中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組數學科

080408

高雄市左營區新上國民小學

指導老師姓名

萬家睿

林裕傑

作者姓名

陳牧心

中 華 民 國 第 四 十 四 屆 中 小 學 科 學 展 覽 會

作　品　說　明　書

科別：　數學科

組別：　國小組

作品名稱：乾坤大挪移----AB ｘ CD ＝BA ｘ DC

關鍵詞：乘 法　分 數　等 值 分 數

編號：

乾 坤 大 挪 移

AB×CD＝BA×DC 的研究

壹、研究動機：

有一天上數學課，老師出了一道題目，題目是『AB×CD＝BA×DC』，起先，大家都盲目的找，卻找不到正確的答案，正當大家絞盡腦汁地思考之際，我終於找到了，答案是『12×63＝21×36』，後來，同學告訴我，他在逛書店時，看到一本由前程出版社出版的書，書名叫「蟲食算與隱算法」，裡面也有一個題目是『AB×CD＝BA×DC』，書中的解答是「26×93＝62×39」，真奇怪，為什麼解答與我找到的解答會不－樣呢？難道解答只有這兩組嗎？還是有很多組的解答呢？這時腦袋裡又浮現了許多問題，如果是三位數乘三位數（ABC×DEF＝CBA×FED）又會如何呢？於是，在回家的途中一直想著這個問題，到底要怎麼找解答呢？對了，回教室找同學們幫忙，全班分組一起來找解答，後來還請教老師，在老師的指導下，完成下列的研究。

題目規則說明：
找出符合『AB×CD＝BA×DC』此算式的式子，且 A≠B。

貳、研究目的：

一、能找到二位數×二位數 AB×CD＝BA×DC 的簡捷方法。

二、能找到二位數×三位數 AB×CDE＝BA×EDC 的簡捷方法。

三、能找到二位數×四位數 AB×CDEF＝BA×FEDC 的簡捷方法。

四、能找到三位數×三位數 ABC×DEF＝CBA×FED 的簡捷方法。

五、能找到四位數×四位數 ABCD×EFGH＝DCBA×HGFE 的簡捷方法。

參、研究過程：

一、研究二位數的乘法 AB×CD＝BA×DC，從最小的二位數 10 到 99 著手。

(一)**從全班分組找出的答案中整理規則**，被乘數 AB 從 12 開始到 46 的算式中去排列和分析，**發現一些有規則的變化。**

(1)剛開始，我想到若用 12×34≠21×43，從十位數概算 10×30≠20×40，發現等式兩邊的「積」相差太大。

(2)因此，**先用公倍數可找到等號兩邊十位數的數字，再找個位的數字**。例如：

12×CD＝21×DC 中，概算十位數 1×C＝2×D，若用 1 和 2 的公倍數 2，則 C=2，D=1，則 12×21＝21×12。所以，若用公倍數 4，則 C=4，D=2，則

12×42＝21×24。以此類推，公倍數 6 和 8 又可找到二組答案。

(3)總之，先在等號兩邊**被乘數十位數的數字**中，找到**公倍數**。因十位數中，

A×C＝B×D，找到十位數的數字，自然可以找到個位數的數字。後來，全班分組共找到十四組答案。

1. 12×42＝21×24	8. 23×96＝32×69
2. 12×63＝21×36	9. 24×63＝42×36
3. 12×84＝21×48	10. 24×84＝42×48
4. 13×62＝31×26	11. 26×93＝62×39
5. 13×93＝31×39	12. 34×86＝43×68
6. 14×82＝41×28	13. 36×84＝63×48
7. 23×64＝32×46	14. 46×96＝64×69

(二)**發現算式中兩邊有倍數的關係，從算式中最小的數開始**，當數字中有 0、5 或 7 時，算式便不能成立。因為 A、B 有一數為零的話其顛倒將變成個位數，如：AB=10 顛倒 BA 就成 01；5 或 7 都是質數而且乘上最小倍數二都會進位，所以不行；另外 A 不能等於 B 的原因是如果 A 等於 B 那麼 C 一定等於 D,

如 11×22=22×11、33×55=55×33，而且 A、B 一樣，A、B 交換與原本一樣，所以不予討論。

(三)*用分數擴分（等值分數）的方式，更容易找出方法來。*如下面記錄。

1\.

