中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組數學科

080403

國立科學工業園區實驗高級中學

指導老師姓名

劉如加

作者姓名

段凱文

梁廷宇

羅子瑞

黃蛟晟

王位繼承人

摘要

本專題完整的探討了「王位繼承人」的問題。透過大量觀察、分析、統整與邏輯歸納法則，我們得出一個十分簡潔明白的結論，即任意 N 個王子，在報 X 留 Y（X，Y 任意指定）的王位繼承規則下，應該站在哪個位置才能成為王位繼承人。

在我們的研究中，針對「王位繼承人」的位置預測，將所有狀況歸納成 2 大系統，4 種條件，推導出 L 值公式 4 項，S 值公式 2 項，這個結論涵蓋了所有不同 N，X，Y 值下的各種情況，並且所得公式簡單易懂，能得到這樣的研究結果，實在令人興奮。

壹、 研究動機：

數學老師問我們一個有趣的問題：「有一個國王想從 300 個才智出眾的王子中，選出 1 位王子繼承王位，於是國王宣佈，他將要讓王子們圍成一個大圈，報數 1~4 號，報數為 3 號的王子才可入圍繼續參選，其餘淘汰出局，報數繼續循環下去，由最後一輪入圍的王子中，報數為 3 號的王子繼承王位。聰明的威廉王子經過深思熟慮後，選了一個位置，結果，威廉王子果真獲得王位繼承權。請問威廉王子是站在第幾個位置？」這個題目引起我們熱烈的討論。此外，我們還想知道，如果改由報數為其他號碼（如 1 號，2 號，，，Y 號）的王子入圍參選，其餘淘汰出局，結果是誰來繼承王位呢？又如果，改變報數為 1 至 X 號，或總人數改變，該站在第幾個位置才能獲得王位繼承權？

貳、 研究目的：

探討當報數為 1 至 X 號，由報數為 Y 號（Y≦X 的任意正整數）的王子入圍繼續參選時，最後是由原先站在第幾個位置的王子繼承王位？

參、 名詞解釋：

王位繼承人的位置 S：由報數為 S 號的王子繼承王位
報數 X：報數 1 至 X 號
留數 Y：由報數為 Y 號的王子留下（入圍）繼續參選
報 4 留 3：報數 1 至 4 號，由報數為 3 號的王子入圍繼續參選，並以 X＝4，Y＝3 或（4，3）表示

肆、 文獻探討：

39 屆全國科展高小組作品「公主救王子」專題中探討的是：報數 1 至 X 號，並淘汰報數為 X 號的王子。本專題探討的是：報數 1 至 X 號，並留下報數為 Y 號的王子入圍繼續參選（報 X 留 Y）。兩者題目定義不同，研究方式不同，結果也不同。

伍、 研究過程：

本研究過程分為三個階段呈現，首先介紹（報 4 留 3）的例子研究，接著介紹（報 X 留

Y）的通則研究，最後綜合歸納研究結果探討不同 Y 值下 N 值與 S 值的規則。

階段一：以報 4 留 3 例子研究說明研究步驟（ 過程一 ）

一、找出報 4 留 3 時，最後繼承王位的王子位置，是否有規律存在？

我們以畫記方式模擬國王選王子的情形，畫掉的表示淘汰出局的人，未被淘汰的就可入圍，再自入圍的王子中報數淘汰，直到最後一位繼承王位的王子產生

（一）分色標示循環區：

我們擴大總人數至 135 人，並以畫記的方法，找出王位繼承人的位置，填入紀錄表中，並尋找規律。發現王位繼承人的位置，似乎以某種節奏循環出現，因此我們將各循環區分色標示出來，進一步探索。

（二）實驗紀錄如表一：

（N=總人數　X=報數　Y=留下入圍的王子位置　　S=王位繼承人的位置）

表一 X=4　Y=3

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
S			3	3	3	3	7	7	7	3	11	11	7	3	15
N	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
S	11	7	3	15	11	7	19	15	11	23	19	15	27	23	19
N	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
S	31	27	23	3	31	27	7	35	31	11	39	35	15	43	39
N	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
S	19	47	43	23	3	47	27	7	51	31	11	55	35	15	59
N	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
S	39	19	63	43	23	3	47	27	7	51	31	11	55	35	15
N	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
S	59	39	19	63	43	23	67	47	27	71	51	31	75	55	35
N	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
S	79	59	39	83	63	43	87	67	47	91	71	51	95	75	55
N	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
S	99	79	59	103	83	63	107	87	67	111	91	71	115	95	75
N	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
S	119	99	79	123	103	83	127	107	87	3	111	91	7	115	95

