中華民國第四十五屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組 數學科

第二名

080405

魔數繞圈圈--從卡布列克序列出發

桃園縣桃園市桃園國民小學

作者姓名：
小四 盧璟誼 小四 黃昱翔 小四 徐紹宸
小四 孫浩軒

指導老師：
許玉玲 楊麗玲

中華民國第 四十五 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：魔數繞圈圈

　　　　　—從卡布列克序列出發

關 鍵 詞：卡布列克序列、整數四則及分解、繞圈圈魔數

編　　號：

第四十五屆中小學科學展覽數學科

魔數繞圈圈

—從卡布列克序列出發

目錄

壹、研究動機

我們在一本小牛頓雜誌中，看到了有關卡布列克運算的有趣報導，其中提到了隨便選一個二位數，將它的十位數字和個位數字對調，得到一個新數，在比較這兩個數的大小之後，再以大數減去小數，所得的差一定會落在 09/90、18/81、36/63、27/72、45/54 五組數之中，而且這五組數會一直繞圈圈。學校數學課剛好提到整數的四則運算及分解，幾個好朋友決定一起利用學校所學到的數學及電腦課程知識來試試看。結果真有趣！

與教材相關性如下：

一、　第八冊第一單元整數的乘法

二、　第八冊第六單元整數的除法

三、　第八冊第八單元整數四則應用

四、　第七冊第一單元十萬以內的數

五、　第七冊第二單元乘法

六、　第七冊第六單元除法

貳、研究目的

我們雖然從卡布列克運算出發，但是卻使用了不同的運算規則，我們直接使用原數與「顛倒數」(將原數的高位數與低位數位置直接交換，並不按照各數字間的大小排列)的差來運算，希望達成下面幾個目標：

一、　證明二位數卡布列克序列的存在，及卡布列克序列的順序規則。

二、　從二位數推演到三位數、四位數、五位數，甚至於更多位數都能找到「繞圈圈魔數」。

三、　能發現更多有趣的結果，是別人沒發現的。

參、研究方法

老師希望我們將有【興趣】的現象，當作【問題】，先蒐集資料，再一起【討論】，同時可以先猜猜看爲什麼會這樣，【假設】一些可能的結果，然後再利用【實際操作】，也可利用電腦幫忙，來【驗證結果】是否正確。

肆、名詞解釋

一、　數的分解

一個二位數可以分成十位數和個位數，所以這個數的大小就是十位數字乘以１０加上個位數字乘以１，例如：１２＝１×１０＋２×１。

二、　顛倒數

　　如果將一個數的每個位數前後順序顛倒，也就是將最高位數變成個位數，個位數變成最高位數；次高位數變成十位數，十位數變成次高位數；依此類推…我們會得到一個新數，這個數我們簡稱它為「顛倒數」。例如：１２３→３２１，８６９→９６８。

三、　利用文字符號代替數字符號

　　我們為了能將討論結果一般化，利用文字符號代替數字符號，這樣就可以說明所有的情形。例如：一個二位數ａｂ＝ａ╳１０＋ｂ╳１。

伍、研究過程與內容

我們依照問題→討論→假設→實作→結果的研究步驟，逐步揭開卡布列克序列神秘的面紗，也發現更多有趣的結果，分別記錄如下：

一、　二位數卡布列克序列的深入研究

（一）　問題一：

每一個二位數經過運算都可以成爲卡布列克序列的循環嗎？

《實作》

我們分別去計算這９０個數，二位數的減法太簡單了，我們將每一個數放到卡布列克序列的五組數中。（實際計算過程詳見每一位同學的筆記）

例如：我們選一個二位數３５，他的顛倒數是５３，再計算５３－３５＝１８，所以３５和５３可以歸類到１８／８１這一組中。

- 09／90：01、10、12、21、23、32、34、43、45、54、56、65、67、76、78、87、89、98。
- 18／81：02、20、13、31、24、42、35、53、46、64、57、75、68、86、79、97、90、09。
- 27／72：03、30、14、41、25、52、36、63、47、74、58、85、69、96、80、08、91、19。
- 36／63：04、40、15、51、26、62、37、73、48、84、59、95、70、07、81、18、92、29。
- 45／54：05、50、16、61、27、72、38、83、49、94、60、06、71、17、82、28、93、39。

每一組中含有已經是卡布列克序列的數，我們利用粉紅色網底加底線將他標示出來。

我們也可以利用試算表產生一個自動化的表單，來計算這些數，首先我們隨便輸入一個二位數，再利用除法取整數（只算到整數部分）的方法，幫我們分解這個二位數，再利用數的分解，顛倒這兩個數字，十位數字變成個位數字，各位數字變成十位數字，得到這個新數，再利用函數 IF，去判斷這兩個數的大小，產生大數減小數的差，再利用複製功能，就可以輕鬆得到這個自動化的表單。我們使用的方法如下：

	原數	十位數字	個位數字	交換新數	兩數的差
位置	a1	a2	a3	a4	a5
公式	數字	=Int(a1／10)	=a1-a2*10	=a3*10+a2*1	If(a1>a4,a1-a4,a4-a1)
範例一	12	1	2	21	9
範例二	58	5	8	85	27

