中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組數學科

080402

臺北縣私立及人國民小學

指導老師姓名

蕭綺嫻

作者姓名

汪澤文

質因數判別法—位數劃分法

摘要

我們因爲對質因數的判別法產生好奇而著手研究。我們由質數 3、11 的判別方法切入，先研究出其判別的原理，並用它試著找出 7 的判別方法。接著我們，將數字不斷劃分觀察，終於研究出一種質數都能通用的判別法，我們稱之爲位數劃分法。其原理是依據任何一數都可以分解成質數的若干倍和位數劃分法所賴以判別的形式。其方法是把數字不斷的分成個位數和其他位數，求其個位數乘以設定值與其他位數之和或差，再觀察能否被質數整除。

壹　研究動機

上數學課時，我們學到有關質數因數倍數的問題，知道質數 3、 11 的倍數的判別方法。，爲什麼 3 、11 的倍數可以這樣判斷呢？其他質數的倍數是否也能直接判斷？我們去請教老師，老師建議我們不妨著手探究看看，於是在老師的指導下，我們做了以下研究。

貳　研究目的

找出質因數共同的判別方法（位數劃分法）

問題一、找出質因數 3、11 判別法的原因。
問題二、找出 3、7、11 等質數的共同判別法。
問題三、求出其他質數的判別法。

參　研究過程與方法

問題一、找出質因數 3、11 判別法的原因。

【步驟一】找出 3 的倍數可用各位數相加的結果來判別的原因。

把 3 的倍數分解開來觀察看看。詳見【附件 1】

發現：3 的倍數都可分解成 3 的整數倍加上各位數字之和。

例如：

$2268 = 3\times3\times111\times2 + 3\times3\times11\times2 + 3\times3\times6 + (2+2+6+8)$

且各位數之和能被 3 除盡，如$(2+2+6+8)$能被 3 除盡所以此數能被 3 整除；若此數各位數字之和不能被 3 除盡，餘數正好是各位數字之和除以 3 的餘數。

例如：

$463 = 3\times3\times44 + 3\times3\times6 + (4+6+3)$

$4+6+3=13$　13 $\div3=4\cdots1$，463 不能寫成 3 的倍數和。

$463\div3=154\cdots\cdots1$　不能除盡，且餘數正好是$(4+6+3)\div3$ 的餘數 1。

【步驟二】仿照【步驟一】找出 11 的倍數可用其奇數位之和與偶數位之和的差除以 11 來判斷的原因。

列出 11 的倍數分解成各位數和觀察：詳見【附件 1】

發現 11 的倍數都可分解成 11 的若干倍，與其奇數位之和與偶數位之和的差兩部分，

例如：3652＝11×(300＋60＋5－30－6＋3)－【(3＋5)－(6＋2)】

因為奇數位之和與偶數位之和的差這部分剛好是 0，【(3＋5)－(6＋2)】＝0 全數就正好是 11 的若干倍，所以可以被 11 整除。

若奇數位之和與偶數位之和的差這部分不是 0 或 11 的倍數，此數就不是 11 的倍數，且餘數剛好是奇數位之和與偶數位之和的差除以 11 的餘數。

例如：

3412＝11×（10×10×3＋10×4＋1－10×3－4＋3）＋【(4＋2)－(3＋1)】

【(4＋2)－(3＋1)】≠0 實際除除看 3412 ÷11＝310 …2 不能除盡，

餘數剛好是【(4＋2)－(3＋1)】＝2 奇數位和與偶數位和之差。

【步驟三】仿照質數 3 的判別原理，看看能否找出 7 的判別方法。

列出 7 的倍數，並把算式分解開來觀察看看。詳見【附件 1】

發現：7 的倍數都可以分解成 7 的若干倍與（個位數＋3×十位數＋2×百位數＋2×3×千位數＋2×2×萬位數＋2×2×3×十萬位數……以此類推）之和兩部分，且後者的和正好也是 7 的若干倍。

