

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組數學科

080412

臺南市中區永福國民小學

指導老師姓名

林英淑

王昭傑

作者姓名

黃田奇

黃偉綸

鄭龍驊

林芳維

徐湘婷

許忠誠

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：高小組

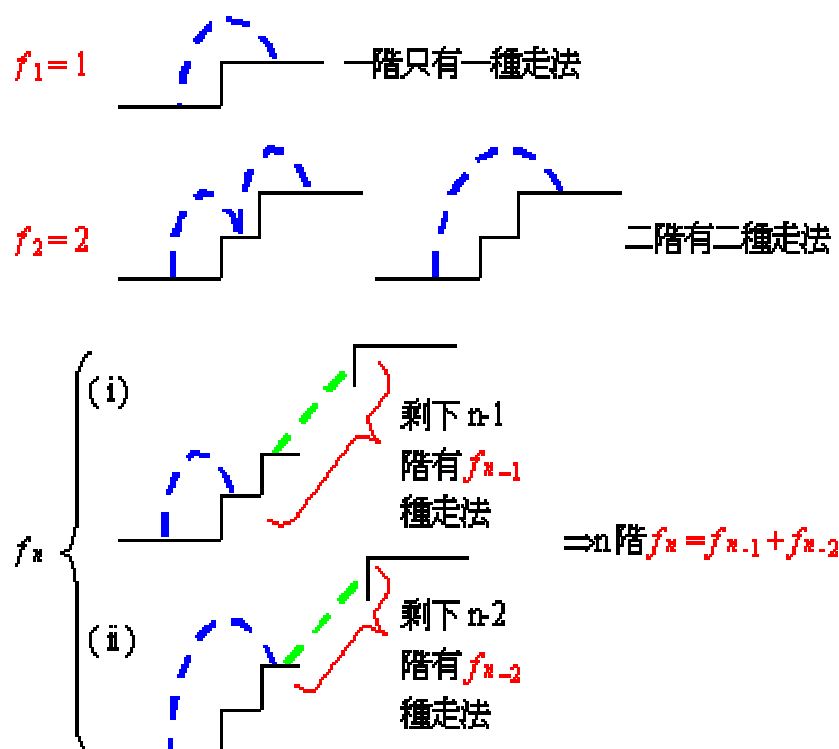
作 品 名 稱：小朋友上樓梯—費氏數列的推廣與應用

關 鍵 詞：費氏數列、數列問題、樓梯問題（最多三個）

編 號：

小朋友上樓梯

【--走樓梯問題研究--費氏數列的推廣與應用】



類別：數學科

組別：高小組

小朋友上樓梯

【走樓梯問題研究--費氏數列的推廣與應用】

壹、研究動機

想當初，剛剛開學時，同學們的心還未收回來，校園簡直成了遊樂場，上上下下、左右左右鬧的不可開交，連在上課時也是心不在焉，一心只想往外面跑，讓老師及家長非常傷透腦筋，許多方法都試過了，最後大家只好在朝會時公布同學們的十大罪狀要求同學改進。其中有一條就是：「大家上下樓梯時造成推擠，而且會有一次跳 2~3 個樓梯的情況」。雖然不是什麼大不了的事情，但危害了上下樓梯同學的安全，所以校方嚴重禁止此類事情發生。現在，此類事情已很久沒發生了，但遺留在我們心裡的「一次跳 2~3 個樓梯的情況」，卻讓我們想到了一個問題，因為老師正上到數列的規則和判別，也剛好介紹到**費氏數列**(geocities)這樣的東西可以快速的解出「一次跳 1~2 個樓梯的情況」。我們心裡不禁想：那麼...會不會有一次跳 5 個以上的樓梯的情況呢？如果有，那麼我們有沒有辦法很快的一次把這個答案算出來呢？我們跑去問老師，答案是肯定的...有這樣的方法可以算出來，但是僅限於**費氏數列**(geocities)才有辦法，那我們又想....如果不是**費氏數列**(geocities)，而是一次跨 3 步以上的題目有沒有辦法呢？可能有吧？就靠著這百萬分之一的可能性，我們展開了我們的研究之路~~~~推廣**費氏數列**(geocities)！