《結果》

1、　每一個二位數果然都可以成爲卡布列克序列。

2、　這九十個數剛好平均分成五組，連同卡布列克序列本身的五組數（10 個數），每一組剛好有 18 個數。

3、　每一組裡面都含有一個其他組的數。

4、　利用試算表可以幫助我們計算更複雜，或位數更高的情形。

（二）　問題二：

這些可以成爲卡布列克序列的二位數有規則嗎？

《實作》

我們從 01 排到 99，發現了一個有趣的現象。這些數在計算的結果呈現對稱性、週而復始的現象，如下表：

原數	新數	差
01	**10**	**09**
02	**20**	**18**
03	**30**	**27**
04	**40**	**36**
05	**50**	**45**
06	**60**	**54**
07	**70**	**63**
08	**80**	**72**
09	**90**	**81**
10	**01**	**09**
11	**11**	**00**
12	**21**	**09**
13	**31**	**18**
14	**41**	**27**
15	**51**	**36**
16	**61**	**45**
17	**71**	**54**
18	**81**	**63**

由上面表格觀察，可了解有週而復始的現象。

50	05	45
51	15	36
52	25	27
53	35	18
54	45	09
55	55	00
56	65	09
57	75	18
58	85	27
59	95	36
60	06	54

由上面表格觀察，可以了解有對稱的情形。

88	88	0
89	98	9
90	9	81
91	19	72
92	29	63
93	39	54
94	49	45
95	59	36
96	69	27
97	79	18
98	89	9
99	99	0

由上面表格觀察，是另一種對稱的情形。

《結果》

我們發現了下列規則且有趣的結果：

１、　以１１、２２、３３、４４、５５、６６、７７、８８、９９爲中心：

- 相鄰的數，就是將中心各數加一或減一，如１２、２３、３４、４５、５６、６７、７８、８９，和１０、２１、３２、４３、５４、６５、７６、８７、９８都屬於０９／９０這一組。
- 如果將中心各數加二或減二，如１３、２４、‧‧‧‧、７９、９０，和０９、２０、‧‧‧‧、８６、９７都屬於１８／８１這一組。
- 如果將中心各數加三或減三，如１４、２５、‧‧‧‧、８０、９１，

和０８、１９、．．．．、８５、９６都屬於２７／７２這一組。

- 如果將中心各數加四或減四，如１５、２６、．．．．、８１、９２，和０７、１８、．．．．、８４、９５都屬於３６／６３這一組。
- 如果將中心各數加五或減五，如１６、２７、．．．．、８２、９３，和０６、１７、．．．．、８３、９４都屬於４５／５４這一組。

２、　用十位數字和個位數字的差來分析：

- 兩數差１：屬於０９／９０這一組。
- 兩數差２、９：屬於１８／８１這一組。
- 兩數差３、８：屬於２７／７２這一組。
- 兩數差４、７：屬於３６／６３這一組。
- 兩數差５、６：屬於４５／５４這一組。

３、　用圖形來表示：如附圖一。

（三）　問題三：

卡布列克序列這五組循環的數有規則（一定的順序／一定的倍數）嗎？

《實作》

- 09／90：01、10、12、21、23、32、34、43、45、54、56、65、67、76、78、87、89、98。
- 18／81：02、20、13、31、24、42、35、53、46、64、57、75、68、86、79、97、90、09。
- 27／72：03、30、14、41、25、52、36、63、47、74、58、85、69、96、80、08、91、19。
- 36／63：04、40、15、51、26、62、37、73、48、84、59、95、70、07、81、18、92、29。
- 45／54：05、50、16、61、27、72、38、83、49、94、60、06、71、17、82、28、93、39。

從上面我們可以輕鬆的從０９／９０開始，找到另一組含有90、09，就是１８／８１，這組所以０９／９０的下一組就是１８／８１。再從１８／８１出發，尋找哪一組有含81、18，找到３６／６３這一組，一直下去，就會得到如下的結果：

從０９／９０90、09→１８／８１（81、18）→３６／６３（36、63）→２７／７２（27、72）→４５／５４（45、54）。

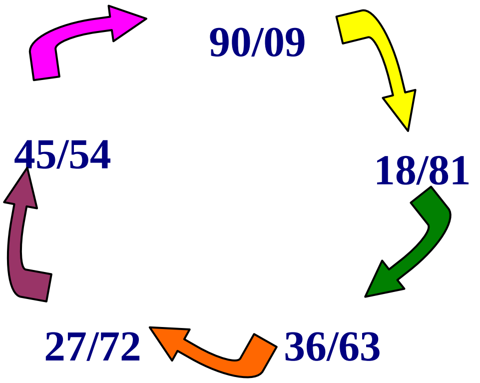
另外，我們也發現０９／９０、１８／８１、３６／６３、２７／７２、４５／５４這十個數都是９的倍數：０９＝9╳1，９０＝9╳1０，１８＝9╳2，８１＝9╳9，２７＝9╳3，７２＝9╳8，３６＝9╳4，６３＝9╳

７，４５＝９×５，５４＝９×６。

每一組合起來都是９的 １１ 倍（加起來都是９９），而且０９／９０兩數相差 9 個（０９＝９×１，９０＝９×１０），可以得到９×９＝８１，所以下一組一定是１８／８１，同樣的這兩數相差７個９，可以得到９×７＝６３，所以下一組一定是３６／６３，同樣的這兩數相差３個９，可以得到９×３＝２７，所以下一組一定是 ２７／７２，同樣的這兩數相差５個９，可以得到９×５＝４５，所以下一組一定是４５／５４，同樣的這兩數相差１個９，可以得到９×１＝０９，所以下一組一定是０９／９０，這時就發現已經繞回去前一組，如右圖。

《結果》

我們利用不同的想法找到卡布列克序列的順序，一定是 90、09→18／81（81、18）→36／63（36、63）→27／72（27、72）→45／54（45、54）。