說明：

X=4　Y=3 可分為 **3 的倍數，3 的倍數＋1，3 的倍數＋2**，3 種循環區；於是，我們將 **3 的倍數**（記為 N≡0　mod3）的循環區著上**綠色**，將 **3 的倍數＋1**（記為 N≡1　mod3）的循環區著上紫紅色，將 **3 的倍數＋2**（記為 N≡2　mod3）的循環區著上**橘色**，以便於觀察循環區與循環節的變化。

（三）將各色循環區分區紀錄並觀察循環節變化找出由 N 值推導 S 值公式：

我們先將各色循環區分區紀錄，再按循環節奏，分節整理如下：

1. X=4　Y=3　　　N≡0　mod 3 紀錄如下

N	3	6	9	12	15	18	21	24	….	63	66	69	72	75
S	3	3	7	11	15	3	7	11	….	63	3	7	11	15

上表可以按循環節分節整理如下：

循環節	王子的人數 N	組數	王位繼承人的位置 S
	3	1	3
2	6，9，12，15	4	3，7，11，15
3	18，21，24，27~63	16	3，7，11，15~63
： ：	： ：	： ：	： ：
K	由 N 值推導 L 值公式 A $N=1\times4^{k-1}+2+3L$ $L=0，1，2，3\cdots，1\times4^{k-1}-1$	$1\times4^{k-1}$	由 L 值推導 S 值公式 A $S=L\times4+3$

2.X＝4　Y＝3　　N≡1　mod 3 紀錄如下

N	4	7	10	13	16	….	31	34	37	40	….	127	130	133
S	3	7	3	7	11	….	31	3	7	11	….	127	3	7

上表可以按循環節分節整理如下：

循環節	王子的人數 N	組數	王位繼承人的位置 S
1	4，7	2	3，7
2	10，13，16，19~31	8	3，7，11，15~31
3	34，37，40，43~127	32	3，7，11，15~127
： ：	： ：	： ：	： ：
K	由 N 值推導 L 值公式 B $N=2\times4^{k-1}+2+3L$ $L=0，1，2，3\cdots，2\times4^{k-1}-1$	$2\times4^{k-1}$	由 L 值推導 S 值公式 B $S=L\times4+3$

3. X＝4　Y＝3　　N≡2　mod 3 紀錄如下

N	5	8	11	14	17	20	…	47	50	53	56	…	191	194
S	3	7	11	3	7	11	…	47	3	7	11	…	191	3

上表可以按循環節分節整理如下：

循環節	王子的人數 N	組數	王位繼承人的位置 S
1	5，8，11	3	3，7，11
2	14，17，20，23~47	12	3，7，11，15~47
3	50，53，56，59~191	48	3，7，11~191
： ：	： ：	： ：	： ：
K	由 N 值推導 L 值公式 C $N=3\times4^{k-1}+2+3L$ L=0，1，2，3⋯，$3\times4^{k-1}-1$	$3\times4^{k-1}$	由 L 值推導 S 值公式 C $S=L\times4+3$

（四）發現：按餘數（0~2）來選擇『由 N 值推導 L 值公式』及『由 L 值推導 S 值公式』，便可逐步推算出王位繼承人位置 S。

進一步探討：當報數 1 至 X 號，由報數為 Y 號（Y≦X 的任意正整數）的王子入圍繼續參選時，其『由 N 值推導 L 值公式』及『由 L 值推導 S 值公式』的規則為何？

研究方式：進一步研究，我們發現，當 Y＝X 或 Y≠X 且 Y 值相同時，最後繼承王位的王子位置存在相似的規律，因此我們分別就 Y＝X，Y≠X 進行研究討論，並將研究結果綜合歸納整理

