	0	1	2	只能中斷 2 次
落單數	0	2	2	

2.從左側第 2 條線開始畫記，以連續畫記到中斷 1 次、2 次、3 次……。

中斷數	0	1	2	只能中斷 2 次
落單數	2	2	4	

3.中斷數只有 2 次，落單數可能是 0、2、4（都相差 2）。

〈六〉我們將線條數 2~13 的各種情形分析之後，作成了記錄。

線條數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
落單數	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
落單數			2		2	3	2	3	2	3	2	3
落單數									4		4	5

〈七〉依據上述的排列可以發現：

- 1.各種線條數因為畫記方式與中斷次數的關係而產生不同的落單數。
- 2.除了線條數 2、3、5 三個只有一種落單數以外，其他的線條數都不只一種落單數。線條數越多，落單數也會越多。
- 3.線條數是奇數時，落單數從最少的 1 到最多，每個數都相差 2。
- 4.線條數是偶數時，落單數從最少的 0 到最多，每個數都相差 2。

四、問題二：當線條數目一樣時，落單的線條最少有幾條？

〈一〉我們先列出每種線條數的最少落單數。

線條數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
最少落單數	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

〈二〉當線條數目是奇數時，最少落單的線條數目是 1。

〈三〉當線條數目是偶數時，最少落單的線條數目是 0。

五、問題三：當線條數目一樣時，落單的線條最多有幾條？

〈一〉我們先列出每種線條數的最多落單數。

線條數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
最多落單數	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5

〈二〉從這些數字，可能看不出線條數與落單數的關聯性；但是，落單數似乎有規律性。

〈三〉我們將每三個歸納為一組時，第二組的第一個剛好與第一組的第二個數字一樣，第二組的第二個剛好與第一組的第三個數字一樣，至於第二組的第三個數字，只要將前一個數字加 1。

〈四〉因此，我們可以依此原則往下推論。經過實際的驗證，與推論相符。

線條數	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
最多落單數	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9

〈五〉爲了找出定律，我們又意外發現有趣的數字排列。

線條數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
最多落單數	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
與中間落單數的差值	-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1	-1	0	+1
線條數與落單數相差	2	2	2	4	4	4	6	6	6	8	8	8
倍數	1倍			2倍			3倍			4倍		

- 1.每一組的線條數中間值都是3的倍數(3、6、9、12)。
- 2.每一個落單數與中間落單數的差值呈現-1、0、+1的排列。
- 3.每一組線條數與落單數的相差數都是相同的，並且依序都是以2的倍數增長。

〈六〉依據上述的排列，我們歸納出最多落單線條的定律。

- 1.當線條數除以3，餘數是0時(剛好)，最多落單數=線條數÷3。
- 2.當線條數除以3，餘數是1時(多1)，最多落單數=(線條數-1)÷3+1。
- 3.當線條數除以3，餘數是2時(少1)，最多落單數=(線條數+1)÷3-1。

六、問題四：如何算出最多中斷次數？

〈一〉依照問題一的分析方式，我們將各種線條的最多中斷次數記錄如下，找出他們的關聯性。

線條數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
最多中斷數	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3

〈二〉運用問題三的歸納方法

- 1.當線條數除以3，餘數是0時(剛好)，最多中斷數=線條數÷3-1
- 2.當線條數除以3，餘數是1時(多1)，最多中斷數=(線條數-1)÷3-1
- 3.當線條數除以3，餘數是2時(少1)，最多中斷數=(線條數+1)÷3-1

七、問題五：當結果是最少落單數時，誰是贏家？

〈一〉從問題二的分析中，線條數目是奇數時，最少落單的線條數目是1，當線條數目是偶數時，最少落單的線條數目是0。

線條數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
最少落單數	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
雙方畫掉的線條數	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12
畫掉的總次數	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6