貳、文獻探討

我們上網站和圖書館找了一些關於費氏數列的資料加以研讀，試著要找出一點研究的線索，資料如下：

一、誰是費波那契？

費波那契（**Leonardo Fibonacci**，西元 1170-1250 年）

他處身於歐洲的黑暗時期，不但沒有畏懼退縮，還認真的融會古今各國數學。研究出簡便方法後，更加以推廣傳播，承先啓後，奠定他在數學史上不朽的聲名。



貫通

西元 1175 年，費波那契出生於義大利的比薩，父親爲了栽培他成爲商人，聘東方的回教徒當教師，因此，他小時候就接觸到東方的數學。長大後，爲了做生意，也到過埃及、希臘和敘利亞等地，學會了阿拉伯文，他特別注意東方的數學，並致力於簡便計算方法的研究與推廣，對於數學的成熟上有著卓著貢獻。

二、費氏數列(geocities)的起源：

費氏數列(Fibonacci)起因源一個"兔子"的問題：假設如下

1. 一月一日有一對小兔子關在籠子裡；
2. 二月一日這一對兔子將長大並生一對小兔子，而且在以後每月一日都會再生一對小兔子；
3. 每一對小兔子在一日出生後到第二個月的一日會長成成兔，第三個月的一日會生一對小兔，而且之後每個月的一日都會再生一對小兔。請問一年以後共有多少對兔子(假設生下來的兔子都不會死)？

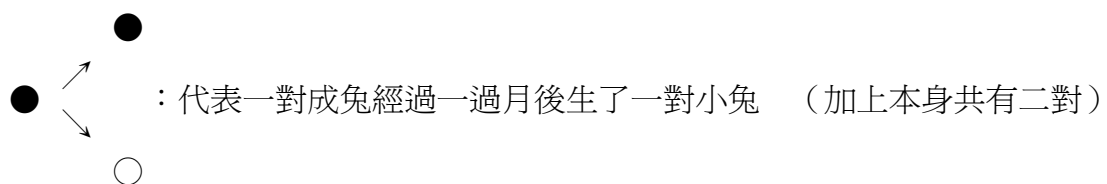
(圖一如下頁所示)

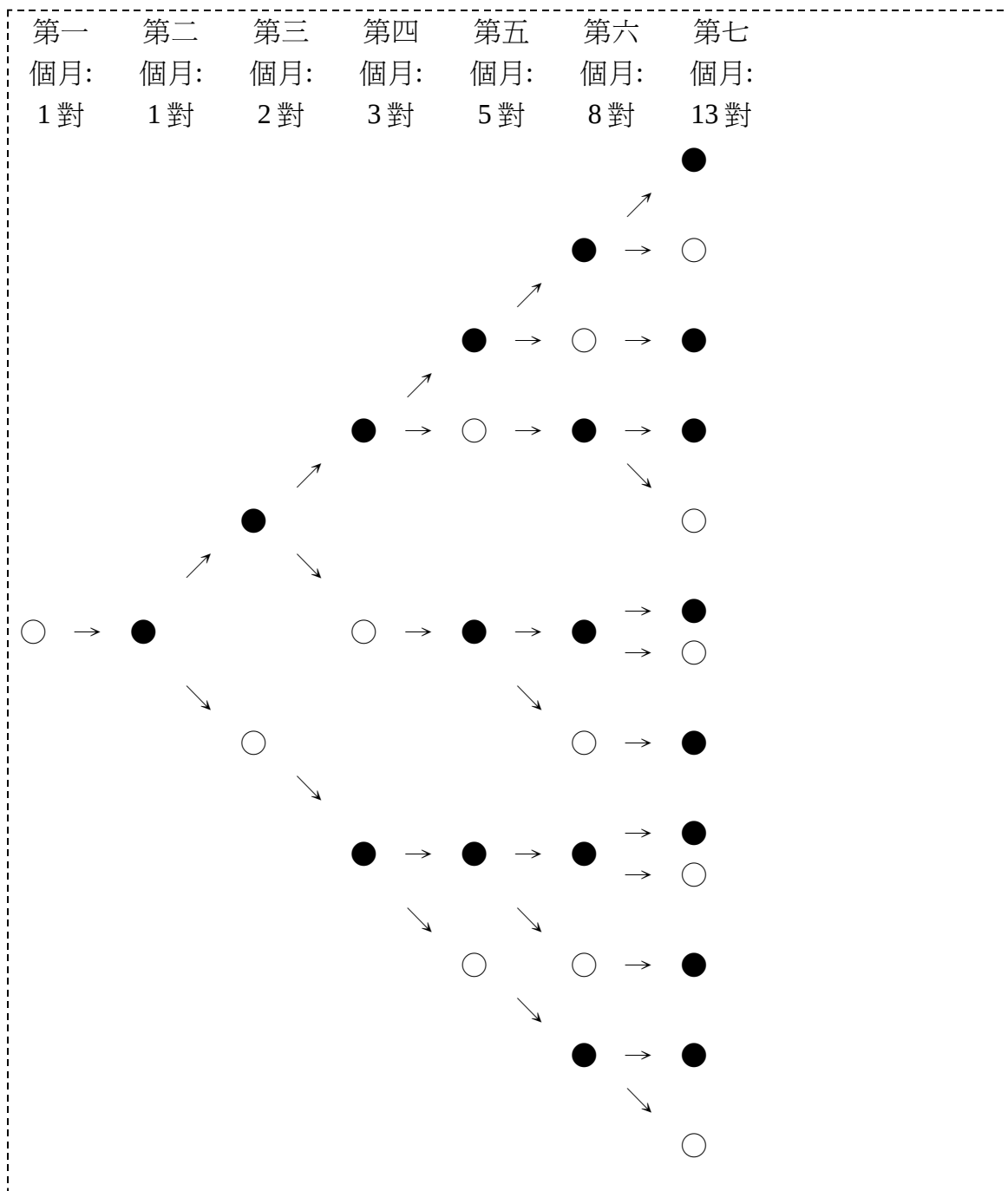
圖一內容規定:

設○：代表一對小兔子

●：代表一對成兔

○→●：代表經過一個月後一對小兔子變為成兔





觀察上(圖一)，第 k 個月的兔子總數為黑點加白點，其中第 $k-1$ 個月共有多少對兔子，第 k 個月就有多少黑點；而第 $k-2$ 個月有多少對兔子，第 k 個月就有多少個白點。因此第 k 個月的兔子總數為第 $k-1$ 個月的兔子和第 $k-2$ 個月的兔子數的和。這是因為第 k 個月的兔子中包含了成兔與小兔，其中小兔為第 $k-2$ 個月的兔子經過二個月後所生；而成兔為第 $k-1$ 個月的原班人馬。

若以 F_n 代表第 n 個月的兔子對數，則依上述可得一關係式：

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \quad (\text{即每後面一項是前兩項之和})$$

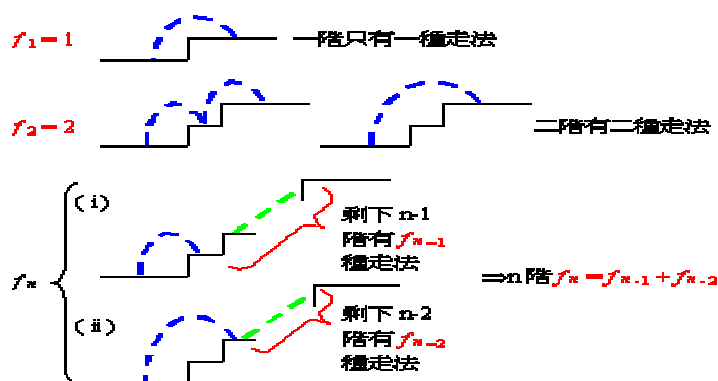
$$\text{即 } \langle F_n \rangle = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

