

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030425

桃園縣立光明國民中學

指導老師姓名

游章圳

黃郁智

作者姓名

趙曉雯

林葦如

江博楨

華婕伶

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學

組 別：國中

作品名稱：一池水知多少？辛普森法則之運用

關 鍵 詞： 生態池、 辛普森法則、 _____（最多三個）

編 號：

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號由國立臺灣科學教育館統一編列。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

壹、摘要

農曆年前石門水庫的水位急速的下降，導致民生及工業用水不足，而有限制用水的政策，更別說是供給農業使用的農業用水，農夫們因用水不夠而休耕，像這種情形每逢乾旱季節時就時常的發生，是不是我們石門水庫的水裝的不夠多？而我們又要如何知道石門水庫的蓄水量？適逢數學課學到體積、面積與容積的算法，於是我們就想利用這種算法來思考，如何測量石門水庫的蓄水量？

在思考的過程中經由資料蒐集與分析，幾經討論乃決定使用辛普森法則運用於容積的計算，但水庫的容積是如此的龐大，欲解此難題，有組員提出何不以學校內生態池為實驗標的，因此，本實驗以生態池為標的，希望借此方法能推及各種不規則形狀的水池、湖泊、水庫……等等的容積計算，同時在操弄過程中能了解水池、湖泊、水庫所具有的蓄水與防洪功能，又借由電腦強大的運算功能處理繁雜的測量數據，更能精準算出結果。

貳、研究動機

學校科學展覽邀稿期間，碰巧數學科課堂上學到體積、面積和容積這個單元，又剛好我們學校有生態池已完工，就想說我們能不能把課堂上學的東西去測量生態池水(如照片 1~3)的容積，於是著手草擬題目及積極收集資料，以期能在科學展覽中有所表現。



照片 1 生態池一隅 1



照片 2 生態池一隅 2



照片 3 生態池一隅 3

參、研究目的

- 一、藉由科展來做初步的研究。
- 二、藉此機會了解數學裡的辛普森法則，運用在計算跟容積。
- 三、培養團隊合作精神。
- 四、由實務的操作，進而了解數學的理論。

肆、研究設備及器材

一、測量器材(如照片 4)

- 1.布捲尺。
- 2.測量標竿。
- 3.尼龍繩。
- 4.鋼釘。



照片 4 測量器材

二、模型器材(如照片 5)

- 1.保力龍。
- 2.黏土。
- 3.圖釘及線。
- 4.白膠。



照片 5 模型製作器材

三、繪圖及統計設備(如照片 6)

- 1.電腦。
- 2.Microsoft Excel 統計軟體。
- 3.Auto CAD 繪圖軟體。
- 4.資料夾及磁片。
- 5.列表機。



照片 6 電腦設備及器材

伍、研究過程與方法

一、研究過程

1.擬定題目

在決定題目時，首先由本研究小組每人提出一至三個主題，然後討論每個主題的可行性，經本研究小組討論提出數個可行性方案後，再與指導老師深入探討，最後決定以『一池水知多少——辛普森法則之運用』為題。

2.收集資料

題目確定後本研究小組隨即分配搜集資料工作，有上網搜尋資料，有至學校圖書館及蘆竹鄉圖書館等。

3.分析資料

經搜集之資料，詳細閱讀並留取與主題有關之資料，翻閱學校內曾參與科展之資料，以做為範本。

4.擬定實驗過程

以學校內的生態池為實驗研究對象，針對生態池的大小與周遭環境的了解，擬定實驗操作過程。

實驗操作過程如下：

- 〈1〉生態池環境勘查(如照片 7)。
- 〈2〉準備器材及設備(如照片 8)。
- 〈3〉現場實驗操作(如照片 9~10)。
- 〈4〉測量數據(如照片 11~12)。

5.準備器材及設備

依據所擬定實驗操作過程準備器材及設備。

6.實務操作

依據所擬定實驗操作過程施做。

〈1〉生態池環境勘查



照片 7 生態池環境勘查

〈2〉準備器材及設備



照片 8 器材及設備

〈3〉現場實驗操作 1



照片 9 現場實驗操作 1

現場實驗操作 2



照片 10 現場實驗操作 2

〈4〉測量數據 1

測量數據 2



照片 11 測量數據 2



照片 12 測量數據 2

7.數據分析

以下各表為實驗操作時所測得之數據

表一 縱向軸(Y)之深度數據表

點位	X0 標高	X1 標高	X2 標高	X3 標高	X4 標高	X5 標高	X6 標高	X7 標高
Y0	0	0	0	0	0	0	0	0
Y1	0	0	0	0	0	0	0	0
Y2	0	0	0	0	-31	0	0	0
Y3	0	0	0	-32	-69	0	0	0
Y4	0	0	0	-69.5	0	0	0	0
Y5	0	0	0	-78.5	0	0	0	0
Y6	0	0	-30.5	-34	-30	0	0	0
Y7	0	0	-42	-55	-45	0	0	0
Y8	0	0	-37	-61	-32	0	0	0
Y9	0	0	-68	-75	-24	0	0	0
Y10	0	0	-85	-61.5	0	0	0	0
Y11	0	-45	-81.5	0	0	0	0	0
Y12	0	-55	-64.5	0	0	0	0	0
Y13	0	-43	-58	0	0	0	0	0
Y14	0	0	-43.5	-44	0	0	0	0
Y15	0	0	0	0	0	0	0	0