例如：1554=7×(14×7×1+14×3×1+2×1+14×5+5)+(2×3×1+2×5+3×5+4)

且 (2 ×3×1+2×5+3×5+4)是 7 的 5 倍

若後者的和不是 7 的倍數，此數就不是 7 的倍數。

例如：543=7×(14＋4)＋(2×5＋3×4＋3)

$$=7\times18+7\times3\frac{4}{7}=7\times21\frac{4}{7}$$

(2×5＋3×4＋3)＝25 25 ÷7=3…4 不能被 7 整除

實際除除看 543 ÷7=21…4 無法被 7 整除 不是 7 的倍數

其餘數正好是(2×5＋3×4＋3) ÷7 的餘數 4

綜合結果得知：7 的倍數的確可用（個位數＋3×十位數＋2×百位數＋2×3×千位數＋2×2×萬位數…）能否被 7 除盡觀察，若不能除盡，餘數正好是判別式除以 7 的餘數。

問題二、找出質數 3、7、11 的共同判別方法。

【步驟一】列出 3 的倍數分析思考觀察。詳見【附件 2】

經過演算發現：如果把 3 的倍數分成個位數和其他位數兩部分會有下面結果。

2|1 發現如果 個位的 1×2－其他位數 2＝0

結果 0 ÷3＝0（能被 3 整除）

46|2 發現如果 其他位數 46－個位的 2×2＝42

結果 42 ÷3＝14（能被 3 整除）

又 2 |1 發現如果 個位的 1×1＋其他位數 2＝3

結果 3÷3＝1（能被 3 整除）

46|2　發現如果　其他位數 46＋個位的 2×1＝48

結果 48÷3＝16（能被 3 整除）

演算結果情形一定是這樣的嗎？詳見【附件 2】

我們發現合乎算式的數字不止一個。我們又發現這些數字 5、8、11……。4、7、10……。都差 3，他們代入式子產生的意義是一樣的。因此爲了計算方便，我們將這倍數值設定在比 0 大比質數小的範圍之內。

【步驟二】 找出前面所得結果的原因，把各數分解開來觀察看看。

例如：

397|2　397　－2×2＝393　393　÷3＝131

397|2　397　＋2×1＝399　399　÷3＝133

實際除除看　3972　÷3＝1324　　是 3 的倍數

分解開來觀察

397|2＝3×1193＋（397－2×2）＝3×1193＋3×131

＝3×1191＋（397＋2×1）＝3×1191＋3×133

再舉一例；

1768|9　1768　－9×2＝1750　1750　÷3＝583….1

1768|9　1768　＋9×1＝1777　1777　÷3＝592….1

實際除除看　17689　÷3＝5896.…1　不是 3 的倍數

分解觀察：

$$1768|9＝3\times5313＋（1768－9\times2）＝3\times5313＋3\times583\frac{1}{3}$$

$$＝3\times5304＋（1768＋9\times1）＝3\times5304＋3\times592\frac{1}{3}$$

原來 3972 可以被分解成 3 的整數倍之和〈判別式的部分是 3 的整數倍〉，17689 不可以被分解成 3 的整數倍之和〈判別式的部分不是 3 的整數倍〉 故此用此判別式判斷是否含有質因數 3 是可行的。

歸納結果得知：一個數如果是 3 的倍數其

個位乘以 2 和其他位數的差剛好是 3 的若干倍。

個位乘以 1 和其他位數的和也剛好是 3 的若干倍。

【步驟三】利用步驟三的方法，尋找 7 的判別法。詳見【附件 3】

【步驟四】用上述方法來找 11 的判別法。詳見【附件 4】

【步驟五】歸納結果：

質數 3、7、11 的倍數，可以被分解成 3、7、11 的整數倍和此數個位數的某倍與其他位數之和或差兩部分 ，且個位數的某倍與其他位數之和或差的部分一定也是質數的整數倍 ；我們可依此性質作爲判別質數的方法。