後來爲了紀念最先得得到這個數列的數學家費波那契，而稱此數列爲費波那契數列(又稱費氏數列(geocities))。

三、費氏數列(geocities)的應用：

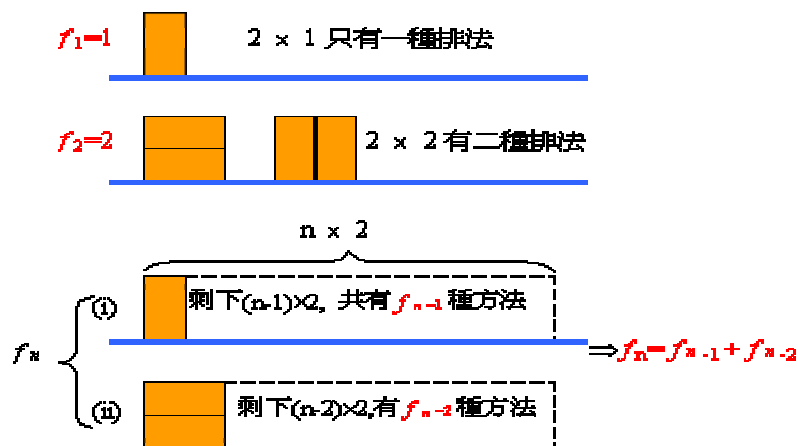
(一)、爬樓梯：

某人要爬一個 n 層的樓梯，每踩一步可以上昇一級或兩級。試問：共有多少種爬樓梯的方法？



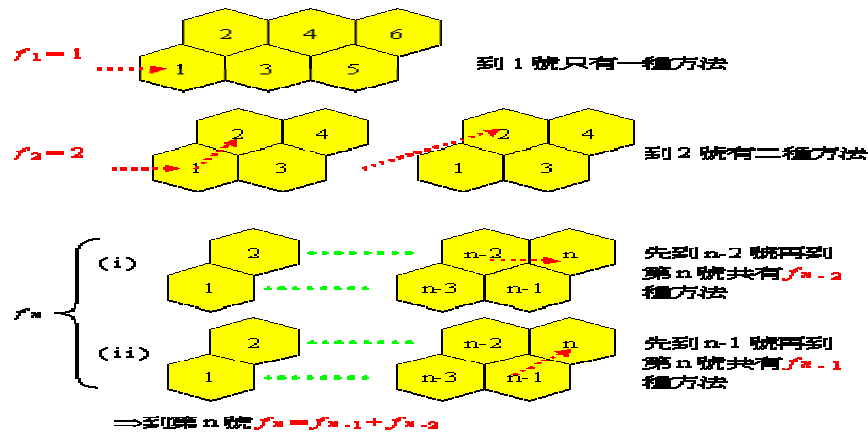
(二)、排磚塊：

以長 $\times$ 高爲 2×1 的磚塊爲基本素材，組合成高度爲2、長度爲 n 的圍牆。請問：磚塊的組合方式有多少種可能？



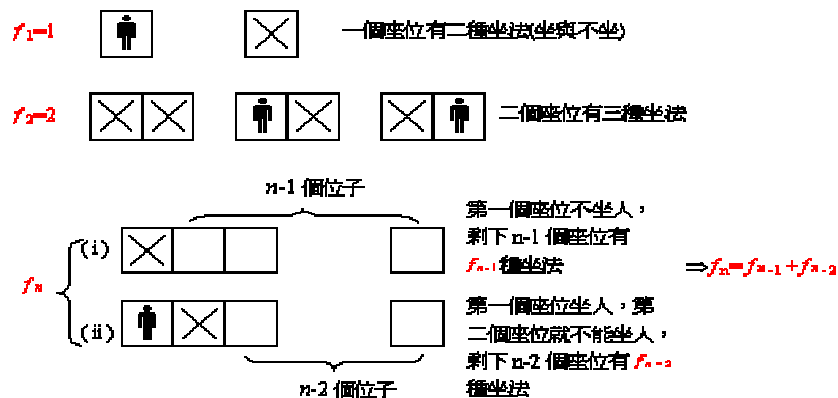
(三)、蜂巢問題：

若一隻蜜蜂要飛到蜂巢，而蜜蜂只能前進、不能後退，則抵達第 n 號蜂巢的方法有多少種？



(四)、坐位子：

如果有 n 張椅子，每個人都不希望旁邊有其他人坐。總共有多少種坐法呢？



(註：略舉一些應用,由於篇幅有限,且不在研究範圍內不加贅述)

參、待答問題

一、費氏數列每一項有很快的方法可以求出嗎?難道要一個一個加嗎？

Ans：在我們上網搜尋資料後，發現費氏數列是有其公式的，可以很快的算出答案，但是根號我們沒學過，看不懂。(公式如下所示) 所以我們問老師，有沒有辦法用我們會的方法直接求出每一項呢？---「可能吧！」..衝著這百萬分之一的可能性，我們想用我們會的方法，直接算出費氏數列的每一項。

$$\text{費氏數列公式： } F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

二、一次跨 1~2 階的題目可以用費氏數列算出，一次跨 1~3 的題目除了慢慢列之外，還有什麼方法可以像費氏數列那樣算出來呢？

Ans:我們一一列出了一次跨 1~3 階，走總數最多十階的樓梯，詳列如下：

◎先詳列....後整理....如下

樓梯總數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
可以跨 1~3 階	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274

我們發現一個很有趣的規則， 比較如下：

(一) 用費氏數列算一次可跨 1~2 階的題目：每一項是前面兩個的和！

(二) 我們算一次跨 1~3 階的題目，發現：每一項是前面三個的和！

這個發現讓我們覺得很新鮮，那麼，如果我們算一次可跨 1~4 階，是不是可以用每一項是前面四項的和，算一次可跨 1~5 階，是不是可以用每一項是前面五項的和，算一次可跨 1~n 階，是不是可以用每一項是前面 n 項的和？於是我們分工合作，分別用詳列的方式，驗證我們的假設！