（四）　問題四：

從規則中是不是可以證明卡布列克序列的存在？

《實作》

老師告訴我們，可以利用文字符號來代替數字系統，如此，在說明的時候，就不需要特別找一個數來說明，而是利用一個式子，就可以說明所有數的情形了。

這裡，我們用ａｂ來代替任一個二位數，那麼利用數的分解，我們可以知道，ａｂ的大小就是ａ×１０＋ｂ，那他的顛倒數是ｂａ，ｂａ的大小是ｂ×１０＋ａ，我們計算如下：

我們先假設一個二位數ａｂ＞ｂａ（顛倒數），那麼ａ＞ｂ

ａｂ－ｂａ＝〔ａ×１０＋ ｂ〕－ 〔ｂ×１０＋ ａ〕

＝（ａ－ｂ）×１０＋（ｂ－ａ）（ｂ＜ａ怎麼減？）

因為ｂ＜ａ，所以ｂ－ａ就不能減，但是在減法中，我們知道那是不夠的意思，我們用「欠多少」來表示。

＝（ａ－ｂ）×１０＋欠一個（ａ－ｂ）

=（ａ－ｂ）×９（１０個欠一個就是９個）

因為ａ＞ｂ

所以ａ－ｂ就可能等於１、２、３、４、５、６、７、８、９。

《結果》

我們已經證明任一個二位數與其顛倒數，利用大數減小數，其差就一定會是９的倍數，也就是卡布列克序列的產生原因了。

（五）　問題五：

卡布列克序列有沒有「有趣」的結果或是「漂亮」的圖形？

《實作》

有人提議利用以１１、２２、３３、４４、５５、６６、７７、８８、９９為中心，因為前面曾經發現結果是以這些數為中心的，所以我們將 99 個數放在一個１０×１０的一個長方形表格中，再將前面的顏色塗上去，結果如下頁的圖形：（利用數的分解，將九十九個數展開，橫軸代表個位數，縱軸代表十位數，每一個格子就是縱軸乘以１０加上橫軸乘以１）

屬於同一組繞圈圈魔數的數，塗上相同的顏色

個位數 十位數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

《結果》

我們找到一個有趣的圖形，像彩虹一樣，而且有對稱性。

二、　從卡布列克序列出發－三位數的繞圈圈魔數

卡布列克運算發展到三位數的時候，變成一固定的數 495，就再也沒有卡布列克序列了，我們決定從二位數卡布列克序列出發，改寫卡布列克運算的規則，直接給一個任意的三位數，再將它的百位與個位交換，就形成了一個三位數的顛倒數。再將這兩個數比較大小，用大數減小數。我們決定觀察是不是可以像二位數一樣，找到一些有趣的結果。

（一）　問題一：

利用二位數的經驗，我們先排除的情形（數）有哪些？

《實作》

從１００開始算，排除１１１、２２２、３３３……。１０１－１０１＝０，所以１０１也需要排除。發現１０１、１２１、……，也需要排除，原來因為三位數的位數是奇數，交換的時候只有個位和百位交換，十位其實都沒有動，所以如果發生個位和百位相同的數，交換後也相同。

如果個位數是１，百位數也是１，那麼十位數可以是０、１、２、３、４、５、６、７、８、９，共１０個。

依此類推，個位和百位都是２，個位和百位都是３，・・・，個位和百位都是９，所以總共排除９０個。

但是如果一個三位數，其個位數字為０，其顛倒數會變成一個二位數，如果一個三位數，其個位數字和十位數字皆為０，其顛倒數會變成一位數，所以又要加回９９個數，但是這其中還要排除０１０、０２０、０３０、０４０、０５０、０６０、０７０、０８０、０９０等九個與交換結果相等的數，所以再加回９０個數。

《結果》

因此在三位顛倒數的觀察中，我們必須觀察９９９（００１～９９９）－９９（０１～９９）－９０（個位百位相同）＋９０（顛倒數是二位數）＝９００個數。

（二）　問題二：

所有的結果和二位數的情形一樣嗎？

- 每一個三位數經過運算都可以成為「繞圈圈魔數」嗎？
- 這些可以成為「繞圈圈魔數」的三位數有規則嗎？
- 「繞圈圈魔數」這幾組循環的數有規則（一定的順序／一定的倍數）嗎？
- 從規則中是不是可以證明「繞圈圈魔數」的存在？
- 「繞圈圈魔數」有沒有「有趣」的結果或是「漂亮」的圖形？

《實作》

我們同樣利用利用試算表來幫助我們：

	原數	百位數字	十位數字	個位數字	顛倒數	兩數的差
位置	a1	a2	a3	a4	a5	a6
公式	數字	=Int(a1／100)	=Int(a1／10)-a2*10	=a1-a2*100-a3*10	=a4*100+a3*10+a2	If(a1>a5,a1-a5,a5-a1)
範例一	312	3	1	2	213	99
範例二	158	1	5	8	851	693

將所有的９００個數分別代入上述的試算表，結果(差)一樣出現循環現象，將此９００個數分類如下：

- ０９９／９９０：個位數和百位數相差１，例如：354、908・・・。
- １９８／８９１：個位數和百位數相差２或９，例如：355、608・・・。
- ２９７／７９２：個位數和百位數相差３或８，例如：356、508・・・。
- ３９６／６９３：個位數和百位數相差４或７，例如：357、408・・・。
- ４９５／５９４：個位數和百位數相差５或６，例如：358、308・・・。

觀察，所有的結果，和二位數一樣是十組，而且具備對稱性，如下圖：

９９×０１＝０９９
９９×０２＝１９８
９９×０３＝２９７
９９×０４＝３９６
９９×０５＝４９５
９９×０６＝５９４
９９×０７＝６９３
９９×０８＝７９２
９９×０９＝８９１
９９×１０＝９９０