因爲在使用此方法時，必須先將數字劃分成個位數和其他位數 ，因此我們把這種判別質因數的方法稱做位數劃分法。

問題三、求出質數的共同判別法。

【步驟一 】仿照問題二所得方法分別找出 13~53 質數的判別法。

詳見【附件 2】【附件 3】【附件 4】【附件 5】

【步驟二】我們找到了 13 ~53 間各質數倍數的判別方法，而此判別方法的關鍵所在是所設定的倍數。接著我們想找出各質數設定倍數的關係。〈以下簡稱設定值〉

【步驟三】把上述資料列表整理觀察。

為了方便觀察，我們設 質數為 P 加法設定值為 α

減法設定值為 β

P	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53
α	1	5	10	4	12	2	7	3	28	26	37	13	33	16
β	2	2	1	9	5	17	16	26	3	11	4	30	14	37

發現 $\alpha+\beta=$ P ，令質數 P 的加法設定值為 α_p、減法設定為 β_p

【步驟四】列出質數 3 、13、23、43 及其 α_p、β_p 觀察

p	α_p	β_p
3	$\alpha_3=1$	$\beta_3=2$
13	$\alpha_{13}=4$	$\beta_{13}=9$
23	$\alpha_{23}=7$	$\beta_{23}=16$

………

【步驟五】 整理成算式觀察

$\alpha_{13}-\alpha_3=4-1=3$ $\alpha_{23}-\alpha_{13}=7-4=3$ $\alpha_{43}-\alpha_{23}=13-7=6$

$\beta_{13}-\beta_3=9-2=7$ $\beta_{23}-\beta_{13}=16-9=7$ $\beta_{43}-\beta_{23}=30-16=14$