以下各圖是依據表一縱向軸(Y)之深度數據，繪製剖面圖(如圖 1~4)。

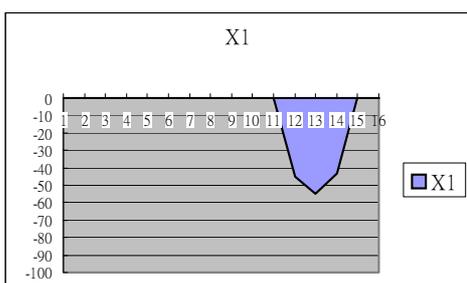


圖 1 X1 軸向剖面圖

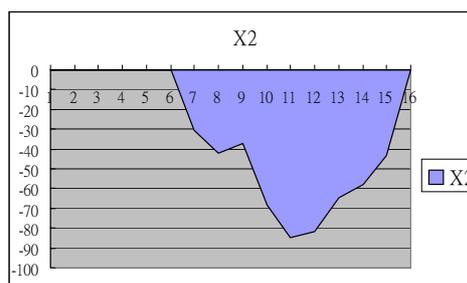


圖 2 X2 軸向剖面圖

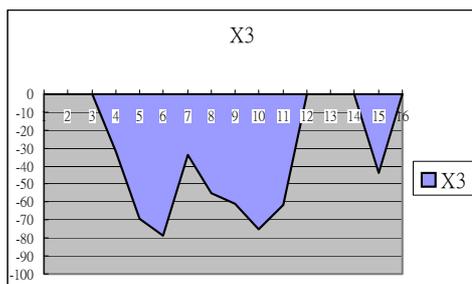


圖 3 X3 軸向剖面圖

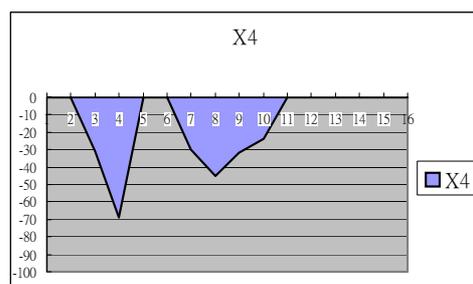


圖 4 X4 軸向剖面圖

表二 橫向軸(X)之深度數據表

點位	Y0 標高	Y1 標高	Y2 標高	Y3 標高	Y4 標高	Y5 標高	Y6 標高	Y7 標高	Y8 標高	Y9 標高	Y10 標高	Y11 標高	Y12 標高	Y13 標高	Y14 標高	Y15 標高
X0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-45	-55	-43	0	0
X2	0	0	0	0	0	0	-30.5	-42	-37	-68	-85	-81.5	-64.5	-58	-43.5	0
X3	0	0	0	-32	-69.5	-78.5	-34	-55	-61	-75	-61.5	0	0	0	-44	0
X4	0	0	-31	-69	0	0	-30	-45	-32	-24	0	0	0	0	0	0
X5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