〈二〉由畫掉的總次數，我們可以得知誰是贏家。

- 1.當畫掉的總次數是奇數時，表示最後畫線條的是先玩者。
- 2.當畫掉的總次數是偶數時，表示最後畫線條的是後玩者。
- 3.因此當結果是最少落單數時，每種線條遊戲的贏家如下：

線條數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
贏家	先	先	後	後	先	先	後	後	先	先	後	後

〈三〉判斷法則

- 1.贏家是每 2 個就輪換一次。
- 2.線條數除以 2，所得的商剛好是畫掉的總次數。
- 3.商是奇數時，贏家就是先玩者；商是偶數時，贏家就是後玩者。

八、問題六：當結果是最多落單數時，誰是贏家？

〈一〉線條數與落單數相差值就是雙方畫掉的線條數。

線條數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
最多落單數	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	5
雙方畫掉的線條數	2	2	2	4	4	4	6	6	6	8	8	8
畫掉的總次數	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4

〈二〉判斷畫掉的總次數是奇數或偶數就可以得知誰是贏家。

線條數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
贏家	先	先	先	後	後	後	先	先	先	後	後	後

〈三〉判斷法則

- 1.當線條數除以 3，餘數是 0 時（剛好）， $\text{線條數} \div 3$
- 2.當線條數除以 3，餘數是 1 時（多 1）， $(\text{線條數} - 1) \div 3$
- 3.當線條數除以 3，餘數是 2 時（少 1）， $(\text{線條數} + 1) \div 3$
- 4.最後，我們再以商是奇數或偶數分辨誰是贏家。

九、問題七：線條數、最少落單數、最多落單數有沒有三角關係？

〈一〉我們發現有些線條數最少與最多的落單時的贏家都是同一位。

線條數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
最少落單數時的贏家	先	先	後	後	先	先	後	後	先	先	後	後
最多落單數時的贏家	先	先	先	後	後	後	先	先	先	後	後	後
同一位贏家	○	○	×	○	×	×	×	×	○	×	○	○

〈二〉從上表很難找出規律性，於是我們將先後玩家做了區分，發現了其中的現象。

贏家是先玩者	2	3	10	14	15	22	26	27	34	38	39	46
前後差		1	7	4	1	7	4	1	7	4	1	7
贏家是後玩者	5	12	13	17	24	25	29	36	37	41	48	49
前後差		7	1	4	7	1	4	7	1	4	7	1

- 1.當最少與最多的落單贏家都是先玩者，線條數差值出現 1、7、4、1、7、4、... 有規律的循環。
- 2.當最少與最多的落單贏家都是後玩者，線條數差值出現 7、1、4、7、1、4、... 有規律的循環。
- 3.將每三個線條數歸為一組，第二組的第一個與第一組的第一個、第二組的第二個與第一組的第二個、第二組的第三個與第一組的第三個線條數相差 12。

十、問題八：先下手為強？禮讓給對方？

〈一〉利用線條數與落單數的關係，我們將各種輸贏分析如下：

線條數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
落單數	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
贏家	先	先	後	後	先	先	後	後	先	先	後	後
落單數			2		2	3	2	3	2	3	2	3
贏家			先		後	後	先	先	後	後	先	先
落單數									4		4	5
贏家									先		後	後

〈二〉從分析表可以知道同一線條遊戲，落單數不同，贏家就不同。

〈三〉例外情形：

- 1.當線條數是 2 時，有 1 種畫法，必須選擇先玩。
- 2.當線條數是 3 時，有 2 種畫法，都是先玩的贏。
- 3.當線條數是 5 時，有 6 種畫法，都是後玩的贏。

〈四〉致勝的訣竅：先以線條數判斷自己是不是最少落單數時的贏家。

- 1.如果是，在畫記時避免出現中斷、落單的情形。
- 2.如果不是，在畫記時盡量製造中斷、落單的情形。

伍、討論

- 一、我們曾經試圖找出每種線條遊戲先玩與後玩的組合情形，但是當線條越多時就會產生更多的選擇性。
- 二、有些線條遊戲輸贏的次數相差懸殊，如：線條數 7 條，先後贏的次數比是 24：2，但是如果先玩者不熟悉策略，後玩者就能贏得勝利。
- 三、如果遊戲改成畫掉三連線、四連線，輸贏狀況及攻守策略會是如何呢？這個問題就留待以後再做深入研討。