得知 ：個位數是 3 的質數，如果十位相差 1，其 α 值都差 3；

如果十位差 2，α 值則差 3 的 2 倍 6 。

個位數是 3 的質數，如果十位相差 1，其 β 值都差 7；

如果十位差 2，β 值則差 7 的 2 倍 14 。

【步驟六】再整理算式歸納導出公式：

個位數是 3 的質數其判別法加法設定值 $\alpha_p=1+(p-3)\div10\times3$

減法設定值 $\beta_p=2+(p-3)\div10\times7$

（其中被加數 1、2 是第 1 個個位出現 3 的質數的設定值）

【步驟七】根據此規則代入其他個位數是 3 的質數如：73、83 等看看其 α β 之值是否正確

詳見【附件 2】此處略

【步驟八】仿照上述個位 3 的情形觀察質數 7 、17、37、47 及其 α_p、β_p

歸納結果導出公式：詳見【附件 3】

個位數是 7 的質數其判別法加法設定值 $\alpha_p=5+(p-7)\div10\times7$

減法設定值 $\beta_p=2+(p-7)\div10\times3$

（其中被加數 5、2 是第 1 個個位出現 7 的質數的設定值 ）

根據此規則試著找出其他個位數是 7 的質數如：67、97 等看看是否正確

【步驟九】仿照上述個位 3 的情形觀察質數 11 、31、41 及其 α_p、β_p

歸納結果導出公式：

個位數是 1 的質數其判別法加法設定值 $\alpha_p=10+(p-11)\div10\times9$

減法設定值 $\beta_p=1+(p-11)\div10\times1$

（其中被加數 10、1 是第 1 個個位出現 1 的質數的設定值 ）

根據此公式試著找出其他個位數是 1 的質數如：61、71 等的設定值看看是否正確。詳見【附件 4】

【步驟十】仿照上述個位 3 的情形觀察質數 19 、29、59 及其 α_p、β_p

歸納結果導出公式：

個位數是 9 的質數其判別法加法設定值 $\alpha_p=2+(p-19)\div10\times1$

減法設定值 $\beta_p=17+(p-19)\div10\times9$

（其中被加數 2、17 是第 1 個個位出現 9 的質數的設定值）

根據此公式試著找出其他個位數是 9 的質數如：79、89 等看看是否正確。詳見【附件 5】

【步驟十一】位數劃分法可以不斷劃分嗎？

雖然劃分位數法能夠用以判別質因數 的存在，但遇到數目大的數字該怎麼辦？是否可以不斷劃分呢？

結果發現：如果數字較大不易觀察，可以繼續利用劃分法一步一步的劃分下去，直到可以判斷爲止。詳見【附件 6】

【步驟十二】位數劃分法若劃分的位置不同，其加減法設定值，會一樣嗎？

〈如果能將劃分位置放於中間，將可使觀察計算更方便。〉

結果發現：質數不同，劃分的位置不同，所得的加減法設定值結果也不一致，但是它們加減法設定值的和一定等於質數 。

詳見【附件 7】

肆　研究結果

一、由【問題一】的研究中，我們得到質數 3、7、11 的每一倍數都可分解成所要判別的型式所以可簡單判別能否被其整除；若不能整除，餘數即爲該數除以質數的餘數。

二、由【問題二】的研究，我們發現了質數 3、7、 11 的判別方法除了平日課堂上所用的方法之外，還有別的方法，我們稱之爲位數劃分法。

三、由【問題三】的研究觀察中，我們也發現位數劃分法，也可適用於除了 2、5 之外的質數。其判別方式可簡化如下：

① 個位×設定值＋其他部分（個位除外的所有位數）

② 個位×設定值－其他部分（個位除外的所有位數）

或（其他部分－個位×設定值）

而 同一質數 ① ②兩式中的設定值是不同的兩數

對不同的質數其設定值也不同

四、在使用位數劃分法前，必須先找設定值。由研究中得知：我們可依質數個位數的不同分別代入公式，求其設定值。

五、在研究中我們也發現：加法設定值或減法設定值，並不是唯一的，不過，我們把設定值

的範圍定在：比 0 大，比質數小之內，那麼此設定值就是唯一的了，且一個質數的加法設定值和減法設定值之和剛好等於質數。

六、在使用位數劃分的判別方法時，對於不能整除的數，我們希望能找出其餘數與實際餘數間的關係。令我們失望的是，除了質數 3 以外，位數劃分法所得的餘數並不等於實際的餘數，因此不能由判別法得知餘數結果。但我們卻發現位數劃法所得餘數有兩種現象：〈1〉代入加法設定值所得餘數=代入減法設定值所得餘數；或〈2〉代入加法設定值所得餘數+代入減法設定值所得餘數=質數。

七、如果數字很大，代入判別算式的結果無法立即判斷能否被質數整除，可以將結果繼續劃分檢視，直到能判斷為止。

伍　討論

一、由研究中我們明白了課堂中用以判別是否含有某質因數的方法，其原理是能否將該數分解成所要判別的形式，也就是該數必須能分解成此質因數的若干倍和所要判別的形式。根據這原理，我們發現了判別質因數的位數劃分法，此法能適用在除了 2、5 之外質因數的判別上。

二、㈠位數劃分法是用根據什麼原理來判別質因數的存在呢？

能夠用這種方式判斷的理由是：

〈1〉假設想要判別 A 數是否含有質數 p 的因數，A 就一定可以分解成質數 p 的整數倍加上其個位數乘以加法設定值與其他位數之和，或分解成質數 p 的整數倍加上其個位數乘以減法設定值與其他位數之差。

例如：8922 可以分解成 3×2676＋（1×2＋892）或 3×2678＋（892－2×2），

1、2 分別是質數 3 的加減法設定值，只要括號內的結果能被 3 整除，8922 就能被 3 整除，3 就是 8922 的質因數。

〈2〉當該數不能整除，位數劃分和實際餘數為什麼不一樣呢？原因是該數不能分解成質數的整數倍和所要判別的形式之和。又為什麼判別式用加法設定值代入和用減法設定值代入除以質數其餘數相加等於質數或餘數會相等呢？其原因是使用劃分法判別，代入加法和減法設定值結果之和或差剛好是該質數的倍數。