以下各圖是依據表二橫向軸(X)之深度數據，繪製剖面圖(如圖 5~ 17)。

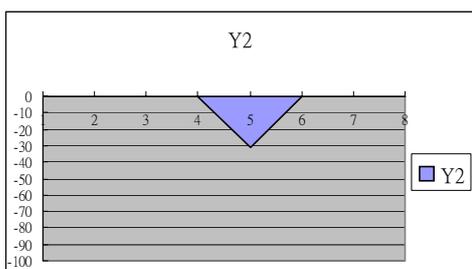


圖 5 Y2 軸向剖面圖

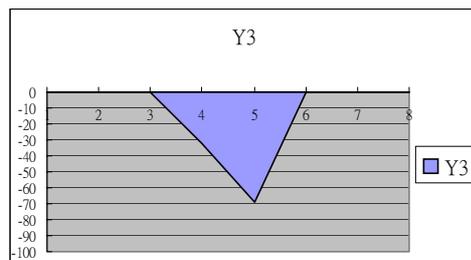


圖 6 Y3 軸向剖面圖

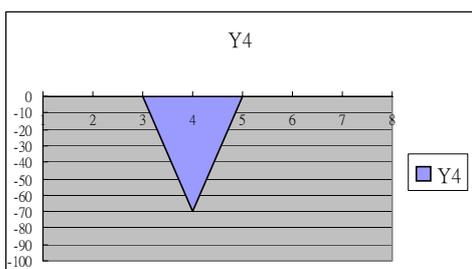


圖 7 Y4 軸向剖面圖

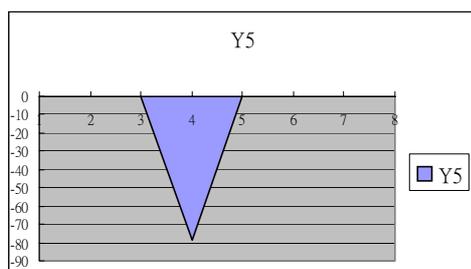


圖 8 Y5 軸向剖面圖

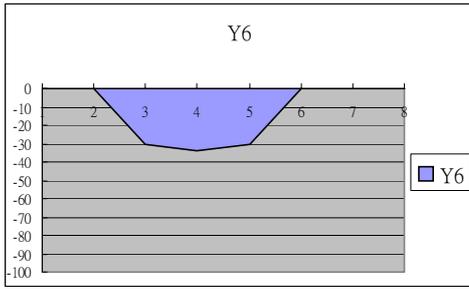


圖 9 Y6 軸向剖面圖

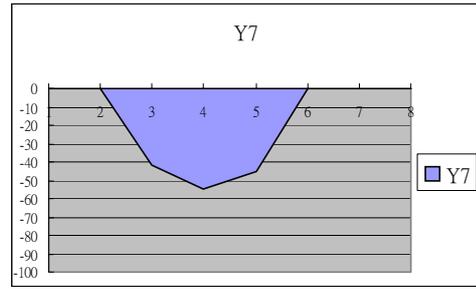


圖 10 Y7 軸向剖面圖

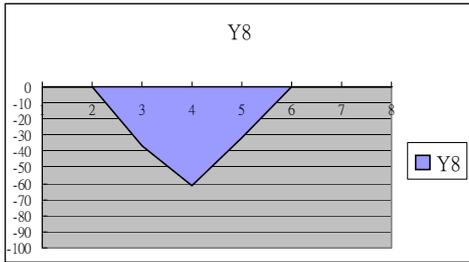


圖 11 Y8 軸向剖面圖

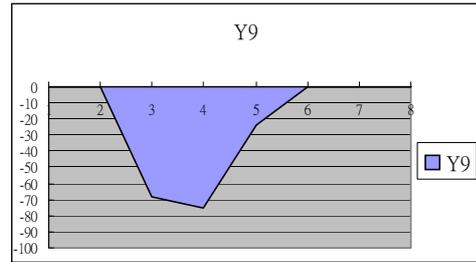


圖 12 Y9 軸向剖面圖

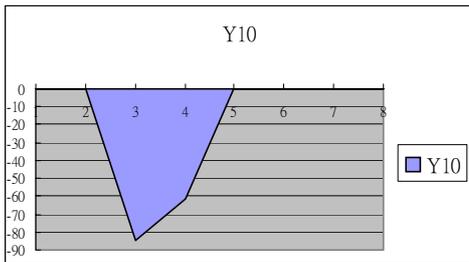


圖 13 Y10 軸向剖面圖

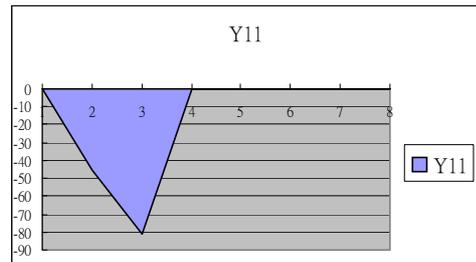


圖 14 Y11 軸向剖面圖

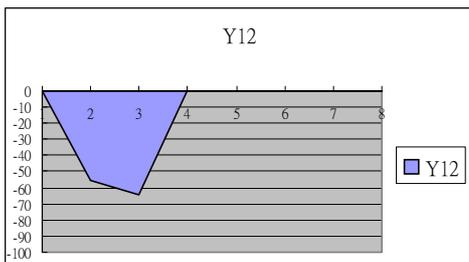


圖 15 Y12 軸向剖面圖

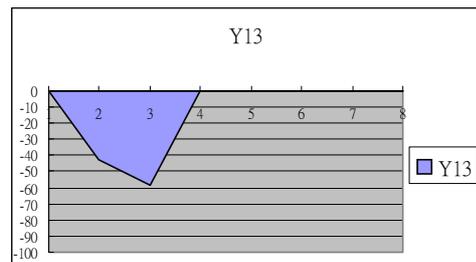


圖 16 Y13 軸向剖面圖

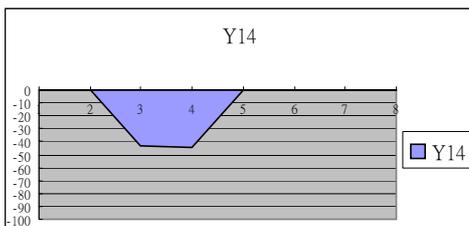
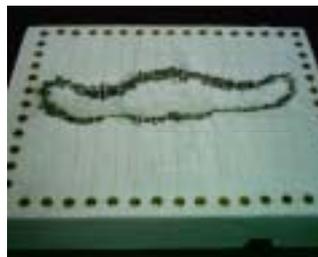


圖 17 Y14 軸向剖面圖

8.模型製作

如模型模擬生態池之狀況(如照片 13)。



照片 13 生態池模型

二、研究方法

1.一般測量法(方格法)