×2

$12\times42=21\times24$

×2

1.5 倍

$24\times63=42\times36$

1.5 倍

4 倍

$12\times84=21\times48$

4 倍

$1\frac{1}{3}$ 倍

$36\times84=63\times48$

$1\frac{1}{3}$ 倍

×4 ×3 ×2

$\frac{12}{21}=\frac{24}{42}=\frac{36}{63}=\frac{48}{84}$（從 2 倍、3 倍、4 倍擴分後，交叉相乘）

×2 ×3 ×4

2\. $\frac{13}{31}=\frac{26}{62}=\frac{39}{93}$

5\. $\frac{24}{42}=\frac{48}{84}$

3\. $\frac{23}{32}=\frac{46}{64}=\frac{69}{96}$

6\. $\frac{34}{43}=\frac{68}{86}$

4\. $\frac{14}{41}=\frac{28}{82}$

(四)統計符合算式的總數，總共有 14 組算式。如表(一)

二位數乘法中符合算式的統計表

10 個為一組 / 符合各組算式的總數 / 結果	10　19		20　29		30　39		40　49	
統　計結　果	12	3 組	23	2 組	34	1 組	46	1 組
	13	2 組	24	2 組				
	14	1 組	26	1 組	36	1 組		
合　　計		6		5		2		1

(表一)

〔說明〕

1.擴分的倍數，不會超過 4 倍。

2.我們把他整理成如下表(二)後發現其有對稱性。

3.利用表(二)發現快速找出的方法：

(1)只要利用藍線表格下半部來找，因為上半部為其顛倒。如：12、21。

(2)從 10　那一列開始，發現當數字出現 5 時，即可停止尋找。

(3)當找到一數時，以其倍數 2、3、4 圈選，如 12 則再圈選 24、36、48。

(4)找到 34 那一列即可停止，因為接下來 45 的那一列一開始即出現 ” 5 ” 。

10	20	30	40	50	60	70	80	90
11	21	31	41	51	61	71	81	91
12	22	32	42	52	62	72	82	92
13	23	33	43	53	63	73	83	93
14	24	34	44	54	64	74	84	94
15	25	35	45	55	65	75	85	95
16	26	36	46	56	66	76	86	96
17	27	37	47	57	67	77	87	97
18	28	38	48	58	68	78	88	98
19	29	39	49	59	69	79	89	99

(表二)

二、忽然，我們想到一個疑問，若用大於四倍去擴分，是否可找到符合的算式呢？這樣，倍數增加，乘數就會變成三位數（百位）。因此，我們開始研究二位數乘以三位數：AB╳CDE＝BA╳EDC 即 $\frac{AB}{BA}=\frac{EDC}{CDE}$

(一)從 10~99 倍擴分，祇有 11.22.33 倍符合算式，結果如表三。

(二)擴大倍數二位數╳三位數符合算式一覽表

擴大倍數	11	22	33	44
被乘數規則	A+B≦9	A+B＜5	A+B≦3	A+B≦2
符合算式組數	12、13、14、15、16、17、18、23、24、25、26、27、34、35、36、45 共 16 組	12、13 共 2 組	12 共 1 組	╳

（表三）

〔說明〕

1.發現被乘數 12，以 11 倍、22 倍、33 倍擴分，可找到符合的算式，44 倍、55 倍、66 倍卻無法成功。

2.擴大倍數 11 倍之規則說明：

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 11 \\ \hline 12 \\ 12\ \ \\ \hline \end{array}$$

從直式發現只有紅色圈起來的部分會有進位的情形，且剛好就是 A＋B，所以只要 A+B≦9 不進位，那麼即可得到一個三位數 CDE，如 12 的 11 倍 132：12╳231=132╳21。