我們也可以利用二位數的證明方式，來驗證三位數的情形：

我們先假設ａｂｃ＞ｃｂａ，所以　ａ＞ｃ

ａｂｃ＝ａ×１００＋ｂ×１０＋ｃ×１

ｃｂａ＝ｃ╳１００＋ｂ╳１０＋ａ╳１

ａｂｃ－ｃｂａ

＝（ａ－ｃ）╳１００＋（ｂ－ｂ）╳１０＋（ｃ－ａ）╳１

＝（ａ－ｃ）╳１００＋（０）╳１０＋欠１個（ｃ－ａ）

＝（ａ－ｃ）╳９９

ａ－ｃ可能是１、２、３、４、５、６、７、８、９，所以所有的三位數與其顛倒數的差就一定是９９的倍數。

每一組合起來都是 ９９ 的 １１ 倍，而且０９９／９９０ 兩數相差９個９９（０９９＝９９╳１，９９０＝９９╳１０），可以得到 ９９╳９＝８９１ ，所以下一組一定是 １９８／８９１，同樣的這兩數相差７個９９，可以得到９９╳７＝６９３ ，所以下一組一定是３９６／６９３，同樣的這兩數相差３個９９，可以得到９９╳３＝２９７，所以下一組一定是２９７／７９２，同樣的這兩數相差５個９９，可以得到９９╳５＝４９５，所以下一組一定是４９５／５９４，同樣的這兩數相差１個９９，可以得到９９╳１＝０９９，所以下一組一定是０９９／９９０，這時就發現已經繞回到前一組。

我們也將這９９０個數放在一起，也可以形成一個漂亮的圖形，只是需要利用一點技巧，不然在一個十乘以十的表格中是無法放進這９９０個數的，首先我們將十位數以ａ來代替，只以個位數及百位數的變化來看，得到下面的圖形：

個位數 百位數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0a0	0a1	0a2	0a3	0a4	0a5	0a6	0a7	0a8	0a9
1	1a0	1a1	1a2	1a3	1a4	1a5	1a6	1a7	1a8	1a9
2	2a0	2a1	2a2	2a3	2a4	2a5	2a6	2a7	2a8	2a9
3	3a0	3a1	3a2	3a3	3a4	3a5	3a6	3a7	3a8	3a9
4	4a0	4a1	4a2	4a3	4a4	4a5	4a6	4a7	4a8	4a9
5	5a0	5a1	5a2	5a3	5a4	5a5	5a6	5a7	5a8	5a9
6	6a0	6a1	6a2	6a3	6a4	6a5	6a6	6a7	6a8	6a9
7	7a0	7a1	7a2	7a3	7a4	7a5	7a6	7a7	7a8	7a9
8	8a0	8a1	8a2	8a3	8a4	8a5	8a6	8a7	8a8	8a9
9	9a0	9a1	9a2	9a3	9a4	9a5	9a6	9a7	9a8	9a9

竟然和二位數的情形一模一樣，好像一條彩虹喔！

《結果》

我們發現了許多和二位數一樣有趣的結果：

１、發現只要把這些繞圈圈魔數的十位數９去除，就等於二位數的結果。

２、每一個三位數（除了排除的數之外）果然都可以成爲繞圈圈魔數。

３、這９９０個數剛好平均分成５組，連同繞圈圈魔數本身的５組數（１０個數），每一組剛好有１８０個數。

４、每一組裡面都含有一個其他組的數。

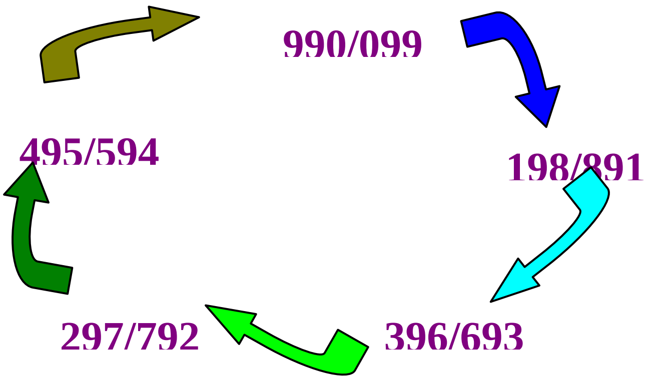
５、我們已經證明任一個三位數與其顛倒數，利用大數減小數，其差就一定會是９９的倍數，也就是繞圈圈魔數產生的原因。

６、我們利用不同的想法找到繞圈圈魔數的順序，一定是０９９／９９０（990、099）→１９８／８９１（891、198）→３９６／６９３（396、693）→２９７／７９２（297、792）→４９５／５９４（495、594）。

７、用百位數字和個位數字的差來分析：

- 兩數差１：屬於０９９／９９０這一組。
- 兩數差２、９：屬於１９８／８９１這一組。
- 兩數差３、８：屬於２９７／７９２這一組。
- 兩數差４、７：屬於３９６／６９３這一組。
- 兩數差５、６：屬於４９５／５９４這一組。

８、　魔數繞圈圈的圖形：三位數也會繞圈圈（詳見附圖二）



三、　尋找多位數「繞圈圈魔數」

我們算完三位數，覺得意猶未盡，想向更高位數挑戰，首先，我們利用試算表製作一個四位數的自動計算表單，四位數從０００１～９９９９共９９９９個數。可是，在四位數中，我們並沒有很明顯看出像二位數及三位數那麼明顯的特徵，甚至於看不出有什麼規則，但是我們還是決定挑戰看看：