例如：檢驗質數 73　124|3　3 ×22＋124＝190　190 ÷73＝2…44　（不能整除）

3×51−124＝29　29 ÷73＝0…29　（不能整除）

實際除除看　1243 ÷73＝17….2　（不能整除）

餘數也不等

因為 $1243 = 73\times 14\frac{31}{73} +（3\times 22+124）= 73\times 16\frac{46}{73} +（3\times 51-124）$

$73\times 14\frac{31}{73}$，$73\times 16\frac{46}{73}$ 不是 73 的整數倍，

所以 1243 ÷73 的餘數≠（3×22＋124）÷73 的餘數

≠（3×51－124）÷73 的餘數

但加法結果 190+減法結果 29=219

219÷73=3…0 餘數 44+29=73（等於質數）

又例如：檢驗質數 79　856|8　8 ×8＋856＝920　920 ÷79＝11….51　（不能整除）

856　　　　　$-8\times71=288$　288　$\div79=3\cdots51$　（不能整除）

實際除除看　8568　$\div79=108\cdots36$　　（不能整除）餘數 $51=51\neq36$

因為　8568　$=79\times96\frac{64}{79}$　+（$8\times8+856$）$=79\times104\frac{64}{79}$ +（$856-8\times71=288$）

$79\times96\frac{64}{79}$　，　$79\times104\frac{64}{79}$ 不是 79 的整數倍，但分子相同

加法結果 920－減法結果 288=632　　$632\div79=8\cdots0$　　餘數 $51-51=0$

（二）但是如果數字很大，劃分之後計算結果數字仍然很大，無法馬上看出呢？利用位數劃分法的原理，還可以繼續劃分下去，直到能夠判斷為止，原因是劃分後所得的數總可以分解成質數的倍數和。