3.擴大倍數 22 倍之規則說明：同上一樣只有紅色圈起來的部分會有進位的情形，且剛好就是 2 倍（A＋B），所以只要 A+B＜5 便不會進位，得到一個三位數 CDE，如 12 的 22 倍 264：12╳462=264╳21。

4.擴大倍數 33 倍之規則說明：同上一樣只有紅色圈起來的部分會有進位的情形，且剛好就是 3 倍（A＋B），所以只要 A+B≦3 便不會進位，得到一個三位數 CDE，如 12 的 33 倍 396：12╳693=396╳21。

5.擴大倍數 44 倍之規則說明：同上一樣只有紅色圈起來的部分會有進位的情形，且剛好就是 4 倍（A＋B），所以只要 A+B≦2 便不會進位，因此只有兩種情況就是 A＝2、B＝0 或 A＝B＝1，但先前已討論過 A、B 不得有一為 0 且 A≠B，故找不到。同樣的 44 倍以上的 55 倍、66 倍就更加不可能了。

6.若大於 100 倍以上，是否能找到符合算式的方法？因此，我們著手研究二位數乘以四位數。

三、二位數×四位數　AB×CDEF＝BA×FEDC $\frac{AB}{BA}=\frac{FEDC}{CDEF}$

(一)被乘數以 12 為開始，倍數從 100 到 999 倍，符合算式的如下，操作結果如記錄。

$$\frac{12}{21}=\frac{1212}{2121}(101\text{倍})=\frac{2424}{4242}(202\text{倍})=\frac{3636}{6363}(303\text{倍})=\frac{4848}{8484}(404\text{倍})$$

(二)除了 KOK 型倍數(101,202,303)之外，是否其他倍數也能符合算式呢？

(三)整理其他類型的倍數有 KKK,K1K,K2K,K3K,K4K,1K1,2K2,3K3,4K4 等，統計符合的算式如下表(四)。

倍數	組數	規則說明
101	36 組	A＜B，所有數都符合。(因只探討表(二)藍線下半部)
202	12、13、14、23、24、34 共 6 組	只要 A、B 有一數大於 4 就不行了。
303	12、13、23 共 3 組	只要 A、B 有一數大於 3 就不行了。
404	12 共 1 組	只要有一數大於 2 就不行了。
505	0	
111	12、13、14、15、16、17、18、23、24、25、26、27、34、35、36、45 共 16 組	A+B≦9
212	12、13、14、23 共 4 組	2B+A≦9
313	12 共 1 組	3B+A≦9
414	12 共 1 組	4B+A≦9
121	12、13、14、23 共 4 組	2B+A≦9
222	12、13 共 2 組	A+B＜5
323	12 共 1 組	3B+2A≦9
424	0	
131	12 共 1 組	3B+A≦9
232	12 共 1 組	3B+2A≦9
333	12 共 1 組	A+B≦3
434	0	
141	12 共 1 組	4B+A≦9
242	0	
151	0	

（表四）

〔說明〕

1.倍數的數字排列要符合對稱，雙頭龍數字如 131,242,222 等。
2.擴分倍數的數字都在「4」以下。
3.倍數數字「和」愈少，符合算式愈多。如 101→2,111→3。
4.101 倍乘以任何數，都能符合算式（兩個相同數字的二位數除外），111 倍乘以任何二位數，必須是兩個數的數字和在「9」以下。
5.被乘數愈大，擴大倍數的數字總和愈小，甚至祇有擴分 101 倍，才符合算式。
6.被乘數 12 的擴分倍數，除了要小於 5 的數字外，倍數數字總和在 9 以下的倍數，都可擴分成功。但是超過 10 以上，都無法成功。
7.擴分倍數的數字中大的乘上 B，小的乘上 A，即可得到萬用公式，如擴分倍數 414 時，大的數字 4 乘上 B 加上小的數字 1 乘上 A，發現 4B+A≦9，則只有一組 12（4x2+1x1=9）。

四、研究三位數x三位數　　ABCxDEF＝CBAxFED

(一)整理各組公布的答案，並用計算機加以驗算結果。如記錄。

(二)用等值分數擴分，第一個分數的分子在「4」以下。 $\frac{ABC}{CBA}=\frac{FED}{DEF}$

(1) $\frac{123}{321}=\frac{246}{642}=\frac{369}{963}$　　(2) $\frac{112}{211}=\frac{224}{422}=\frac{336}{633}=\frac{448}{844}$