階段二：報 X 留 Y 通則研究（過程二~過程三 ）

本階段將分為 Y＝X 及 Y≠X（Y＝1，Y＝2，Y＝3）說明

二、當 Y＝X（即當報數為 1 至 X 號，由報數 Y＝X 號的王子入圍）

（一）、我們針對報 2 留 2，報 3 留 3，報 5 留 5 做實驗，將王位繼承人位置按各色循環區分區紀錄並觀察循環節變化找出規律。

（二）、歸納 Y＝X 時， 由 N 值推導 L 值的規律：

1.將 Y＝X『由 N 值推導 L 值』之規律彙整如下表：

N 值 (X，Y) 循環區	（2，2）	（3，3）	（4，4）	（5，5）	（6，6）
N≡0 mod（X−1）	$N=1\times2^{K-1}+L$	$N=2\times3^{k-1}+2L$	$N=3\times4^{k-1}+3L$	$N=4\times5^{K-1}+4L$	$N=5\times6^{K-1}+5L$

	L=1，2，，2^{K-1}	L=1，2，…$2\times3^{k-1}$	L=1，2，…$3\times4^{K-1}$	L=1，2，…$4\times5^{K-1}$	L=1，2，…$5\times6^{K-1}$
N≡1　mod（X−1）		N=$1\times3^{k-1}$+2L L=1，2，…3^{k-1}	N＝$1\times4^{k-1}$＋3L L=1，2，…$1\times4^{K-1}$	N＝$1\times5^{K-1}$+4L L=1，2，…$1\times5^{K-1}$	N＝$1\times6^{K-1}$＋5L L=1，2，…$1\times6^{K-1}$
N≡2　mod（X−1）			N＝$2\times4^{k-1}$＋3L L=1，2，…$2\times4^{K-1v}$	N＝$2\times5^{K-1}$+4L L=1，2，…$2\times5^{K-1}$	N＝$2\times6^{K-1}$＋5L L=1，2，…$2\times6^{K-1}$
N≡3　mod（X−1）				N＝$3\times5^{K-1}$+4L L=1，2，…$3\times5^{K-1}$	N＝$3\times6^{K-1}$＋5L L=1，2，…$3\times6^{K-1}$
N≡4　mod（X−1）					N＝$4\times6^{K-1}$＋5L L=1，2，…$4\times6^{K-1}$

2.依相同之餘數 r 進一步歸納『由 N 值推導 L 值』之規律如下表：

循環區	由 N 值計算 L 值
N≡0　mod（X−1）	N＝（X−1）X^{K-1}＋（X−1）L L＝1，2……，（X−1）X^{K-1}
N≡1　mod（X−1）	N＝1 X^{K-1}＋（X−1）L L＝1，2……，1 X^{K-1}
N≡2　mod（X−1）	N＝2 X^{K-1}＋（X−1）L L＝1，2……，2 X^{K-1}
N≡3　mod（X−1）	N＝3 X^{K-1}＋（X−1）L L＝1，2……，3 X^{K-1}
N≡4　mod（X−1）	N＝4 X^{K-1}＋（X−1）L L＝1，2……，4 X^{K-1}

（3）再依不同之餘數 r，進一步歸納如結果一：

結果一：

當 Y＝X 時，　由 N 值推導 L 值的規律如下表

由 N 值推導餘數 r	餘數 r	由 N 值計算 L 值
N≡r　mod（X−1）	r＝0	N＝（X−1）X^{K-1}＋（X−1）L L＝1，2，3……，（X−1）X^{K-1}
	r≠0	N＝r X^{K-1}＋（X−1）L L＝1，2，3……，r X^{K-1}

