

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030418

臺中市立安和國民中學

指導老師姓名

陳鑫達

李國賢

作者姓名

林柏延

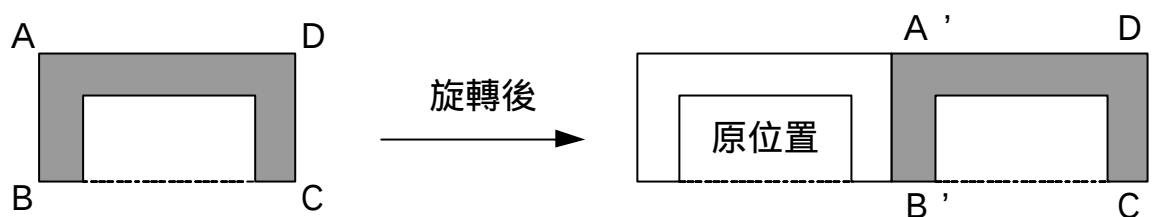
周義超

平面座標上長方形沙發旋轉問題之解的存在性

壹、摘要

這篇報告要探討下列的「轉沙發的問題」是否有解？

有一個長方形的沙發，如圖一，若要求每次只能以「四個頂點逆時針或順時針連續旋轉 90 度」的方式轉動，請問當長寬具備何種關係時，沙發經數次轉動後，剛好可以「轉」到相鄰的位置，如圖一，而且沙發坐人的正面方向仍保持不變呢？



圖一

我們把原問題看成「平面座標上長方形旋轉的數學問題」，再利用「平面座標、三角函數、複數、複數的極式表示及向量」等數學工具，導出符合題目要求的方程式，最後證出當長與寬的比值為正實數時，有下列的結果：

1. 當長與寬比值為無理數時，此問題無解。
2. 當長與寬比值是最簡分數時，若分子為奇數，此問題無解。
3. 當長與寬比值是最簡分數時，若分子為偶數，分母為奇數，此問題有解。

貳、研究動機

本篇文章的問題是從網址<http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/-private/m14.htm>的網頁裡看到的，因為「旋轉」的動作在數學上可以用複數的極式表示，我們想由此出發；逐一導出把長方形沙發利用「旋轉」移至「相鄰位置」的數學式，進而討論解的存在性。

在「研究過程」一節中有兩個重點，第一個是得出長方形沙發「頂點」經過任意次旋轉後的座標表示式，第二個是利用此座標表示式我們可以證明長方形沙發長寬比值為何時；符合要求的轉法解是否存在。

參、研究目的

引進「旋轉」的數學式，導出長方形沙發「頂點」經過任意次旋轉後的座標表示式，進而判定何種長寬比值下；此問題是有解或是無解的。

肆、研究過程

一、研究問題的數學化

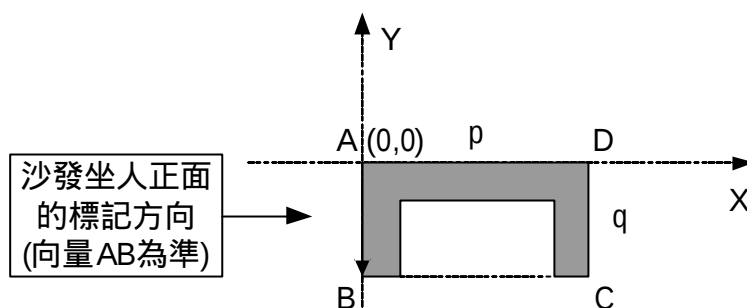
為了數學討論上的方便，我們給出下列的規定：

- (一) 假設長方形沙發的長是 p 、寬是 q 。沙發的四個頂點，由左上開始，按逆時針的排列順序，分別以「A、B、C、D」來標示，如圖二。
- (二) 由於題目要求「沙發轉動前和轉動後，可坐人的正面方向必須不變」，我們以向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向(朝下)標記坐人正面的方向(也是朝下)，(如圖二)。因此可知，若沙發