101	201	301	401	501	601	701	801	901	111	211	311	411	511	611	711	811	911
102	202	302	402	502	602	702	802	902	112	212	312	412	512	612	712	812	912
103	203	303	403	503	603	703	803	903	113	213	313	413	513	613	713	813	913
104	204	304	404	504	604	704	804	904	114	214	314	414	514	614	714	814	914
105	205	305	405	505	605	705	805	905	115	215	315	415	515	615	715	815	915
106	206	306	406	506	606	706	806	906	116	216	316	416	516	616	716	816	916
107	207	307	407	507	607	707	807	907	117	217	317	417	517	617	717	817	917
108	208	308	408	508	608	708	808	908	118	218	318	418	518	618	718	818	918
109	209	309	409	509	609	709	809	909	119	219	319	419	519	619	719	819	919
121	221	321	421	521	621	721	821	921	131	231	331	431	531	631	731	831	931
122	222	322	422	522	622	722	822	922	132	232	332	432	532	632	732	832	932
123	223	323	423	523	623	723	823	923	133	233	333	433	533	633	733	833	933
124	224	324	424	524	624	724	824	924	134	234	334	434	534	634	734	834	934
125	225	325	425	525	625	725	825	925	135	235	335	435	535	635	735	835	935
126	226	326	426	526	626	726	826	926	136	236	336	436	536	636	736	836	936
127	227	327	427	527	627	727	827	927	137	237	337	437	537	637	737	837	937
128	228	328	428	528	628	728	828	928	138	238	338	438	538	638	738	838	938
129	229	329	429	529	629	729	829	929	139	239	339	439	539	639	739	839	939
141	241	341	441	541	641	741	841	941	161	261	361	461	561	661	761	861	961
142	242	342	442	542	642	742	842	942	162	262	362	462	562	662	762	862	962
143	243	343	443	543	643	743	843	943	163	263	363	463	563	663	763	863	963
144	244	344	444	544	644	744	844	944	164	264	364	464	564	664	764	864	964
145	245	345	445	545	645	745	845	945	165	265	365	465	565	665	765	865	965
146	246	346	446	546	646	746	846	946	166	266	366	466	566	666	766	866	966
147	247	347	447	547	647	747	847	947	167	267	367	467	567	667	767	867	967
148	248	348	448	548	648	748	848	948	168	268	368	468	568	668	768	868	968
149	249	349	449	549	649	749	849	949	169	269	369	469	569	669	769	869	969
181	281	381	481	581	681	781	881	981	191	291	391	491	591	691	791	891	991
182	282	382	482	582	682	782	882	982	192	292	392	492	592	692	792	892	992
183	283	383	483	583	683	783	883	983	193	293	393	493	593	693	793	893	993
184	284	384	484	584	684	784	884	984	194	294	394	494	594	694	794	894	994
185	285	385	485	585	685	785	885	985	195	295	395	495	595	695	795	895	995
186	286	386	486	586	686	786	886	986	196	296	396	496	596	696	796	896	996
187	287	387	487	587	687	787	887	987	197	297	397	497	597	697	797	897	997
188	288	388	488	588	688	788	888	988	198	298	398	498	598	698	798	898	998
189	289	389	489	589	689	789	889	989	199	299	399	499	599	699	799	899	999

(表五)

81 個為一組 / 符合各組算式的總數 / 結果	101 909		111 919		121 929		131 939		141 949	
統計結果	起始數	組數	起始數	組數	起始數	組數	起始數	組數	起始數	組數
	102	6 組	112	6 組	122	6 組	132	3 組	142	1 組
	103	3 組	113	3 組	123	3 組	133	3 組	143	1 組
	104	1 組	114	1 組	124	1 組	134	1 組	144	1 組
	203	3 組	213	3 組	223	3 組	233	3 組	243	1 組
	304	1 組	214	1 組	324	1 組	234	1 組	344	1 組
			314	1 組			334	1 組		
合計		14		15		14		12		5