3、歸納當 Y＝X 時，由 L 值推導 S 值的公式：

先將 Y＝X 之 S 值公式彙整如下表，再進一步歸納如結果二：

（X ，Y）	（2，2）	（3，3）	（5，5）	（4，4）
S 值	S＝L×2	S＝L×3	S＝L×5	S＝L×4

結果二：

當 Y＝X 時，由 L 值推導 S 值的公式：S＝L×X

三、當 Y≠X（即當報數為 1 至 X 號，由報數 Y≠X 號的王子入圍）

（一）當 Y=1：（即當報數為 1 至 X 號，由報數為 1 號的王子入圍）

1、我們針對報 2 留 1，報 3 留 1，報 4 留 1，報 5 留 1 做實驗

2、歸納當 Y＝1 時，由 N 值推導 L 值的規律：

(1)、將 Y＝1『由 N 值推導 L 值』之規律彙整如下表：

N 值 循環區 (X，Y)	（2，1）	（3，1）	（4，1）	（5，1）
N≡0　mod（X−1）	$N=1\times2^{K-1}+L$ $L=0,\ 1,\ \cdots2^{K-1}-1$	$N=2\times3^{K-1}+2L$ $L=0,\ 1,\ \cdots2\times3^{K-1}-1$	$N=3\times4^{K-1}+3L$ $L=0,\ 1,\ \cdots3\times4^{K-1}-1.$	$N=4\times5^{k-1}+4L$ $L=0,\ 1,\ \cdots4\times5^{k-1}-1$
N≡1　mod（X−1）		$N=1\times3^{K-1}+2L$ $L=0,\ 1,\ \cdots1\times3^{K-1}-1$	$N=1\times4^{K-1}+3L$ $L=0,\ 1,\ \cdots1\times4^{K-1}-1.$	$N=1\times5^{k-1}+4L$ $L=0,\ 1,\ \cdots1\times5^{k-1}-1$
N≡2　mod（X−1）			$N=2\times4^{K-1}+3L$ $L=0,\ 1,\ \cdots2\times4^{K-1}-1.$	$N=2\times5^{k-1}+4L$ $L=0,\ 1,\ \cdots2\times5^{k-1}-1$
N≡3　mod（X−1）				$N=3\times5^{k-1}+4L$ $L=0,\ 1,\ \cdots3\times5^{k-1}-1$

(2)、依相同之餘數 r 進一步歸納『由 N 值推導 L 值』之規律如下：

循環區	由 N 值推導 L 值
N≡0　mod（X−1）	$N=(X-1)X^{K-1}+(X-1)L$
N≡1　mod（X−1）	$N=1X^{K-1}+(X-1)L$
N≡2　mod（X−1）	$N=2X^{K-1}+(X-1)L$
N≡3　mod（X−1）	$N=3X^{K-1}+(X-1)L$

(3)、依不同之餘數 r 再進一步歸納如結果三：

結果三：

Y＝1 時，由 N 值推導 L 值的規律如下表：

由 N 值推導餘數 r	餘數 r	N 值
N≡r　mod（X−1）	r＝0	$N=(X-1)X^{K-1}+(X-1)L$
	r≠0	$N=rX^{K-1}+(X-1)L$

3.歸納當 Y＝1 時，由 L 值推導 S 值的規律：

先將 Y＝1 之 S 值公式，彙整如下表，再進一步歸納如結果四：

(X，Y)	(2，1)	(3，1)	(4，1)	(5，1)
S 值	$S=L\times 2+1$	$S=L\times 3+1$	$S=L\times 4+1$	$S=L\times 5+1$

結果四：

當 Y＝1 時，由 L 值推導 S 值的公式：$S=L\times X+1$

(二) 當 Y=2：(即當報數為 1 至 X 號，由報數為 2 號的王子入圍)