三、除了問題 2 所假設的規則之外，是否還有其他的規則存在呢？

Ans： 我們試著把我們辛苦找到的資料整理如下表，試圖從中發現更多的線索與規則，撰寫於後面的研究報告。

一次可跨的階數	樓梯總階數									
	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
	1~1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1~2	1	2	3	5	8	13	21	34	55
	1~3	1	2	4	7	13	24	44	81	149
	1~4	1	2	4	8	15	29	56	108	208
	1~5	1	2	4	8	16	31	61	120	236
	1~6	1	2	4	8	16	32	63	125	248
	1~7	1	2	4	8	16	32	64	127	253
	1~8	1	2	4	8	16	32	64	128	255
	1~9	1	2	4	8	16	32	64	128	256
	1~10	1	2	4	8	16	32	64	128	256

(表一)

肆、研究過程與研究資料整理

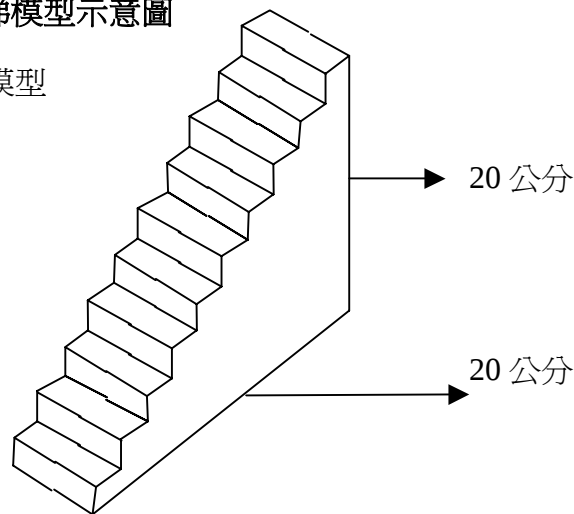
我們打算先從最根本著手----找出數列的規律性！因為我們相信，凡是一個原理原則必定有它的道理存在，而我們也必定可以找出它的規則來證明我們的懷疑。萬事起頭難，但我們堅信只要用心和耐心就能解出這道題。我們分工合作,窮極我們所會的方法來一一列出每一個階梯總數和可跨階數之間的初步關係。

一開始，我們擬定了二個大方向。一是一個一個列出來，再者就是實際上去做實驗，利用縮小的樓梯模型和有色塊的積木操作。討論後我們發現，要一個一個列出來未免太浪費時間且不切實際。故我們選擇了「抽樣」測試的方法。也就是說，我們在全部一階到全部十階的樓梯數當中，隨意選出當中幾個我們預測的可能數加以證明答案的正確性.當然,這其中有許多我們已用推理的方式列出來答案,而我們此刻要做的是利用實際的操作，檢驗我們推理的方法和答案正不正確，再從而尋找規律，歸納所得。

以下為我們實驗的積木與樓梯模型示意圖，我們做完實驗之後，將所得製成下頁表格，轉化為色塊加以討論與歸類。

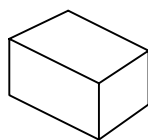
【實物示意圖】 樓梯模型示意圖

說明:總數十階的樓梯縮小模型
顏色:綠色

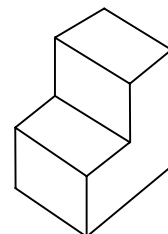


表示可跨階數模型示意圖

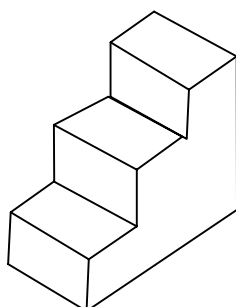
說明:一階色塊
顏色:白色
總數:十塊



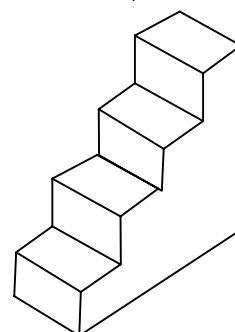
說明:兩階色塊
顏色:紅色
總數:五塊



說明:三階色塊
顏色:藍色
總數:三塊



說明:四階色塊
顏色:黃色
總數:兩塊



(圖二)