（一）　問題一：

四位數有沒有繞圈圈魔數？

《實作》

我們運用試算表來計算，先排除１１１１、２２２２、……等數，原數與「顛倒數」相減後等於０的數。

在四位數的交換過程中，千位與個位交換，百位與十位交換。不像三位數，十位數因交換後還是十位數，只要探討百位數及個位數就可以了，四位數的情形複雜多了。

節錄一段試算表的結果，就可以發現並沒有太大的特徵：

原數	千位數	百位數	十位數	個位數	顛倒數	兩數之差
4800	4	8	0	0	0084	4716
4801	4	8	0	1	1084	3717
4802	4	8	0	2	2084	2718
4803	4	8	0	3	3084	1719
4804	4	8	0	4	4084	720
4805	4	8	0	5	5084	279
4806	4	8	0	6	6084	1278
4807	4	8	0	7	7084	2277
4808	4	8	0	8	8084	3276
4809	4	8	0	9	9084	4275

我們利用文字符號先找出四位數的規則，所以我們仿照三位數做下列的計算：

我們先假設一個任意四位數ａｂｃｄ＞ｄｃｂａ(顛倒數)，所以 ａ≧ｄ（ａ、ｄ可以相等，當ａ＝ｄ，則ｂ＞ｃ）

ａｂｃｄ－ｄｃｂａ

＝（ａ－ｄ）╳１０００＋（ｂ－ｃ）╳１００＋（ｃ－ｂ）╳１０＋（ａ－ｄ）╳１

＝（ａ－ｄ）╳１０００＋（ｂ－ｃ）╳１００＋欠１０個（ｂ－ｃ）＋欠１個（ｄ－ａ）

＝（ａ－ｄ）╳９９９＋（ｂ－ｃ）╳９０

舉個例來說：７６９３其顛倒數為３９６７，(７－３)＝４，(６－９)＝－３，所以７６９３－３９６７＝４╳９９９＋（－３）╳９０＝３７２６

ａ－ｄ（ａ≧ｄ）可能是０、１、２、３、４、５、６、７、８、９，ｂ－ｃ(無法比較大小)可能是０、±１、±２、±３、±４、±５、±６、±７、±８、±９，所以四位數的情況就比較多了，但是應該也有些規則才是。

在老師的幫忙下，我們利用上面推導的公式，將９９９９個數分類成為Ａ╳９９９ ＋Ｂ ╳９０（只有１９０組數），Ａ就是ａ－ｄ，而Ｂ就是ｂ－ｃ，做了一個表格，反覆的操作，最後發現四位數也會發生魔數繞圈圈的情形，只是有好幾組。

這是Ｂ為正值的時候：

B(b-c) A(a-d)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0000	0270	0450	0810	0090	0630	0630	0090	0810	0450
1	2997	6534	2997	0450	0909	0999	0630	0630	0090	0909
2	4995	0270	2178	6363	4995	8991	0090	0630	8181	0999
3	8991	4995	6363	2178	0270	4995	0810	4545	6993	6993
4	0999	0909	0450	2997	6534	2997	2727	8991	0999	6993
5	6993	0090	0810	0450	0270	0000	0270	0450	0810	0090
6	6993	6993	0999	8991	2727	2997	6534	2997	0450	0909
7	0999	6993	6993	4545	0810	4995	0270	2178	6363	4995
8	8991	0999	8181	0630	0090	8991	4995	6363	2178	0270
9	4995	0909	0090	0630	0630	0999	0909	0450	2997	6534

這是Ｂ為負值的時候：（Ａ不可能為零，∵ａ＝ｄ，∴ｂ＞ｃ）

B(b-c) A(a-d)	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
0										
1	2997	2727	8991	0999	6993	6993	4545	0810	4995	0270
2	4995	0810	4545	6993	6993	0999	8991	2727	2997	6534
3	8991	0090	0630	8181	0999	0810	0450	0270	0000	0270
4	0999	0630	0630	0090	909	0450	2997	6534	2997	2727
5	6993	0630	0090	8991	4995	6363	2178	0270	4995	0810
6	6993	4545	0810	4995	270	2178	6363	4995	8991	0090
7	0999	8991	2727	2997	6534	2997	0450	0909	0090	0630
8	8991	0450	0270	0000	0270	0450	0810	0999	8181	0630
9	4995	2997	6534	2997	2727	8991	0999	6993	6993	4545

發現有四組繞圈圈魔數

- ０９９９／９９９０→１９９８／８９９１→３９９６／６９９３→２９９７／７９９２→４９９５／５９９４（９９９的倍數）
- ００９０／０９００→０８１０／０１８０→０６３０／０３６０→０２７０／０７２０→０４５０／０５４０（９０的倍數）
- ０９０９／９０９０→８１８１／１８１８→６３６３／３６３６→２７２７／７２７２→４５４５／５４５４（９０９的倍數）
- ２１７８／８７１２→６５３４／４３５６（２１７８的倍數）

從上面的例子來看，７６９３－３９６７＝４╳９９９＋（－３）╳９０＝３７２６，所以屬於Ａ＝４、Ｂ＝（－３）的這一組，最後的結果一定是粉紅色的繞

圈圈魔數（９０的倍數），經過幾次運算，果然得到繞圈圈魔數：３７２６→２５４７→４９０５→０１８９→９６２１→８３５２→５８１４→１６２９→７６３２→５２６５→$\boxed{0360}$。