1、我們針對報 3 留 2，報 4 留 2，報 5 留 2 做實驗。

2、歸納當 Y＝2 時，由 N 值推導 L 值的規律：

(1)、將 Y＝2『由 N 值推導 L 值』之規律彙整如下表：

N / (X，Y) 值 / 循環區	(3，2)	(4，2)	(5，2)
$N\equiv 0 \mod (X-1)$	$N=1\times 3^{k-1}+1+2L$ $L=0, 1, \cdots, 1\times 3^{K-1}-1$	$N=2\times 4^{k-1}+1+3L$ $L=0, 1, \cdots, 2\times 4^{k-1}-1$	$N=3\times 5^{K-1}+1+4L$ $L=0, 1, \cdots, 3\times 5^{K-1}-1$
$N\equiv 1 \mod (X-1)$	$N=2\times 3^{k-1}+1+2L$ $L=0, 1, \cdots, 2\times 3^{K-1}-1$	$N=3\times 4^{k-2}+1+3L$ $L=0, 1, \cdots, 3\times 4^{k-1}-1$	$N=4\times 5^{K-1}+1+4L$ $L=0, 1, \cdots, 4\times 5^{K-1}-1$
$N\equiv 2 \mod (X-1)$		$N=1\times 4^{k-2}+1+3L$ $L=0, 1, \cdots, 1\times 4^{k-1}-1$	$N=1\times 5^{K-1}+1+4L$ $L=0, 1, \cdots, 1\times 5^{K-1}-1$
$N\equiv 3 \mod (X-1)$			$N=2\times 5^{K-1}+1+4L$ $L=0, 1, \cdots, 2\times 5^{K-1}-1$

(2) 依相同之餘數 r 進一步歸納：

循環區	由 N 值推導 L 值
$N\equiv 0 \mod (X-1)$	$N=(X-2)X^{K-1}+1+(X-1)L$
$N\equiv 1 \mod (X-1)$	$N=(X-1)X^{K-1}+1+(X-1)L$
$N\equiv 2 \mod (X-1)$	$N=1X^{K-1}+1+(X-1)L$
$N\equiv 3 \mod (X-1)$	$N=2X^{K-1}+1+(X-1)L$

(3) 依不同之餘數 r 再進一步歸納如結果五：

結果五：

Y＝2 時，由 N 值推導 L 值的規律如下表

由N值推導餘數r	餘數r	由N值推導L值
N≡r　mod（X－1）	r＝0	N＝（X-2）　X^{K-1}+1＋（X－1）L
	r＝1	N＝（X-1）　X^{K-1}+1＋（X－1）L
	r≧2	N＝（r-1）　X^{K-1}+1＋（X－1）L

3.歸納當 Y＝2 時，由 L 值推導 S 值的規律：

先將 Y＝2 之 S 值彙整如下表，再進一步歸納如結果六：

（X，Y）	（3，2）	（4，2）	（5，2）
S 值	S＝L×3+2	S＝L×4+2	S＝L×5+2

結果六：

當 Y＝2 時，由 L 值推導 S 值的公式： S＝L×X+2

（三）當 Y＝3：（即當報數為 1 至 X 號，由報數為 3 號的王子入圍）

1、我們針對報 4 留 3，報 5 留 3，報 6 留 3 實驗。

2、歸納當 Y＝3 時，由 N 值推導 L 值的規律：

（1)、將 Y＝3『由 N 值推導 L 值』之規律彙整如下表：

(X,Y) N 值 循環區	（4，3）	（5，3）	（6，3）
N≡0　mod（X−1）	N=1×4^{k-1}+2+3L L=0，1，⋯，1×4^{k-1}−1	N=2×5^{K-1}+2＋4L L=0，1，⋯，2×5^{K-1}−1	N=3×6^{K-1}+2＋5L L=0，1，⋯，3×6^{K-1}−1
N≡1　mod（X−1）	N=2×4^{k-1}+2+3L L=0，1，⋯，2×4^{k-1}−1	N=3×5^{K-1}+2＋4L L=0，1，⋯，3×5^{K-1}−1	N=4×6^{K-1}+2＋5L L=0，1，⋯，4×6^{K-1}−1
N≡2　mod（X−1）	N=3×4^{k-1}+2+3L L=0，1，⋯，3×4^{k-1}−1	N=4×5^{K-1}+2＋4L L=0，1，⋯，4×5^{K-1}−1	N=5×6^{K-1}+2＋5L L=0，1，⋯，5×6^{K-1}−1
N≡3　mod（X−1）		N=1×5^{K-1}+2＋4L L=0，1，⋯，1×5^{K-1}−1	N=1×6^{K-1}+2＋5L L=0，1，⋯，1×6^{K-1}−1
N≡4　mod（X−1）			N=2×6^{K-1}+2＋5L L=0，1，⋯，2×6^{K-1}−1

（2）依相同之餘數 r 進一步歸納如下：

循環區	由 N 值推導 L 值
N≡0　mod（X－1）	N＝（X－3）X^{K-1}＋2＋（X－1）L
N≡1　mod（X－1）	N＝（X－2）　X^{K-1}＋2＋（X－1）L
N≡2　mod（X－1）	N＝（X－1）　X^{K-1}＋2＋（X－1）L