樓梯總數	全一階~~全六階	可跨階數：1 階、2 階、3 階
記錄備註	以顏色區分：1 步□：2 步■ ■：3 步：■ ■ ■	
研 究 記 錄 資 料 （ 1 ）		
全一階：共 1 種方法		
只跨 1 階1 種方法		
全一階	□	(1)
全兩階：共 2 種方法		
只跨 1 階1 種方法		
全兩階	□ □	(1,1)
只跨 2 階1 種方法		
	■ ■	(2)
全三階：共 4 種方法		
只跨 1 階1 種方法		
全三階	□ □ □	(1,1,1)
1 個 1 階、1 個 2 階2 種方法		
	■ ■ □	(2,1)
	□ ■ ■	(1,2)
只跨 3 階1 種方法		
	■ ■ ■	(3)
全四階：共 7 種方法		
只跨 1 階1 種方法		
全四階	□ □ □ □	(1,1,1,1)
2 個 1 階、1 個 2 階3 種方法		
	■ ■ □ □	(2,1,1)
	□ ■ ■ □	(1,2,1)
	□ □ ■ ■	(1,1,2)
只跨 2 個 2 階1 種方法		
	■ ■ ■ ■	(2,2)
1 個 1 階、1 個 3 階2 種方法		
	■ ■ ■ □	(3,1)
	□ ■ ■ ■	(1,3)

樓梯總數	全一階~全六階	可跨階數：1 階、2 階、3 階
記錄備註	以顏色區分：1 步□：2 步■：3 步：■■■	
研 究 記 錄 資 料 （ 2 ）		
全五階：共 13 種		
只跨 1 階		1 種方法
全五階	□□□□□	(1,1,1,1,1)
3 個 1 階、1 個 2 階		4 種方法
	■■□□□	(2,1,1,1)
全五階	□■■□□	(1,2,1,1)
	□□■■□	(1,1,2,1)
	□□□■■	(1,1,1,2)
1 個 1 階、2 個 2 階		3 種方法
	■■■■□	(2,2,1)
	■■□■■	(2,1,2)
	□■■■■	(1,2,2)
2 個 1 階、1 個 3 階		3 種方法
	■■■□□	(3,1,1)
	□■■■□	(1,3,1)
	□□■■■	(1,1,3)
1 個 2 階、1 個 3 階		2 種方法
	■■■□■	(3,2,)
	■■■■■	(2,3)
全六階：共 24 種方法		
只跨 1 階		1 種方法
全六階	□□□□□□	(1,1,1,1,1,1)
4 個 1 階、1 個 2 階		5 種方法
	■■□□□□	(2,1,1,1,1)
	□■■□□□	(1,2,1,1,1)
	□□■■□□	(1,1,2,1,1)
	□□□■■□	(1,1,1,2,1)
	□□□□■■	(1,1,1,1,2)
2 個 1 階、2 個 2 階		6 種方法
	■■■■□□	(2,2,1,1)
	■■□■■□	(2,1,2,1)
	■■□□■■	(2,1,1,2)
	□■■■■□	(1,2,2,1)
	□■■□■■	(1,2,1,2)
	□□■■■■	(1,1,2,2)

樓梯總數	全一階~~全六階	可跨階數：1 階、2 階、3 階
記錄備註	以顏色區分：1 步□：2 步■：3 步：■■■	
研 究 記 錄 資 料		
全六階：共 24 種方法		
只跨 2 階		1 種方法
	■■■■■	(2,2,2)
3 個 1 階、1 個 3 階		4 種方法
全六階	■■■□□□	(3,1,1,1)
	□■■■□□	(1,3,1,1)
	□□■■■□	(1,1,3,1)
	□□□■■■	(1,1,1,3)
只跨 3 階		1 種方法
	■■■■■	(3,3)
能跨 1 個 1 階、2 階、3 階		6 種方法
	□■■■■	(1,2,3)
	□■■■	(1,3,2)
	■■■□■■■	(2,1,3)
	■■■□■■	(2,3,1)
	■■■□■■	(3,2,1)
	■■■□■■■	(3,1,2)

(表二：歸納整理圖示) (圖示資料甚多，今舉其一略加說明)

		樓梯總階數									
一次可跨的階數		一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
	1~1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1~2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
	1~3	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274
	1~4	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401
	1~5	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464
	1~6	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492
	1~7	1	2	4	8	16	32	64	127	253	504
	1~8	1	2	4	8	16	32	64	128	255	509
	1~9	1	2	4	8	16	32	64	128	256	511
	1~10	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

(表一)