例如 892|2　第一次可分解成 $3\times2676+$（$1\times2+892$）。

$1\times2+892=89|4=3\times267+$（$1\times4+89$），

$1\times4+89=93$

$93\div3=31$ 能整除，就算得到結果了。

（三）一個質數的加減法設定值可以不止一個。因為一個數被分解成的某質數的倍數形式可以有很多分法。

例如：21 是 3 的倍數，$21=3\times6+$（$1\times1+2$）

$=3\times5+$（$4\times1+2$）

減法亦然。但是我們將設定值的範圍設在 0＜設定值＜質數，則無論加減法找到的數都是唯一的。

（四）位數劃分法中

其設定值可由公式代入求得，公式是由觀察歸納得來。

分析內容如下：

在找尋個位是 3 的質數其減法設定值時，最快的方法，是找出其個位是 1 的最小倍數。

例如：$3\times7=21$　$13\times7=91$　$23\times7=161$　（也就是質數的 7 倍）

因為這樣可以將個位的 1 乘以其他位的數字相減，得到 0，很快找出減法設定值。

如此我們發現：其設定值是以 7 的數字增加，十位每增加 1，設定值就增加一個 7。

個位是 7、1、9 的質數減法設定值也先找出其個位是 1 的最小倍數

結果個位是 7 的質數減法設定值是以 3 的數字增加，十位每增加 1，設定值就會增加一個 3。

個位是 1 的質數減法設定值會以 1 的數字增加，十位每增加 1，設定值就增加一個 1。

個位是 9 的質數減法設定值會以 9 的數字增加，十位每增加 1，設定值就增加一個 9。

至於加法設定值可由減法設定值推知，因為在研究過程中得知質數等於其加法設定值和減法設定值之和。且兩者是互補的。

例如：個位數是 3 的質數 p

加法設定值α_p＝1＋（p－3）÷10×3

減法設定值β_p＝2＋（p－3）÷10×7

質數 3 的加法設定值是 1 減法設定值是 2 兩者和為 3

又加法設定值公式α_p＝1＋（p－3）÷10×3 與

減法設定值公式β_p＝2＋（p－3）÷10×7

遞增數字加法為 3，減法為 7，其和剛好是 10。

同樣的個位數是 7、1 或 9 的質數情形亦如此。

（五）比較位數劃分法判別 3、11 和課堂上的判別法有何相同處？

舉例說明：要判別 123 是否是質數 3 的倍數。

課堂上的做法：

①1＋2＋3=6　② 6 ÷3=2　（是）

位數劃分法：

①12|3=3×1＋12=15

② 1 |5=5×1＋1=6

③ 6 ÷3=2 （是）

結果原理是一樣的，只是課堂上的做法是把每位數一次相加完畢；位數劃分法是把步驟分成一段一段的相加。

質數 11 的情形與質數 3 是相似的。

陸　結論

一、〈1〉質因數 3 可用各位數字之和÷3 判別，若不能整除餘數等於各位數字之和÷3 的餘數。

〈2〉質數 11 可用〈偶位數之和－奇位數之和〉÷11 判別，若不能整除餘數等於〈偶位數之和－奇位數之和〉÷11 的餘數

〈3〉質數 7 可用〈個位+3×十位+2×百位+2×3×千位+…〉÷7 判別，若不能整除餘數等於〈個位+3×十位+2×百位+2×3×千位+…〉÷7 的餘數

二、除了 2、5 以外，質因數都可利用劃分位數法判別，方法如下：

設數字為 A 欲判別的質數為 P 則

（一）①A 的個位×加法設定值＋其他位數 〈得數 B_1〉

觀察 B_1 能否被 P 除盡

②B_1 的個位×加法設定值＋其他位數 〈得數 B_2〉

觀察 B_2 能否被 P 除盡

……

（二）①A 的個位×減法設定值－其他位數

其他位數－A 的個位×減法設定值 〈得數 C_1〉

觀察 C_1 能否被 P 除盡

……

以上步驟可自行決定能判斷即止

【備註】（一）（二）的算式都可用來判別質因數，可選擇設定值較小，容易計算者

代入即可。

三、設定值的算法 ： 依質數個位數字代入公式

個位數字是 3

加法設定值＝1＋（p－3）÷10x3＝1＋（p－3）÷10x3

減法設定值＝2＋（p－3）÷10x7

＝（3－1）＋（p－3）÷10x（10－3）

個位數字是 7

加法設定值＝5＋（p－7）÷10x7＝5＋（p－7）÷10x7

減法設定值＝2＋（p－7）÷10x3

＝（7－5）＋（p－7）÷10x（10－7）

個位數字是 1

加法設定值＝10＋（p－11）÷10x9

＝（11－1）＋（p－11）÷10x（10－1）

減法設定值＝1＋（p－11）÷10x1＝1＋（p－11）÷10x1

個位數字是 9

加法設定值＝2＋（p－19）÷10x1

＝（19－17）＋（p－11）÷10x（10－9）

減法設定值＝17＋（p－19）÷10x9＝17＋（p－19）÷10x9

總括其公式　個位是 3、7 者

可寫爲：減法設定值＝個位相同第一個質數的設定值 ＋（質數－個位相同第一個質數）÷10x（10－質數的個位）

加法設定值＝（質數－減法設定值）＋（質數－個位相同第一個質數）÷10x質數的個位

個位是 1、9 者

減法設定值＝個位相同第一個質數的設定值 ＋（質數－個位相同第一個質數）÷10x質數的個位

加法設定值＝（質數－減法設定值）＋（質數－個位相同第一個質數）÷10x（10－質數的個位）

四、 另 加法設定值＋減法設定值＝質數

因爲加、減法設定值的算式有互補之處，我們可選擇容易記憶和數字小的算式代入運算，在使用質因數劃分位數法時，才更有效率。

評　語

080402 **國小組數學科 第三名**

質因數的判別—位數劃分法

以過去質因數判別法〈依質數不同而異〉為出發點，試圖找出一共同方法，就問題解決而言，值得嘉許。再者個人獨力完成，勇氣令人敬佩，態度認真，表達能力頗佳，有大將之風，值得肯定。