陸、研究結論

- 一、當線條數目一樣時，落單的線條因為畫記方式與中斷次數的關係而不同。
 - 〈一〉除了線條數 2、3、5 只有一種落單數以外，其他線條數從最少到最多，落單數都相差 2
 - 〈二〉線條數是奇數時，落單數從最少的 1 到最多，每個數都相差 2
 - 〈三〉線條數是偶數時，落單數從最少的 0 到最多，每個數都相差 2
- 二、最少落單線條的定律：
 - 〈一〉當線條數目是奇數時，最少落單的線條數目是 1。
 - 〈二〉當線條數目是偶數時，最少落單的線條數目是 0。
- 三、最多落單線條的定律：
 - 〈一〉當線條數除以 3，餘數是 0 時，最多落單數 = 線條數 \div 3
 - 〈二〉當線條數除以 3，餘數是 1 時，最多落單數 = (線條數 - 1) \div 3 + 1
 - 〈三〉當線條數除以 3，餘數是 2 時，最多落單數 = (線條數 + 1) \div 3 - 1
- 四、最多中斷次數：
 - 〈一〉當線條數除以 3，餘數是 0 時（剛好），最多中斷數 = 線條數 \div 3 - 1
 - 〈二〉當線條數除以 3，餘數是 1 時（多 1），最多中斷數 = (線條數 - 1) \div 3 - 1
 - 〈三〉當線條數除以 3，餘數是 2 時（少 1），最多中斷數 = (線條數 + 1) \div 3 - 1
- 五、當結果是最少落單數時的贏家，線條數除以 2，再以商是奇數或偶數分辨。
- 六、當結果是最多落單數時的贏家：
 - 〈一〉當線條數除以 3，餘數是 0 時（剛好），線條數 \div 3
 - 〈二〉當線條數除以 3，餘數是 1 時（多 1），(線條數 - 1) \div 3
 - 〈三〉當線條數除以 3，餘數是 2 時（少 1），(線條數 + 1) \div 3
 - 〈四〉最後，我們再以商是奇數或偶數分辨誰是贏家。
- 七、線條數、最少落單數、最多落單數的三角關係：
 - 〈一〉當最少與最多的落單贏家都是先玩者，線條數差值出現 1、7、4 有規律的循環。
 - 〈二〉當最少與最多的落單贏家都是後玩者，線條數差值出現 7、1、4 有規律的循環。
 - 〈三〉每組中的三個數與前後組中的三個數都相差 12。
- 八、先下手為強或禮讓給對方，各有千秋。
 - 〈一〉落單數不同，贏家就不同。
 - 〈二〉當線條數是 2、3、5 時，呈現一面倒的情形。
 - 〈三〉如果是最少落單數時的贏家，在畫記時避免出現中斷以及落單的情形；如果不是，盡量製造中斷、落單的情形。

柒、參考資料

- 一、Diane Downie, Twila Slesnick, Jean Kerr Stenmark 著 梁崇惠、楊翠勤合譯 女生來做數學 初版 台北 聯經 107 頁 1999 年
- 二、陳文章 中華民國中小學科學展覽第 26-30 屆優勝作品專輯 國小組 數學科 合訂本 國立台灣科學教育館編印 307 頁 88 年

中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
評 語

國小組 數學科

080407

神奇線條魔法秀

南投縣水里鄉水里國民小學

評語：

本作品主題在探討線條魔法秀遊戲的致勝策略。與國小教材具一定程度的相關性，對小學生具啟發性。但數學基礎較為欠缺，較為可惜。