N≡3　mod（X－1）	N＝ X^{K-1}＋2＋（X－1）L
N≡4　mod（X－1）	N＝ 2 X^{K-1}＋2＋（X－1）L

（3）依不同之餘數 r 再進一步歸納如結果七：

結果七：

Y＝3 由 N 值推導 L 值的規律如下表

由 N 值推導餘數 r	餘數 r	由 N 值推導 L 值
N≡r　mod（X－1）	r＝0	N＝（X－3）X^{K-1}＋2＋（X－1）L
	r＝1	N＝（X－2）X^{K-1}＋2＋（X－1）L
	r＝2	N＝（X－1）X^{K-1}＋2＋（X－1）L
	r≧3	N＝（r－2）X^{K-1}＋2＋（X－1）L

3.歸納當 Y＝3 時，由 L 值推導 S 值的步驟：

先將 Y＝3 之 S 值彙整如下表，再進一步歸納如結果八：

（X，Y）	（4，3）	（5，3）	（6，3）
S 值	S=L×4+3	S=L×5+3	S=L×6+3

結果八：

當 Y＝3，由 L 值推導 S 值的公式：S＝L×X＋3

階段三：綜合歸納結果一至結果八研究結果，探討不同 Y 值下之 N 值，L 值與 S 值的規則（過程四 ）

四、探討不同 Y 值下 N 值，L 值與 S 值的規則：

將結果一至結果八之規則彙整如下：(參過程一~過程三)

Y 值	Y＝X	Y≠X		
		Y＝1	Y＝2	Y＝3
r 值	N≡r　mod（X－1）	N≡r　mod（X－1）	N≡r　mod（X－1）	N≡r　mod（X－1）

L 值	①當 r＝0 N ＝（X-1）X^{K-1} ＋（X-1）L ②當 r≠0 N＝r X^{K-1} ＋（X-1）L	①當 r＝0 N＝（X-1）X^{K-1} ＋（X-1）L ②當 r≧1 N＝r X^{K-1} ＋（X-1）L	①當 r＝0 N＝X-2）X^{K-1} ＋（X-1）L ②當 r＝1 N＝（X-1） X^{K-1} ＋（X-1）L ③當 r≧2 N＝（r-1）X^{K-1} ＋（X-1）L	①當 r＝0 N＝（X-3）X^{K-1} ＋（X-1）L ②當 r＝1 N＝（X-2） X^{K-1} ＋（X-1）L ③當 r＝2 N＝（X-1）X^{K-1} ＋（X-1）L ④當 r≧3 N＝（r-2）X^{K-1} ＋（X-1）L
S 值	S＝L×X	S＝L×X＋1	S＝L×X＋2	S＝L×X＋3

發現：

1.不同 Y 值下 N 值，L 值與 S 值的規則，可歸納成 Y=X 及 Y≠X 兩大系統，如表三：

表三　王位繼承人的位置預測公式表

系統 公式 值	Y＝X	Y≠X
r 值	N≡r　mod（X－1）	N≡r　mod（X－1）
L 值	①當 r＝0 N＝（X-1）X^{K-1}＋（X-1）L 當 r≠0 N＝r X^{K-1}＋（X-1）L	①當 r＜Y 時， N＝〔X－（Y－r）〕X^{K-1} ＋（Y－1）＋（X-1）L ②當 r≧Y 時， N＝〔r－（Y－1）〕X^{K-1} ＋（Y－1）＋（X-1）L
S 值	S＝L×X	S＝L×X＋Y

2.根據總人數 N，與報數 X，留下入圍號碼 Y 來計算出餘數 r 與 L 值，便可進一步來推導王位繼承人的位置（S 值）。

陸、結論：

一、本研究探討總人數不同之下，改變報數及留下入圍王子的號碼，試著從中找尋規律，來預測王位繼承人的位置（S）。我們從大批的實驗數據中，發現長短不同的循環節奏，根據不同的循環節奏，用顏色分出循環區，再分色區找出循環節的規則，進而