《結果》

●我們發現有四個循環不斷的在繞圈圈，雖然與二位數、三位數的圖形不一樣，但是還是有對稱的現象，也有在繞圈圈，只是循環變成了四個。

●我們利用數學的運算式，成功的控制了９９９９個數，使其成爲１９０個型式，如此就變得比較簡單了。

（二）　問題二：

四位數、五位數的循環相同嗎？

《實作》

我們發現一個五位數，中間的百位數，在交換的過程中，也是保持不變的位置，所以只有四個位數有變動，就好像四位數一樣。

我們先假設一個任意的五位數ａｂｃｄｅ＞ｅｄｂｃａ（顛倒數），所以 ａ≧ｅ（ａ、ｅ可以相等，當ａ＝ｅ，則ｂ＞ｄ）

ａｂｃｄｅ－ｅｄｃｂａ

＝（ａ－ｅ）×１００００＋（ｂ－ｄ）×１０００＋（ｃ－ｃ）×１００＋（ｄ－ｂ）×１０＋（ｅ－ａ）×１

＝（ａ－ｅ）×１００００＋（ｂ－ｄ）×１０００＋（０）×１００＋欠（ｂ－ｄ）×１０＋欠（ａ－ｅ）×１

＝（ａ－ｅ）×９９９９ ＋（ｂ－ｄ）×９９０

舉個例來說：７６９３５其顛倒數爲５３９６７，（７－５）＝２，（６－３）＝３，所以７６９３５－５３９６７＝２×９９９９＋３×９９０＝２２９６８

ａ－ｅ（ａ≧ｅ）可能是０、１、２、３、４、５、６、７、８、９，ｂ－ｄ（無法比較大小）可能是０、±１、±２、±３、±４、±５、±６、±７、±８、±９，所以五位數的情況和四位數應該一樣的規則才是。

我們利用上面推導的公式，將９９９９９個數分類成爲Ａ×９９９９ ＋Ｂ×９９０（同樣的，也只有１９０種情形），Ａ就是ａ－ｅ，而Ｂ就是ｂ－ｄ，做了一個表格，反覆的操作，最後發現五位數也會發生魔數繞圈圈的情形。

這是Ｂ爲正值的時候：

B(b-d) A(a-e)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00000	02970	04950	08910	00990	06930	06930	00990	08910	04950
1	29997	65934	29997	04950	09009	09999	06930	06930	00990	09009
2	49995	02970	21978	63063	49995	89991	00990	06930	81081	09999
3	89991	49995	63063	21978	02970	49995	08910	45045	69993	69993
4	09999	09009	04950	29997	65934	29997	27027	89991	09999	69993
5	69993	00990	08910	04950	02970	00000	02970	04950	08910	00990
6	69993	69993	09999	89991	27027	29997	65934	29997	04950	09009
7	09999	69993	69993	45045	08910	49995	02970	21978	63063	49995
8	89991	09999	81081	06930	00990	89991	49995	63063	21978	02970
9	49995	09009	00990	06930	06930	09999	09009	04950	29997	65934

這是 B 為負值的時候：（A 不可能為零，∵ a ＝ e ，∴ b ＞ d ）

B(b-d) A(a-e)	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
0										
1	29997	27027	89991	09999	69993	69993	45045	08910	49995	02970
2	49995	08910	45045	69993	69993	09999	89991	27027	29997	65934
3	89991	00990	06930	81081	09999	08910	04950	02970	00000	02970
4	09999	06930	06930	00990	09009	04950	29997	65934	29997	27027
5	69993	06930	00990	89991	49995	63063	21978	02970	49995	08910
6	69993	45045	08910	49995	02970	21978	63063	49995	89991	00990
7	09999	89991	27027	29997	65934	29997	04950	09009	00990	06930
8	89991	04950	02970	00000	02970	04950	08910	09999	81081	06930
9	49995	29997	65934	29997	27027	89991	09999	69993	69993	45045

《結果》

(1) 和四位數的魔數情形類似：只是中間多了一個數（９或０）：

發現有四組繞圈圈魔數

- 09999／99990→19998／89991→39996／69993→29997／79992→49995／59994（9999 的倍數）
- 00990／09900→08910／01980→06930／03960→02970／07920→04950／05940（990 的倍數）
- 09009／90090→81081／18018→63063／36036→27027／72072→45045／54054（9009 的倍數）
- 21978／87912→65934／43956（21978 的倍數）

(2) 在一般的情形下，二位數及三位數的繞圈圈魔數是９或９９的倍數；在特定的

情形下，四位數的部分魔數是９９９的倍數，而五位數的魔數是９９９９的倍數，我們可以猜測六位數也一定有９９９９９的倍數的繞圈圈魔數，可以依此類推。

(3) 我們可以猜測有下列的情形：二位、三位循環相同，四位、五位循環相同、六位、七位循環相同，a╳２（２，４，６，８）位、a╳２＋１（３，５，７，９）位循環相同。

陸、研究貢獻

我們從卡布列克序列出發，經歷了一場有趣的數學冒險，我們不但完成了研究目的，更獲得更多有趣的結果：

一、　研究成果：

1、　我們利用顛倒數的差，找到二位數、三位數、四位數、五位數「繞圈圈魔數」。

2、　我們會利用文字符號來取代數字系統，幫助我們推演或證明一般的結果。

3、　我們將規則的數字系統，改裝成漂亮的圖形。

4、　我們利用試算表幫助我們完成複雜且重複性高的計算。

5、　我們將數的分解及四則運算，拿來實際運用。

6、　這個題目可以拿來當數學教材，增加同學們學習數學的樂趣。

7、　這個題目也可以拿來當電腦課的教材，增加同學們學習試算表的能力。

二、　研究建議：

對於未來有興趣的研究者，我們也提供了幾個可以繼續研究的方向：

1、　高位數是否也具備繞圈圈魔數，他們的規則又是什麼呢？

2、　我們做了幾個漂亮的圖形，相信也可以利用圖形來解釋更多有趣的現象。

柒、參考文件

一、　國民小學數學課本第七冊、第八冊。(康軒版)