將我們利用推算的方式求得而成的(表一)與實際操作圖示而來的(表二)互相比較後，發現我們的推論是正確的。亦即我們可以將「費氏數列」(geocities)利用在走樓梯問題上的樓梯總階數稍加延伸，確定以下規律：

發現規則一：

當一次可以跨 1~n 階時(n 為正整數)，從第 n+1 階開始，每一階的全部方法數為前 n 階方法數的和。

舉例說明：

例1. 當一次可以跨 1~2 階時，從第 3 階開始，每多一階的全部方法數為前 2 階方法數的和！

(1) 全部有 5 階樓梯時，若一次可以跨 1~2 階時，全部的方法數為：

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1~1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1~2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

8=3+5

(2) 全部有 9 階樓梯時，若一次可以跨 1~2 階時，全部的方法數為：

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1~1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1~2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

55=21+34

例2. 當一次可以跨 1~5 階時，每多一階的全部方法數為前 5 階方法數的和！

如：全部有 7 階樓梯時，若一次可以跨 1~5 階時，全部的方法數為：

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1~1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1~2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
1~3	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274
1~4	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401
1~5	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464

—————→ 61=31+16+8+4+2

發現規則二：

當一次可以跨 1~n 階時(n 為正整數，「全部有 n 階樓梯」) 以下的方法數不變----

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1~1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1~2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
1~3	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274
1~4	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401
1~5	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464
1~6	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492
1~7	1	2	4	8	16	32	64	127	253	504
1~8	1	2	4	8	16	32	64	128	255	509
1~9	1	2	4	8	16	32	64	128	256	511
1~10	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

表中圈選出來的部分皆相同，我們發現由於可跨階數變多，而樓梯數不足時，方法數並不會有增加的情況發生！

發現規則三：

當一次可以跨 1~n 階時(n 為正整數)，「第 n 階樓梯」的方法數剛好等於~~ $2^{(n-1)}$

舉例如下：

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1~2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
1~3	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274
1~4	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401

$2^{2-1}=2$

$2^{3-1}=4$

$2^{4-1}=8$

發現規則四：

當一次可以跨 1~n 階時(n 為正整數)，「第 k 階樓梯(k < n)」的方法數剛好等於 $2^{(k-1)}$

舉例如下：

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1~1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1~2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
1~3	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274
1~4	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401
1~5	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464
1~6	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492
1~7	1	2	4	8	16	32	64	127	253	504
1~8	1	2	4	8	16	32	64	128	255	509
1~9	1	2	4	8	16	32	64	128	256	511
1~10	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

$2^{4-1}=8$ 可跨 1~5 階,
全部只有 4 階樓梯

$2^{3-1}=4$ 可跨 1~7 階,
全部只有 3 階樓梯

$2^{7-1}=64$ 可跨 1~10 階,
全部只有 7 階樓梯

發現規則五：

(1) 當一次可以跨 1~n 階時(n 為正整數)，「全部有 k 階樓梯(k > n)」的方法數剛好等於 2^k 前一項的兩倍 - 前 n+1 項--

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1~4	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401
1~5	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464
1~6	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492

前 4+1=5 項

$108 = 56 \times 2 - 4$

$492 = 248 \times 2 - 4$

前 6+1=7 項

(2)規則五中有一個特殊的情況，當一次可以跨 1~n 階時(n 為正整數)，「第 n+1 階樓梯」的方法數剛好等於~~前一項的兩倍 - 1

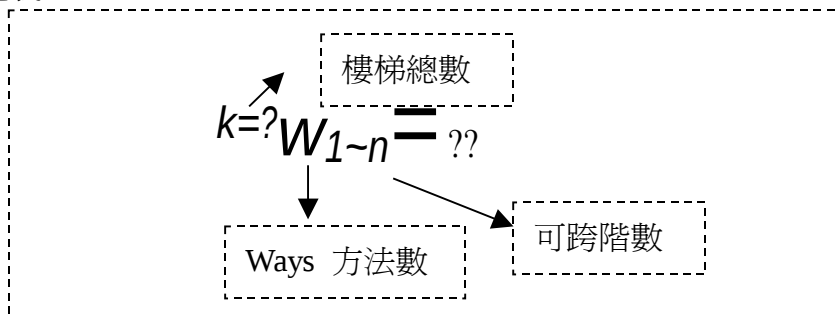
	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1~3	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274
1~4	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401
1~5	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464
1~6	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492

由圈選處可發現,每一項都是 $2 \times \text{前一項} - 1$

發現規則六：(總歸納檢討)