經 n 次旋轉後，轉到相鄰的位置時，只要向量 AB 的方向仍朝下；那坐人正面的方向必保持不變(仍朝下)。

註：本文均以粗字斜體「 AB 」表示向量 $\vec{AB}$

(三) 為了討論的方便，我們加上一個以「 A 為原點，向量 AD 為 x 軸正向，向量 AB 為 y 軸負向」的平面直角座標，來標示沙發的位置(如圖二) 每次沙發位置的改變，都是以 A 點及向量 AB 的改變為準。



圖二

二、一次旋轉的數學表示式

定義一

若沙發以某一頂點 V 逆時針旋轉角度 θ 時，我們以函數 $f_{V\theta}$ 表示，其中 V 為頂點 A 、 B 、 C 、 D 之一。為了方便把 $f_{V\theta}$ 稱為一個子轉法。

利用「複數的極式」，我們可得：

定理一

頂點 A 以一頂點 V (V 可以是 A) 逆時針旋轉角度 θ 時，則

$$f_{V\theta}(A) = V + (A - V)(\cos \theta + i \sin \theta)$$

(注意：上式的「 $A - V$ 」是使用平面座標的減法)或

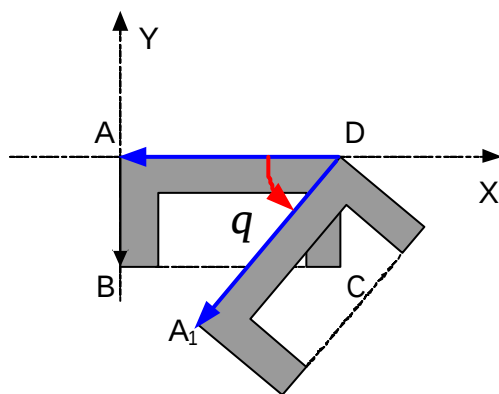
令 $f_{V\theta}(A) = A_1$ ， $R_\theta = \cos \theta + i \sin \theta$ ，則有

$$VA_1 = VAR_\theta$$

證明：

如圖三 (取 V 為 D 點)，不難看出將 VA 旋轉 θ 角，即是 VA_1 。

□



圖三

另外，根據複數的極式可知：

$$\text{性質二} \quad (1) R_{\theta} R_{\varphi} = R_{\theta+\varphi} \quad (2) (R_{\theta})^k = R_{k\theta}$$

三、所有轉法的化簡和表示式

$$\text{性質三} \quad f_{V\theta} f_{V\varphi} = f_{V\theta+\varphi}, \quad f_{V\varphi} = f_{V(\theta+\varphi)}$$

證明：

令 $f_{V\varphi}(A) = A_1$, $f_{V\theta}(A_1) = A_2$, 則 $VA_1 = VAR_{\varphi}$, $VA_2 = VA_1 R_{\theta}$ 。可得 $VA_2 = VAR_{\varphi} R_{\theta} = VAR_{\theta+\varphi}$, 即 $f_{V\theta+\varphi}$ 。 $f_{V\varphi}(A) = f_{V(\theta+\varphi)}(A)$ 。 $\square$

對於一個任意的轉法，可以依照下列的步驟化簡：

- (一) 一個任意的轉法 F ，必定是「有限多個子轉法 $f_{V\theta}$ 」的合成。利用性質二，可以規定相鄰兩個子轉法的轉點必相異。
- (二) 利用三角函數中「同界角」的概念，可以限制每個子轉法的轉角 θ 為 $0 < \theta < 360^\circ$ ，因為轉角 0° 的子轉法，相當於「不移動」的旋轉，其實可以去掉。
- (三) 因相鄰子轉法的轉點均相異，為了把轉法 F 規則化，我們規定「轉點依序為 A 、 B 、 C 、 D ，各用一次的 4 個子轉法，稱為轉法 F 的一個循環」。若中一個循環中有一個轉點 V 的子轉法未出現，則以轉點 V 且轉角 0° 的子轉法填補空缺。

舉個例子說明上面的化簡步驟：

(例 1) 假設 $F = f_{D180}^0 f_{D270}^0 f_{C90}^0 f_{A90}^0 f_{A90}^0 f_{C90}^0 f_{D360}^0 f_{B180}^0 f_{A(-90)}^0$,