二、　“奇妙的卡布列克運算”，小牛頓兒童科學園地，84 期，第 19 頁。

三、　“卡布列克數 ”，林炳炎，科學月刊全文資料庫，http:／／lib.swsh.tpc.edu.tw／science／content／1982／00010145／0005.htm，94／04／22。

四、　“談數學之美”，左太政，國立高雄師範大學數學系。

五、　“卡布列克數怪數”，嘉義市第二十二屆中小學科學展覽會國中組數學科。

捌、附表

附表一：利用試算表計算二位數的表格（摘錄）

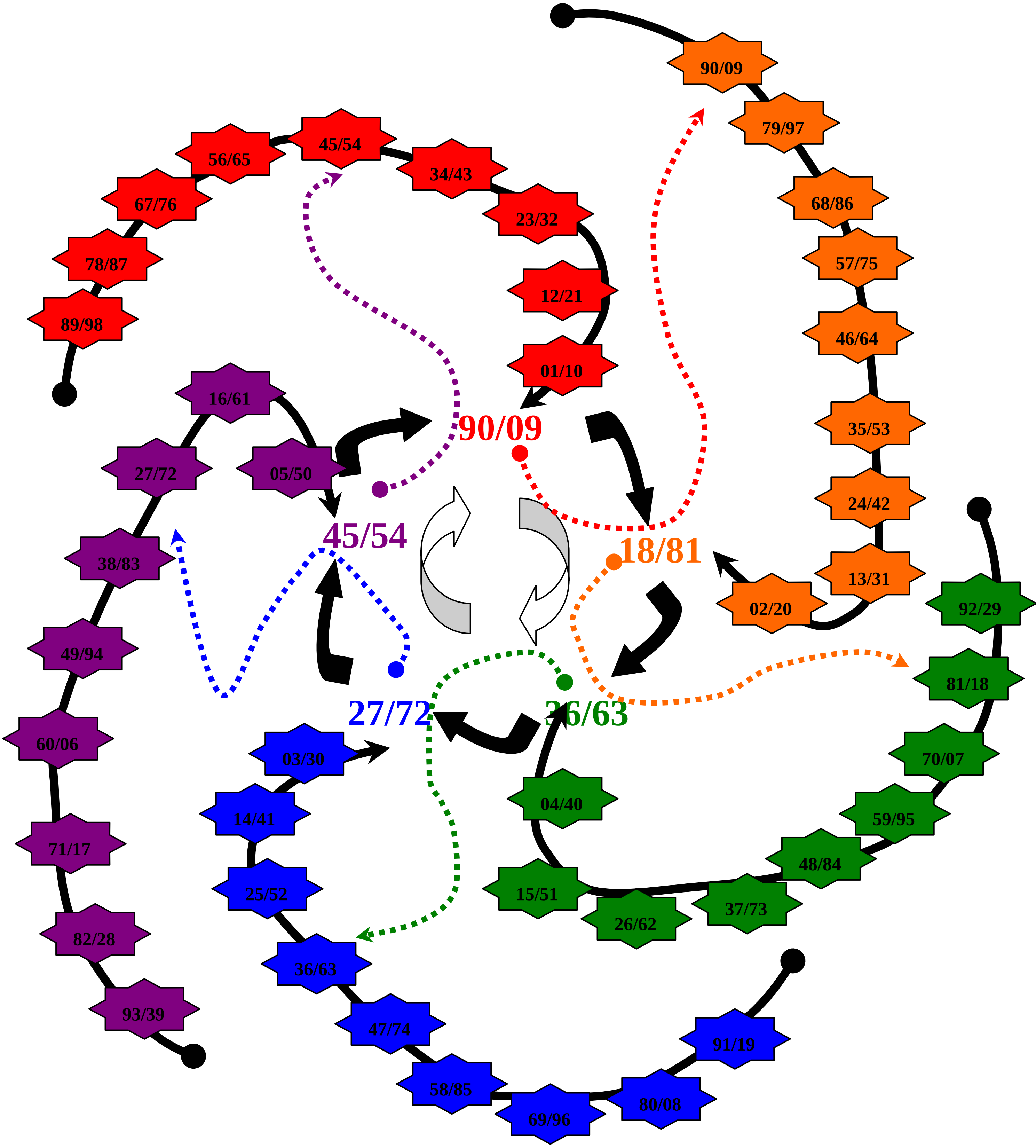
原數(B2)	十位(C2)	個位(D2)	顛倒數(E2)	原數與顛倒數差(F2)
輸入	INT(B2／10)	B2-C2*10	D2*10+C2	IF(B2>E2,B2-E2,E2-B2)
01	0	1	10	09
02	0	2	20	18
03	0	3	30	27
04	0	4	40	36
05	0	5	50	45
06	0	6	60	54
07	0	7	70	63
08	0	8	80	72
09	0	9	90	81
10	1	0	01	09
11	1	1	11	00
12	1	2	21	09
13	1	3	31	18
14	1	4	41	27
15	1	5	51	36
16	1	6	61	45
17	1	7	71	54
18	1	8	81	63
19	1	9	91	72
20	2	0	02	18
21	2	1	12	09
22	2	2	22	00
23	2	3	32	09
24	2	4	42	18
25	2	5	52	27
26	2	6	62	36
27	2	7	72	45
28	2	8	82	54
29	2	9	92	63
30	3	0	03	27
31	3	1	13	18
32	3	2	23	09