發現，當 Y 值和 X 值相同，有相似規則存在。因此，再進一步探討相同 Y 值與不同 Y 值下（即 Y=1，2，3，4），總人數 N 與 L 值的關係，最後找出預測 S 值的公式。經過漫長的研究，使用歸納法來尋找規律，數千組數據最後竟然可以依據 Y=X 及 Y≠X 歸納成兩大系統，每個系統再依 r 值範圍不同分成兩大類（如表四），真是令我們興奮！

表四　王位繼承人的位置預測公式表

系統 / 公式值	Y＝X	Y≠X
r 值	N≡r　mod（X－1）	N≡r　mod（X－1）
L 值	①當 r＝0 $N=(X-1)X^{K-1}+(X-1)L$ ②當 r≠0 $N=rX^{K-1}+(X-1)L$	①當 r＜Y 時， $N=[X-(Y-r)]X^{K-1}+(Y-1)+(X-1)L$ ②當 r≧Y 時， $N=[r-(Y-1)]X^{K-1}+(Y-1)+(X-1)L$
S 值	S＝L×X	S＝L×X＋Y

二、**例證**：透過一系列研究，我們發現，根據總人數 N，與報數 X，留下入圍號碼 Y，使用表四公式，便可計算出餘數 r 值與 L 值，再進一步計算，便能預測王位繼承人的位置。以下我們**舉 4 個例子來說明如何由 N，X，Y 找到 r 值與 L 值，並進一步計算出 S 值（王位繼承人的位置）：**

（一）　Y＝X：

例子 / r,L,S 值	（1）當 r＝0，N＝125 以（2，2）為例說明	（2）當 r≠0，N＝279 以（5，5）為例說明
r 值	（1）N≡r　mod（X－1） 125≡r　mod（2－1） 125＝（2-1）×125＋r ∴r＝0	（2）N≡r　mod（X－1） 279≡r　mod（5－1） 279＝（5-1）×69＋3 ∴r ＝3
L 值	（1）當 r=0 時 $N=(X-1)X^{K-1}+(X-1)L$ $125=(2-1)\times2^{K-1}+(2-1)L$ L=61	（2）當　r≠0 $N=rX^{K-1}+(X-1)L$ $279=3\times5^{K-1}+(5-1)L=3\times25+4L$ L=51
S 值	（1）　S＝L×X S＝61×2=122 ∴當總人數為 125 人報 2 留 2 時站在第 122 號王子為王位繼承人	（2）S＝L×X S＝51×5＝255 ∴當總人數為 279 人報 5 留 5 時站在第 255 號王子為王位繼承人

（二） Y≠X

例子 / r,L,S 值	（1）當 $r<Y$， $N=125$ 以（4，3）為例說明	（2）當 $r\geqq Y$， $N=279$ 以（6，2）為例說明
r 值	（1）$N\equiv r \mod (X-1)$ $125\equiv r \mod (4-1)$ $125=(4-1)\times 41+r$ $\therefore r=2$	（2）$N\equiv r \mod (X-1)$ $279\equiv r \mod (6-1)$ $279=(6-1)\times 55+4$ $\therefore r=4$
L 值	（1）當 $r<Y$ 時， $N=[X-(Y-r)]X^{K-1}$ $+(Y-1)+(X-1)L$ $125=[4-(3-2)]\times 4^{K-1}+(3-1)$ $+(4-1)L=3\times 4^2+2+3L$ $L=25$	（2）當 $r\geqq Y$ 時 $N=[r-(Y-1)]X^{K-1}$ $+(Y-1)+(X-1)L$ $279=[4-(2-1)]\times 6^{K-1}+(2-1)$ $+(6-1)L=3\times 36+(2-1)+5L$ $L=34$
S 值	（1）$S=L\times X+Y$ $S=25\times 4+3=103$ ∴當總人數為 125 人報 4 留 3 時站在第 103 號王子為王位繼承人	（2）$S=L\times X+Y$ $S=34\times 6+2=206$ ∴當總人數為 279 人報 6 留 2 時站在第 206 號王子為王位繼承人

評　語

080403 國小組數學科　佳作

王位繼承人

從實驗、觀察、整理資料，做了很好的分析，並能歸納結果導出一般式，誠屬不易。