第一步化簡得 $F = f_{D450}^0 f_{C90}^0 f_{A180}^0 f_{C90}^0 f_{D360}^0 f_{B180}^0 f_{A(-90)}^0$,

第二步化簡得 $F = f_{D90}^0 f_{C90}^0 f_{A180}^0 f_{C90}^0 f_{B180}^0 f_{A270}^0$,

第三步化簡得 $F = f_{D90}^0 f_{C90}^0 f_{B0}^0 f_{A180}^0 f_{D0}^0 f_{C90}^0 f_{B180}^0 f_{A270}^0$,

可知化簡後的轉法 F 具有 2 個循環。其中，第一循環 $= f_{D0}^0 f_{C90}^0 f_{B180}^0 f_{A270}^0$ ，而第二循環 $= f_{D90}^0 f_{C90}^0 f_{B0}^0 f_{A180}^0$

根據上面的步驟，我們可得：

轉法假設

對於一個旋轉 n 次的轉法 F ，可以規定 F 具有 m 個循環，相鄰子轉法 $f_{V\theta}$ 的轉點 V 均相異，且一個子轉法 $f_{V\theta}$ 每次只能用 0 到 3 次。由此可設

$$F = (f_{D90}^0)^{h_{m,4}} (f_{C90}^0)^{h_{m,3}} (f_{B90}^0)^{h_{m,2}} (f_{A90}^0)^{h_{m,1}} (f_{D90}^0)^{h_{1,4}} (f_{C90}^0)^{h_{1,3}} (f_{B90}^0)^{h_{1,2}} (f_{A90}^0)^{h_{1,1}}$$

其中， $h_{1,1} + \dots + h_{m,4} = n$, $h_{k,j} = 0, 1, 2, 3$, 且 $1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq 4$

由假設可得出例 1 的 $F = (f_{D90}^0)^1 (f_{C90}^0)^1 (f_{B90}^0)^0 (f_{A90}^0)^2 (f_{D90}^0)^0 (f_{C90}^0)^1 (f_{B90}^0)^2 (f_{A90}^0)^3$ 。

四、沙發轉動後的座標表示

利用性質一、性質二及轉法假設，可得出本節的主要定理：

定理四

任取一個旋轉 n 次且具有 m 個循環的轉法 F 如下：

$$F = (f_{D90}^0)^{hm,4} (f_{C90}^0)^{hm,3} (f_{B90}^0)^{hm,2} (f_{A90}^0)^{hm,1} (f_{D90}^0)^{h1,4} (f_{C90}^0)^{h1,3} (f_{B90}^0)^{h1,2} (f_{A90}^0)^{h1,1}$$

假設 $A_{4m} = F(A)$ ，則

$$A_{4m} = A + AB(R_{h1,190}^0 + R_{(h1,1 + hm,1)90}^0) + BC(R_{(h1,1 + h1,2)90}^0 + R_{(h1,1 + hm,2)90}^0) + CD(R_{(h1,1 + h1,2 + h1,3)90}^0 + R_{(h1,1 + hm,3)90}^0) + DA(R_{(h1,1 + h1,4)90}^0 + R_{(h1,1 + hm,4)90}^0)$$

其中， $h_{1,1} + h_{m,4} = n$ ， $h_{k,j} = 0, 1, 2, 3$ ，且 $1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq 4$

若依規定取 A 為原點，且 $AB = (0, -q) = -qi$ ， $BC = (p, 0) = p$ ， $CD = (0, q) = qi$ ， $DA = (-p, 0) = -p$ ， $R_{k90}^0 = (R_{90}^0)^k = i^k$ ，則可得

$$A_{4m} = p[(i^{h1,1 + h1,2} + i^{h1,1 + hm,2}) - (i^{h1,1 + h1,4} + i^{h1,1 + hm,4})] + qi[(i^{h1,1 + h1,2 + h1,3} + i^{h1,1 + hm,3}) - (i^{h1,1 + h1,4} + i^{h1,1 + hm,4})]$$