附表二：利用試算表計算三位數的表格（摘錄）

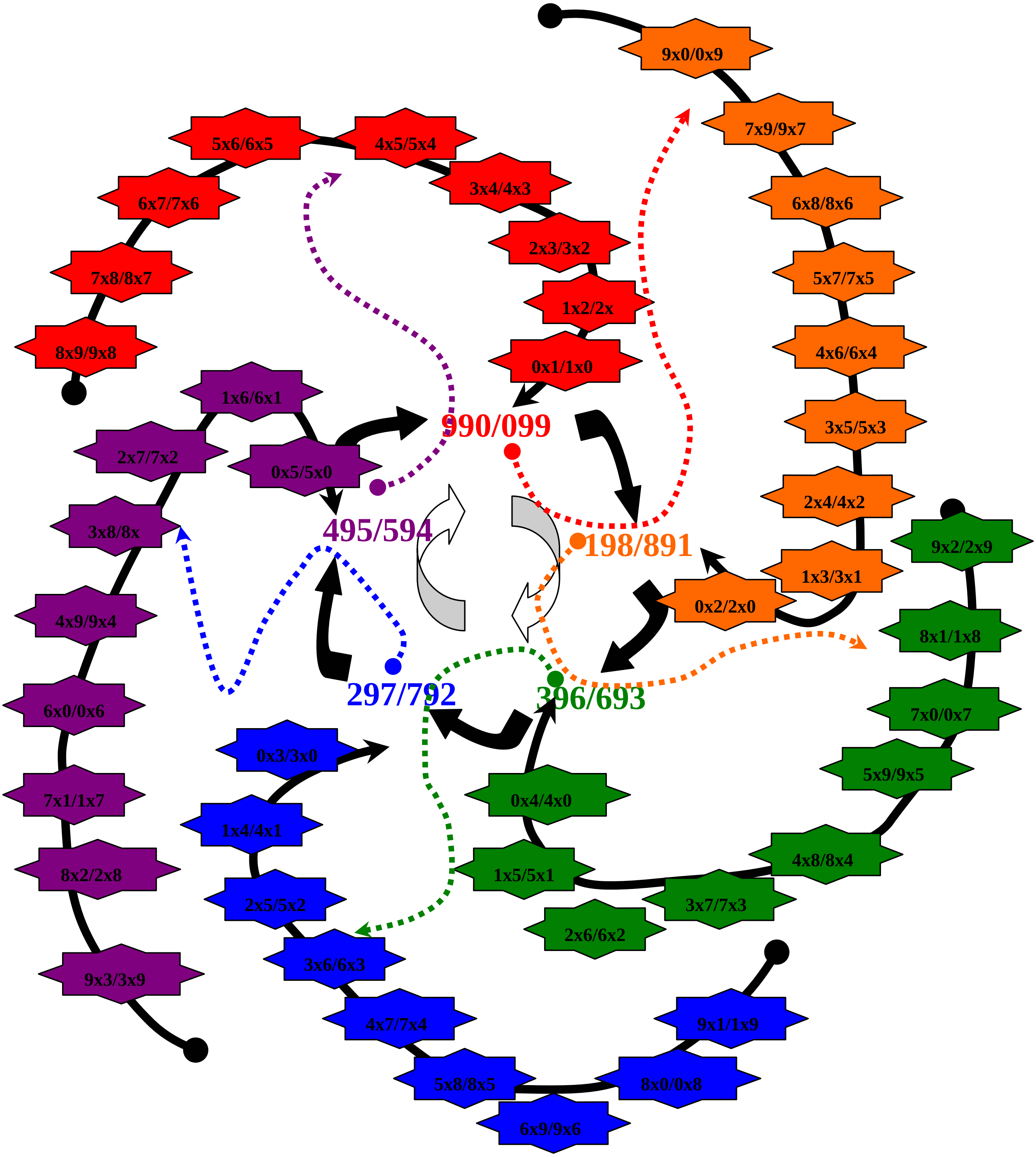
原數(A3)	百位(B3)	十位(C3)	個位(D3)	顛倒數(E3)	原數與顛倒數差
輸入	INT(A3／100)	INT((A3-B3*100)／10)	A3-B3*100-C3*10	D3*100+C3*10+B3	IF(A3>E3,A3-E3,E3-A3)
610	6	1	0	016	594
611	6	1	1	116	495
612	6	1	2	216	396
613	6	1	3	316	297
614	6	1	4	416	198
615	6	1	5	516	099
616	6	1	6	616	000
617	6	1	7	716	099
618	6	1	8	816	198
619	6	1	9	916	297
620	6	2	0	026	594
621	6	2	1	126	495
622	6	2	2	226	396
623	6	2	3	326	297
624	6	2	4	426	198
625	6	2	5	526	099
626	6	2	6	626	000
627	6	2	7	726	099
628	6	2	8	826	198
629	6	2	9	926	297
630	6	3	0	036	594
631	6	3	1	136	495
632	6	3	2	236	396
633	6	3	3	336	297

玖、附圖

附圖一：二位數魔數繞圈圈的情形



附圖二：三位數魔數繞圈圈的情形



中華民國第四十五屆中小學科學展覽會

評　　語

國小組 數學科

第二名

080405

魔數繞圈圈--從卡布列克序列出發

桃園縣桃園市桃園國民小學

評語：

研究主題有趣，能從卡布列克序列的結果再聯想到本研究甚是難得，且研究的結果完整，呈現出漂亮的圖形是本研究最大的特色，唯向更高位數的推論只有假設無實證的研究是美中不足之處。