綜合以上發現，我們想歸納出一個屬於我們的公式，看看有沒有辦法用一次簡單的計算就可以把正確的解答求出來！

1. 名稱定義：



2. 範圍限制：我們分兩方面討論

(1) 當 $k \leq n$ 時， $k=? W_{1~n} = 2^{k-1}$

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1~4	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401
1~5	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464
1~6	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492

$k=3 W_{1~4} = 2^{3-1} = 4$
 $k=5 W_{1~5} = 2^{5-1} = 16$

(2) 當 $k > n$ 時，有兩種情況：

a: $k = n+1$ 時， $k=n+1W_{1\sim n} = 2^n - 1$

b: $k > n+1$ 時， $k=?W_{1\sim n} = ?$

a: $k = n+1$ 時， $k=n+1W_{1\sim n} = 2^n - 1$

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1~4	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401
1~5	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464
1~6	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492

$$k=4+1W_{1\sim 4} = 2^4 - 1 = 15$$

$$k=6+1W_{1\sim 6} = 2^6 - 1 = 63$$

b: $k > n+1$ 時， $k=?W_{1\sim n} = ?$ （無法歸納出公式）

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1~2	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

計算過程： $k=6W_{1\sim 2} = 2^{k=5W_{1\sim 2}} - k=3W_{1\sim 2}$ （利用規則五）

利用
前述
規則
推導

$$= 2 (2^{k=4W_{1\sim 2}} - k=2W_{1\sim 2}) - k=3W_{1\sim 2}$$

$$= 4^{k=4W_{1\sim 2}} - 2^{k=2W_{1\sim 2}} - k=3W_{1\sim 2}$$

$$= 4 (2^{k=3W_{1\sim 2}} - k=1W_{1\sim 2}) - 2^{k=2W_{1\sim 2}} - k=3W_{1\sim 2}$$

$$= 8^{k=3W_{1\sim 2}} - 4^{k=1W_{1\sim 2}} - 2^{k=2W_{1\sim 2}} - k=3W_{1\sim 2}$$

$$=8(2^2-1) - 4 \times 1 - 2 \times 2 - 3$$

$$=24 - 11 = 13$$

我們發現，最後這個公式我們無法順利推導出來，但我們相信，假以時日等我們實力更精進，必定可以把這最後的公式定出來！

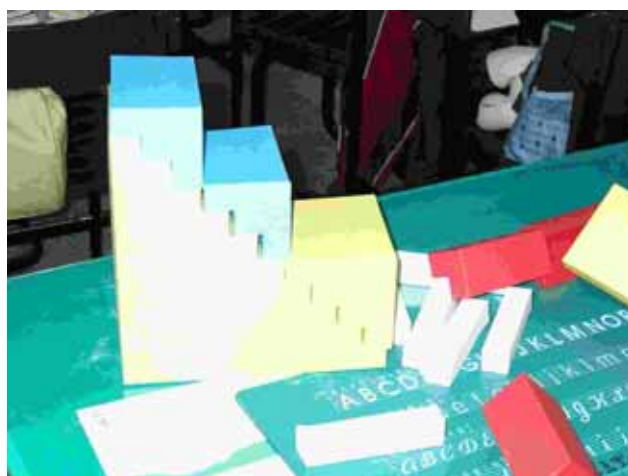
計算這些過程雖累，但很高興的我們做到了！我們也要持續努力把最後的公式定出！

後記：前幾天，中午午餐後搬餐盒回去時，三年級的小弟弟不小心把餐盒打翻在樓梯上，使得我們無法走那階有食物的樓梯。這讓我們不禁想到，如果十階樓梯中有一階是不能走的（可能是壞掉、有髒東西或樓梯油漆未乾），那麼我們應該怎麼計算呢？這樣的疑問不禁讓我們想進一步去探討，但時間已經不夠了，我們只好期待下次的科展好好的研究出來，或者留給有興趣的同好來研究了！

伍、參考資料

1. <http://hk.geocities.com/mathsworld2001/themes/fi.htm>
2. <http://ms1.fhsh.tp.edu.tw/~f2300251/d4.htm>
3. <http://a350.tysh.tyc.edu.tw/~t318/math/Fibonacci/>
4. <http://residence.educities.edu.tw/mario123/problems/fibonacci.htm>T

陸、附件(樓梯模型照片)



評 語

080412 國小組數學科 佳作

小朋友上樓梯—費式數列的推廣與應用

題目有趣記錄資料的方式簡便，並能用推理的方式尋求規律，歸納所得並有重要結果及續後研究問題的產出，難能可貴。