係按照原地形實地放設方格坐標值，每方格為 1 平方公尺，依所要縮製地形圖之比例尺，於方格紙上縮小繪製相應坐標，然後實地描繪出現況地形圖(如圖 18~19)。

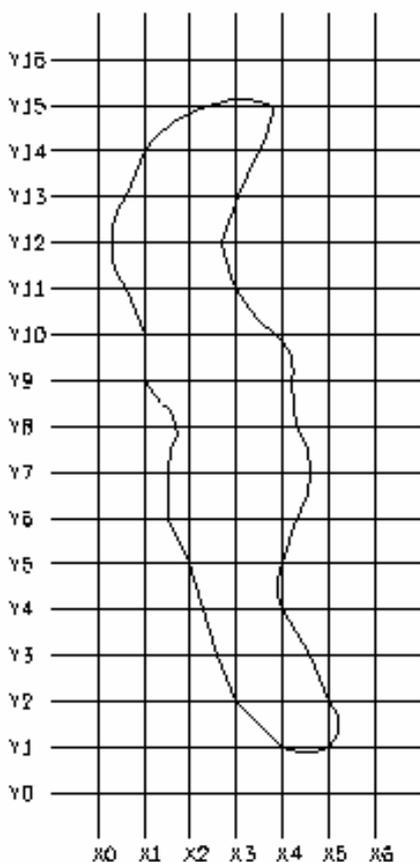


圖 18 生態池現況地形圖

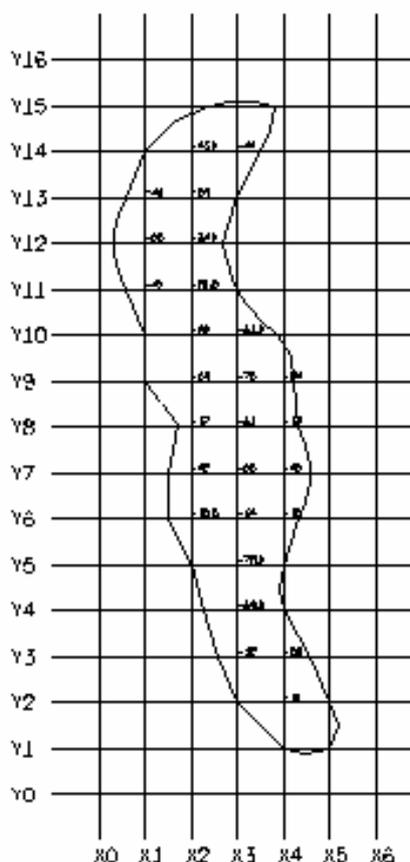


圖 19 生態池現況深度圖



照片 14 現場實驗操作 3



照片 15 現場實驗操作 4

2.繪圖與面積統計法

運用繪圖軟體 AUTO CAD 繪製等高線圖(如圖 20)，並一一求得各等高線之面積。

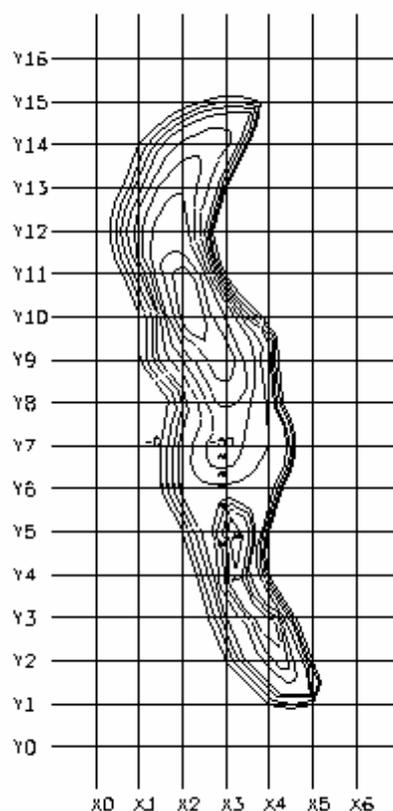
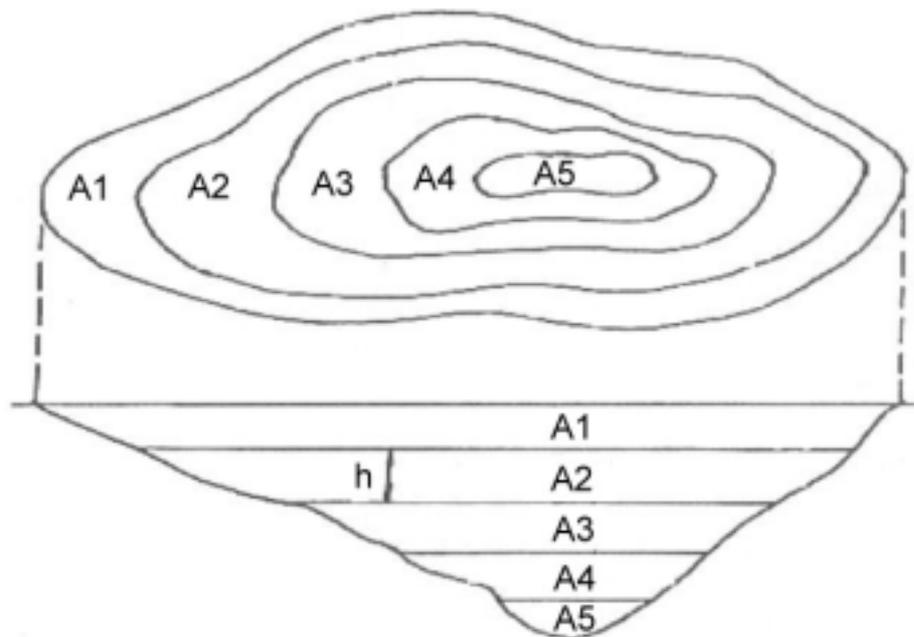
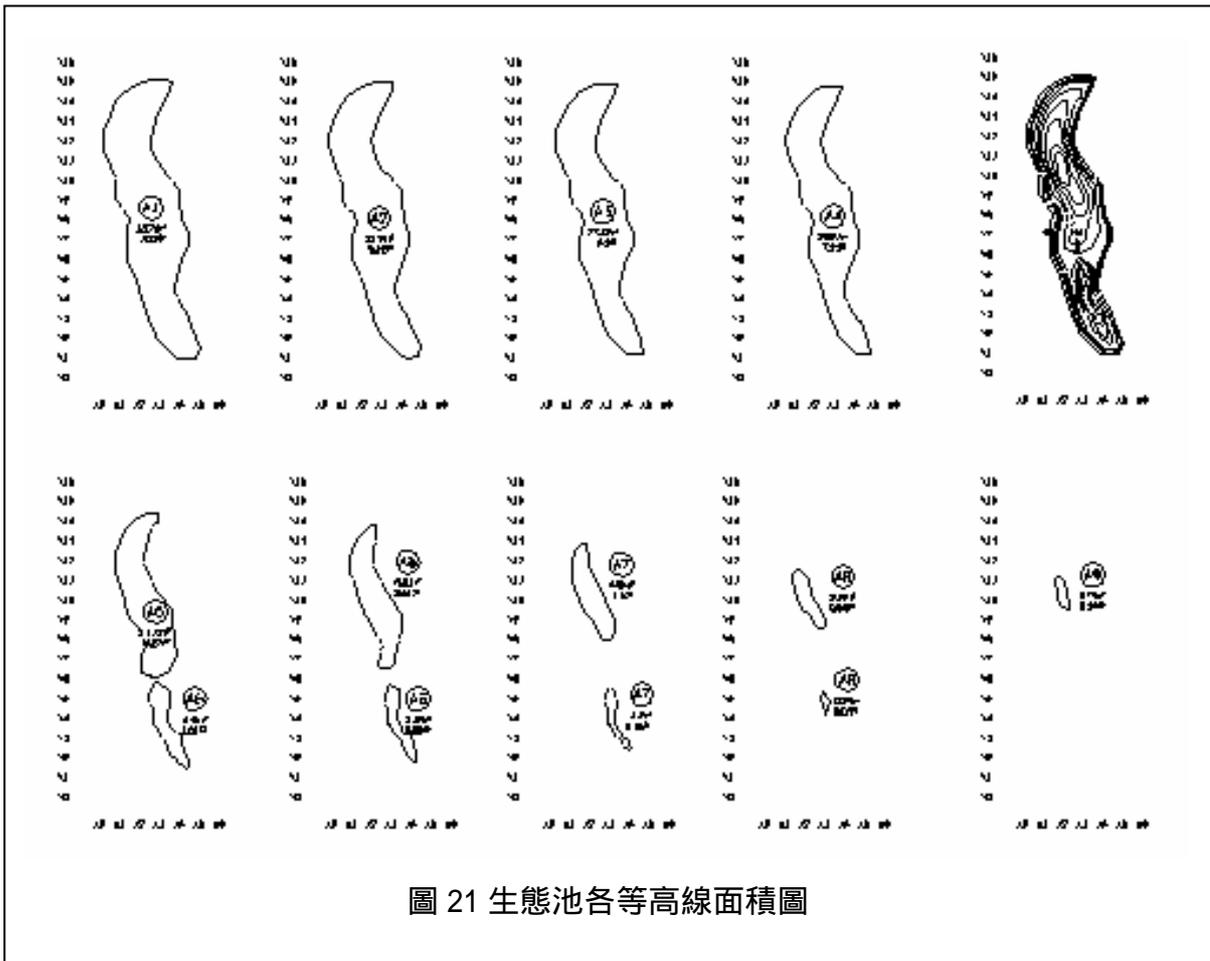


圖 20 生態池等高線圖

在每條等高線間以每 10 公分深度為單位區隔，依所量得之數據製成表三生態池與水位等高線面積表。

表三 生態池與水位等高線面積表

生態池面積		水位面積	
編號	面積 M ²	編號	面積 M ²
A1	33.73		
A2	30.39		
A3	27.12		
A4	23.91	A1	23.91
A5	16.47	A2	16.47
A6	10.81	A3	10.81
A7	6.15	A4	6.15
A8	2.53	A5	2.53
A9	0.79	A6	0.79



3. 辛普森法則

即數學之辛普森法則的應用。若有 n 條等高線，且 n 為奇數，則其容積總和為：

$$V = \frac{h}{3} [A_1 + 4(A_2 + A_4 + \dots + A_{n-1}) + 2(A_3 + A_5 + \dots + A_{n-2}) + A_n]$$

式子中；

V ：代表水的容積總和。

h ：代表等高線的高度。

A_1 ：第一條等高線所圍閉的面積。

.