（表六）

〔說明〕

1.仿照二位數乘二位數製作表格(表五)，發現其數字分布亦呈成對稱分布。
2.發現當三位數中的十位數為 0 時，其數字分布與二位數乘二位數相同。
3.擴分的倍數一樣不會超過 4 倍。
4.起始數每一個數字皆不大於 4，當起始數字中有 4 時，只有 1 組符合；當起始數字中有 3 時，有 3 組符合；當起始數字中只有 1、2 時，有 6 組符合。

五、研究四位數x四位數　ABCD x EFGH＝DCBA x HGFE

(一)用等值分數擴分的方式，並用計算機驗算。$\frac{ABCD}{DCBA}=\frac{HGFE}{EFGH}$

(二)四位數乘以一位數等於四位數，倍數在 2　4 倍。

(三)整理答案及記錄結果。例如

(1) $\frac{1002}{2001}=\frac{2004}{4002}=\frac{3006}{6003}=\frac{4008}{8004}$

(2) $\frac{1234}{4321}=\frac{2468}{8642}$

〔說明〕

1.任意取一個四位數的分數（每一個數字不大於 4），當做第一個分數，適度的擴分，擴分計算時，不進位，就可找到另外一個四位數。

2.擴分的倍數在 2　4 倍，擴分的數字是四位數不進位，就可找到符合的算式。

肆、比較與分類：整理與分類，更容易看出算式之間的異同。如表格(七)、(八)

二位數乘以多位數的算式比較

乘法的倍數 / 比較與說明 / 項目	二位數×二位數 AB×CD	二位數×三位數 AB×CDE	二位數×四位數 AB×CDEF
倍數	4 倍以下	11.22.33 倍	101.111 倍，數字對稱的倍數
倍數特性	倍數數字都小於 5	倍數數字都小於 5	倍數數字都小於 5
擴大倍數的計算過程	計算時不可進位	計算時不可進位	計算時不可進位
倍數數字總和	「和」愈小,符合算式愈多	「和」愈小,符合算式愈多	「和」愈小,符合算式愈多
倍數數字對稱排列	無(個位數 4 以下)	對稱	對稱
兩個數字「和」不大於 9	擴大 4 倍以下	擴大 11 倍	擴大 111 倍

（表七）

(己)相同位數的乘法，符合算式比較

乘法的倍數 / 比較與說明 / 項目	二位數×二位數 $\frac{AB}{BA}=\frac{DC}{CD}$	三位數×三位數 $\frac{ABC}{CBA}=\frac{FED}{DEF}$	四位數×四位數 $\frac{ABCD}{DCBA}=\frac{HGFE}{EFGH}$
最小位數	三位數	五位數	七位數
最大位數	四位數	六位數	八位數
擴分倍數	4 倍以下	4 倍以下	4 倍以下
第一個分數的分子與分母	第一個分數 每個數字不大於 5	第一個分數 每個數字不大於 5	第一個分數 每個數字不大於 5
計算中不進位	才能符合算式	才能符合算式	才能符合算式
被乘數 擴分 11 倍	數字「和」不大於 9 可變成三位數	數字「和」不大於 9 可變成四位數	數字「和」不大於 9 可變成五位數
數字含「0」	數字不可含「0」	倍數的中間數字可含「0」(十位)	倍數的中間數字可含「0」(十、百位)

（表八）

伍、討論：

一、比較下面四個算式，更瞭解為什麼倍數要用對稱排列的數字。

```
①      23        ②      23
   ×  201           ×  102
   -------          -------
       23               46
     460              230
   -------          -------
     4623             2346
```

```
③      32        ④      32
   ×  201           ×  102
   -------          -------
       32               64
     640              320
   -------          -------
     6432             3264
```