.

A_n ：第最後一條等高線為奇數時所圍閉的面積。

若 n 為偶數，則其容積總和為：

$$V = \frac{h}{3} [A_1 + 4(A_2 + A_4 + \dots + A_{n-2}) + 2(A_3 + A_5 + \dots + A_{n-3}) + A_{n-1}] + \frac{h}{3} (A_{n-1} + A_n)$$

式子中；

V ：代表水的容積總和。

h ：代表等高線的高度。

A_1 ：第一條等高線所圍閉的面積。

.

.

A_n ：第最後一條等高線為偶數時所圍閉的面積。

為配合計算所得到之面積代入辛普森法則公式所得計算結果如下：

生態池容積：

$$V = 0.1/3 \times (33.73 + 4 \times (30.39 + 23.91 + 10.81 + 2.53) + 2 \times (30.39 + 23.91 + 10.81 + 2.53) + 0.79) = 14.68 \text{m}^3$$

經由計算得到生態池共可容納 14.68m^3 的水，若我們再以圓錐形體積計算公式來比較；

$$V = Ah/3$$

$$V = 33.73 \times 0.85/3 = 9.56 \text{m}^3$$

所得結果與辛普森法則結果是有所差異，探討原因是圓錐形體積計算公式適合用於規則形狀體積的計算，與本次實驗的不規則形狀體積的計算是不適用。

接下來計算生態池內目前容納有多少水？經測量池內水位距離岸邊之垂直高度為 30 公分，以此為基準計算得到如下結果。

水位容積：

$$V=0.1/3 \times (23.91+4 \times (16.47+6.15)+2 \times 10.81+2.53)+0.1/3 \times (2.53+0.79) = 4.73\text{m}^3$$

所計算得目前生態池內共有水 4.73m^3 。

陸、研究結果

一、能了解不規則水池能容納多少水

經過實驗操弄過程，由傳統測量法(方格法)測得數據，再借 AUTO CAD 繪圖軟體轉繪成生態池現況圖及等高線圖，並利用 Microsoft Excel 統計軟體統計數據及繪製生態池剖面圖，最後再經由辛普森法則的運用計算出生態池容納多少水。

整體的實驗流程，使本組團隊能充分了解不規則水池的計算方法，並能了解水池容納了多少水。

二、能了解湖泊所具有防洪功能

實驗過程中，測量生態池時是以岸邊為水準基面，量測水池深度時產生兩種數據，一種為水準基面至池底深度，另一種為水準基面至池面深度(測量時為 30 公分)，經計算得水池容積為 14.68m^3 ，水位容積為 4.73m^3 ，兩者相減為水池容積 $14.68\text{m}^3 - \text{水位容積 } 4.73\text{m}^3 = 9.95\text{m}^3$ ，由此可知生態池尚能容納 9.95m^3 的水，藉此可推知，湖泊或池塘平時可供灌溉水利功能，洪水時期可容納河川的水患，除非到了湖泊或池塘的滿水位，也就是水位溢出岸邊時湖泊與池塘的功能才喪失。

另外水庫也具有同樣的功能，當水位至低水位時水庫已經快無水可供應，反之當水位快超過滿水位時，水庫則需要洩洪以確保水庫的安全。

三、能了解辛普森法則用在測量容積方面

辛普森法則係微積分學中用以計算不規則錐形體的一種方法，本研究實驗運用此方法，確實可計算得到生態池的水池容積與水位容積，而且對辛普森法則有進一步的認識。

柒、討論

初期討論：題目的探討、實驗的方法、實驗的步驟、資料如何收集、工作的分配。

實驗中討論：實驗方法的修正、實驗步驟的修正、工作的新分配、新問題的產生與解決。

期末討論：實驗結果與預期成果檢討、實驗結果與日常生活數量關係是否結合、實驗結果與資訊科技融入、實驗結果與數理基礎理論運用。

捌、結論

初期結論：

1. 辛普森法則是能算出生態池所容納的水量。
2. 借由電腦 Microsoft Excel 統計軟體除可精準計算結果亦可輔助繪圖。
3. 經由操弄確定水池、湖泊、水庫所具有的蓄水與防洪功能。