①→②對稱一半（祇改變乘數，兩個數字前後平移）①→④完全倒轉（被乘數和乘數，數字對調）

①→③（祇改變被乘數，兩個數字各自互換）

②→③完全倒轉（被乘數和乘數，數字對調）

二、上面四個算式，說明 AB×CDE＝BA×EDC，若要「積」的數字倒轉，一定要被乘數和乘數，一起對調。如下面二個算式，因為 101 對調後還是 101，所以被乘數和乘數也一起調，因此，「積」完全倒轉。

```
       23               32
   ×  101           ×  101
   -------          -------
       23               32
     230              320
   -------          -------
     2323             3232
     ──→              ←──
```

三、多位數乘多位數，第一個分數之數字皆小於 5，適度的擴分（至少 2 倍），都可找到算式。

四、被乘數 12，擴分 4114 倍與 1441 倍，卻發現結果不同，原因是後者計算中有進位現象。

陸、推廣與應用

一、做完乘法也可做除法的計算，遇到被除數和除數有數字轉位的現象時，商（結果）也能想到有這種數字轉換的算式。$\frac{396}{693}\begin{matrix}\div 33\\ \div 33\end{matrix}=\frac{12}{21}$

二、若分子與分母同時除以、一個小數時，會產生另外一個算式。

$\frac{72}{27}\begin{matrix}\div 2.25\\ \div 2.25\end{matrix}=\frac{31}{12}$ ， $\frac{AB}{BA}=\frac{DB}{CB}$ 即 AB×CB＝BA×DB

三、做完擴分後，可再做約分。例如$\frac{275}{572}\begin{matrix}\div 11\\ \div 11\end{matrix}=\frac{25}{52}$

四、擴分後，更瞭解等值分數的概念和應用。例如$\frac{12}{21}=\frac{24}{42}=\frac{36}{63}$

柒、結論與心得

一、經過操作電算器之後，發現運用分數的擴分方式和分數等值的概念，可以馬上找到符合的算式。但是一定還要經過用「筆」親自計算過程，才能真正瞭解「進位」會影響改變前後數字而無法符合算式。因此，要很快找到算式的方法，有下面五點：

(一)熟悉了解擴分倍數的位數。如二位乘二位，倍數是一位數。

(二)當擴分的倍數小於 10 倍時，擴分的倍數數字都小於 5。第一個分數的分子分母，數字也要小於 5。

(三)擴分的倍數超過 10 倍以上時，數字排列有對稱（雙頭龍數字）的現象，而用倍數 11 和 101 最容易擴分成功。

(四)在擴分的乘法運算過程，不能有滿十進位的現象，否則會影響左邊進位的數字，而無法符合算式。

(五)擴分倍數是小數或分數時，分母的數字要在「4」以下，分子的數字都是「1」。

二、這次研究，透過大家分工合作，人手一台電算器，來操作驗算發現的結果。雖然研究過程很辛苦，卻充滿挑戰性，回味無窮。在此，要感謝老師的出題和大家提供的答案，讓我們能在公佈欄的答案中發現趣味的規則。**一般人祇知道乘法的計算過程，卻很少人注意算式與算式之間的關係。看似平常的數學題目，卻隱藏了數學的趣味性和原理。**未來，希望長大之後，更學得高深的數學方法和理論，再探討擴分的倍數是小數或分數時，可找到哪些算式？或證明我們研究的結果。半年來，我們查閱各種書籍和資料，並沒有發現相同的研究主題。最後，希望各位評審老師先進給予我們指教。

捌、參考資料：

一、數學課本康軒版第七冊（四上）第三單元「乘法」。
二、數學課本翰林版第九冊（五上）第八單元「我知道等值分數」。
三、王登傳、劉臻文(2002)，蟲食算與隱算法下冊 P21，前程出版社，2002.7 月出版。
四、萬國興著(2002 再版)，數學智慧遊戲 P32　34「對稱雙頭龍」，前程出版社。

評　語

080408 國小組數學科　第二名

乾坤大挪移-ABＸCD=BAＸDC

利用簡單的分數擴分找出 ABＸCD=BAＸDC 的全部解法，並能進一步擴展至同位數相乘〈如三位數 X 三位數〉和異位數相乘〈如二位數 X 三位數〉等的算法探討深入，方法適切。