期末結論：

本實驗研究得到結論如下：

1. 透過測量方法之一的方格法，於實地放設每 1 平方公尺(1m*1m)，雖然能得到不錯的結果，但若將方格細分更小，相信可以得到更嚴謹的結果。
2. 實驗期初所考慮之資訊科技軟體與硬體之支援尚未成熟，以致於實驗中遭遇許多困難，雖然能一一克服，如增加「AUTO CAD」及「非常好色」軟體的應用與支援，及實驗設備不足的測量工具，如「水準儀」、「測距儀」、「水準標尺」……等均影響實驗精度與結果。
3. 本實驗過程全體組員全程參與，悉能吸收整體研究流程步驟與過程，對於科學展覽的題目選擇能以生活化為題，測量學校內生態池蓄水量，以符合科學融入生活化為目的。
4. 經由實驗操弄及所得數據與結果，能印證水池、湖泊、水庫所具有的蓄水與防洪功能是確實具有地。
5. 辛普森法則雖為微積分學科內容，但透過簡化的解釋與運用於本實驗研究中，實不失為一不錯方法。

玖、參考資料及其他

- 1.資料來源 :<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Binet.html>
《東海大學圖書館》牛頓數學辭典
- 2.微積分(calculus)，張哲源，臺北市，臺灣東華，民 90
- 3.微積分(calculus)，Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon 著，張天生譯，
臺北市，臺灣東華，民 89-90
- 4.微積分及解析幾何圖示，潘樹森譯，台北市，徐氏基金，民 68[1979]
- 5.測量學 I II，曾清涼等 4 人，台北，大中國，民 91

附錄一

辛普森的生平

Thomas Simpson

湯瑪斯 辛普森



(1710.02.20~1761.05.14)

英國

出生年代 :西元 1710 年 2 月 20 號

國籍 :英國

著作(或貢獻) :可能學說,關於流動的教義和應用小故事 :湯瑪斯 辛普森最爲人之的就是綜合插值和數字的方法。他從 1737 年開始私下教數學並開始在數學上寫課文。並於 1740 年出版了"可能學說"。辛普森在倫敦咖啡房子中教學被一大群流動講演者認出。他在錯誤理論方面和算術平均的證明比單一觀察更好。辛普森在 1750 年出版了二冊關於"流動"的教義和應用。在 1754 年他成爲了女士日誌主筆。

資料來源 :<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Binet.html>

編輯者 :數四 A 羅月敏 487051426

詳細資料 :

湯瑪斯 辛普森最爲人之的就是綜合插值和數字的方法。他的第一份工作是織布工。他從 1737 年開始私下教數學並開始在數學上寫課文。他也繼續工作。可能學說在 1740 年出版了。

辛普森在倫敦咖啡房子中教學被一大群流動講演者認出。他在錯誤理論方面和算術平均的證明比單一觀察更好。

辛普森在 1750 年出版了二冊關於流動的教義和應用。這包含欄的工作。在 1754 年他成爲了女士日誌主筆。在查理斯哈特教派對辛普森的描述下(在辛普森死後 35 年)是很吸引人的。

它說辛普森先生常到了低公司, 說他曾暴飲和喝酒:但是這必須觀察他的家庭的錯誤行爲產生它保持紳士公司的權力,好像那樣獲得更好的酒。它公平的指出其他人認爲辛普森的行爲是無過失的 ..

附錄二

辛普森法則

在 $f(x)$ 投影到 V_1 上的時候，就是要做 $\langle f(x), \phi(2^j x - k) \rangle$ 經由變數變換，其實做的就是 $\int f(x) \phi(x) dx$ ，如果在這裏用一般的數值積分，像是梯形，辛普森，高斯...，必須要 $f(x) \cdot \phi(x)$ 是某種的連續程度的函數，也就是要足夠的平滑可微才會準確，以 $f \cdot \phi \in C^n$ 而言，梯形法需要 $n=2$ ；辛普森法需要 $n=2$ ；至於高斯法若是 p 個點則需要 $n=2p+1$ ，原則上就是用這些數值積分，被積分函數需要有 n 個泰勒展開，而這些數值方法就是將前面的 $n-1$ 階多項式積分出來。所有的數值積分法的目標都是相同的，它們都是要將某個階數的多項式的積分算出來。如果有一種數值積分法能把三階多項式積出來，而被積分函數是四次連續可微，那麼積分出來的值和實際值就只差在四次微分的那個誤差項。所以所有的數值積分都在追求同一個目的，用最少的點，做出最多階多項式的積分。但是所有的想法都基於一件事：被積分函數要能展出那麼多階的多項式，也要有好的收斂誤差項，如果沒有的話，再好的積分法都是白搭的，因為根本沒有那麼多的多項式可以積分，沒有那麼好的誤差項可以收斂，在這裏即使 f 很平滑，可是 ϕ 不連續的話，乘起來還是不連續的，所以這就是問題了， f 和 ϕ 都要夠平滑，如果 $\phi(x)$ 不屬於 C^r ， $f \cdot \phi$ 就沒有希望了，換句話說，若 $\phi(x)$ 不夠平滑，則一般的數值積分法是沒有效率的，根據經驗，如果一定要用的話，梯形法就夠了，反正大家都不準確。

但是如果我們用到自格函數的特性，那麼事情可以做得更好，現在我們先不討論太一般的情況，先看 $\int x^m \phi(x) dx, m=0,1,2,\dots$

當 $m=0$ 時，是簡單的 $\int \phi(x) dx=1$ ，當 $m=1$ 時，

$$\int x f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 [(x+k)/2] f(x) (1/2) dx$$

$$= (1/4) \int_0^1 x f(x) dx + k = (1/4) (2 \int_0^1 x f(x) dx + \int_0^1 k dx)$$

其中，因為 $\int_0^1 k dx$ 是可以求得的數，令其為 b

所以 $4 \int_0^1 x f(x) dx = 2 \int_0^1 x f(x) dx + b$ ，所以 $\int_0^1 x f(x) dx = b/2$ 這並沒有牽涉到數值積分，而是完全正確的值，同理可知

$$\int_0^1 x^m f(x) dx = \sum_k c_k \int_0^1 \left(\frac{x+k}{2}\right)^m f(x) \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_k c_k \int_0^1 (x+k)^m f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2^m} \int_0^1 x^m f(x) dx + \frac{1}{2^{m+1}} \left(\sum_k c_k \sum_{n=0}^{m-1} c_n^m k^{m-n} \int_0^1 x^n f(x) dx \right)$$

這是二項式展開的結果，所以

右式最後的積分可由歸納法得知，而且這些值在理論上是完全正確的，所以我們得到以下的結論：如果我們知道所有的 C_i ,

則在理論上即可正確得知 $\int x^m \phi(x) dx$ 。所以任何一個平滑的函數，投影到一個解析空間時，須要求 $\int f(x) \phi(x) dx$ 這種內積。如果這個函數能夠做多項式展開的話，就只要對那幾個多項式做積分，而多項式乘上 $\phi(x)$ 的積分值，我們是知道的，把積分出來的值乘上它的係數，加起來就是我們所要的積分值，所以這種積分值就沒有問題了。

以此類推 $\int x^m \phi(x) \phi(x-k) dx$ 是幾乎一樣的演算法，而且在計算的過程中，Lawton Matrix 也一樣會出現，如果要做微分方程求解，常需要做計算諸如

$\int \phi'(x) \phi(x-k) dx$, $\int \phi''(x) \phi(x-k) dx$, $\int x^m \phi'(x) \phi(x-k) dx$, $\int x^m \phi''(x) \phi(x-k) dx$ 這類的積分，在做這種積分的時候，就會發現 Lawton Matrix 都會出現，都可以把它們變成與 Lawton Matrix 有關的 eigenvalue 問題，或是線性聯立方程求解的問題，有時候也會用到歸納法，由此可以推得，若 ϕ 是一次可微，Lawton Matrix 就會多出兩個固定的 eigenvalue: 1/2, 1/4，以此類推，若在多一次可微，則固定的 eigenvalue 也會持續增加，而那些相對應的 eigenvector 則和上面所做的事有關。

如果 $\phi(x)$ 可微，微分之後的導函數仍會是一個 scaling function，由此可導出 1/2 和 1/4 這兩個 eigenvalue。

附錄三

春雨好補 翡翠、石門大口喝

【記者陳大鵬／桃園報導】

拜月初春雨如注之賜，石門水庫海拔蓄水標高昨天下午 5 時突破 221.6 公尺，因進水量持續，水位仍緩慢上升，現有蓄水量足供到五月底、雨季來臨前的民生和工業用水之需，經濟部水利署昨天已宣布第二階段限水解除。北區水資源局石門水庫管理中心主任簡昭群進一步指出，拜上一波春雨之賜，迄昨天晚上為止，石門水庫主支流的進水量仍為出水量的兩倍，水位標高可望上升到 222 公尺。

其中，氣象預測也指出，這個周日尚有一波鋒面南下，鋒面若再度帶來雨量可觀的降雨，民生和工業用水將更為充裕。

他說，月初春雨不斷，累積降雨量除創下歷年二月分平均雨量的新紀錄外，石門水庫水位標高也從先前的 214 公尺一路往上挺升。

水位標高在昨天下午五時已上升至 221.6 公尺以上，有效蓄水量已達 8159 萬噸，有效容量比則達百 34.61%，其中因每天進水量尚有 150 餘萬噸，出水量則只要 79 萬噸左右，今天解除第二階段限水後，每天的供水量將增加五、六萬噸，不過，進水量仍大於出水量，水位標高還會持續向上攀升，五月梅雨季節來臨前的民生和工業用水足可充裕供應。

翡翠水庫因春節以來的連續降雨，頗有進帳，翡翠水庫管理局局長康世芳表示，目前水庫水位為 161.35 公尺，比本月 5 日上升了 6 公尺，已高過下限值--151.8 公尺甚多，預估正常供水到 5 月底應該沒有問題。

資料來源：奇摩網站新聞 93.1.27，<http://tw.news.yahoo.com/>

評語

030425 國中組數學科 最佳(鄉土)教材獎

一池水知多少？辛普森法則之運用

從實際鄉土的生活問題出發，嘗試用辛普森法則解決問題，

巧妙地將數學與生活產生聯結，立意頗佳。