證明：

當 $1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq 4$ ，令 $A_{4k+j-4} = (f_{V90}^0)^{h_{k,j}} \dots (f_{D90}^0)^{h_{1,4}} (f_{C90}^0)^{h_{1,3}} (f_{B90}^0)^{h_{1,2}} (f_{A90}^0)^{h_{1,1}}(A)$ ，其中 $j=1$ 時取 $V=A$ ， $j=2$ 時取 $V=B$ ， $j=3$ 時取 $V=C$ ， $j=4$ 時，取 $V=D$ 。

1. 當 $k=1$ 時，由性質二可知：

(1) 若 $j=1$ ， $A_1 = (f_{A90}^0)^{h_{1,1}}(A)$ ，即 $AA_1 = AAR_{h1,190}^0$ ，則 $A_1 = A + AAR_{h1,190}^0$ 且

$$B_1 = A + ABR_{h1,190}^0, C_1 = A + ACR_{h1,190}^0, D_1 = A + ADR_{h1,190}^0$$

(2) 若 $j=2$ ， $A_2 = (f_{B90}^0)^{h_{1,2}}(A_1)$ ，即 $B_1A_2 = B_1A_1R_{h1,290}^0$ ，則 $A_2 = B_1 + B_1A_1R_{h1,290}^0$ ，

$$\text{又 } B_1A_1 = BAR_{h1,190}^0, \text{ 故 } A_2 = A + ABR_{h1,190}^0 + BAR_{(h1,1+h1,2)90}^0, \text{ 且}$$

$$B_2 = A + ABR_{h1,190}^0 + BBR_{(h1,1+h1,2)90}^0, C_2 = A + ABR_{h1,190}^0 + BCR_{(h1,1+h1,2)90}^0,$$

$$D_2 = A + ABR_{h1,190}^0 + BDR_{(h1,1+h1,2)90}^0$$

(3) 若 $j=3$ ， $A_3 = (f_{C90}^0)^{h_{1,3}}(A_2)$ ，即 $C_2A_3 = C_2A_2R_{h1,390}^0$ ，則 $A_3 = C_2 + C_2A_2R_{h1,390}^0$ ，

$$\text{又 } C_2A_2 = CAR_{(h1,1+h1,2)90}^0, \text{ 故 } A_3 = A + ABR_{h1,190}^0 + BCR_{(h1,1+h1,2)90}^0 + CAR_{(h1,1+h1,2+h1,3)90}^0, \text{ 且}$$

$$B_3 = A + ABR_{h1,190}^0 + BCR_{(h1,1+h1,2)90}^0 + CBR_{(h1,1+h1,2+h1,3)90}^0,$$

$$C_3 = A + ABR_{h1,190}^0 + BCR_{(h1,1+h1,2)90}^0 + CCR_{(h1,1+h1,2+h1,3)90}^0,$$

$$D_3 = A + ABR_{h1,190}^0 + BCR_{(h1,1+h1,2)90}^0 + CDR_{(h1,1+h1,2+h1,3)90}^0$$

(4) 若 $j=4$ ， $A_4 = (f_{D90}^0)^{h_{1,4}}(A_3)$ ，即 $D_3A_4 = D_3A_3R_{h1,490}^0$ ，則 $A_4 = D_3 + D_3A_3R_{h1,490}^0$ ，

$$\text{又 } D_3A_3 = DAR_{(h1,1+h1,2+h1,3)90}^0, \text{ 故}$$

$$A_4 = A + ABR_{h1,190}^0 + BCR_{(h1,1+h1,2)90}^0 + CDR_{(h1,1+h1,2+h1,3)90}^0 + DAR_{(h1,1+h1,2+h1,3+h1,4)90}^0, \text{ 且}$$

$$B_4 = A + ABR_{h1,190}^0 + BCR_{(h1,1+h1,2)90}^0 + CDR_{(h1,1+h1,2+h1,3)90}^0 + DBR_{(h1,1+h1,2+h1,3+h1,4)90}^0,$$

$$C_4 = A + ABR_{h1,190}^0 + BCR_{(h1,1+h1,2)90}^0 + CDR_{(h1,1+h1,2+h1,3)90}^0 + DCR_{(h1,1+h1,2+h1,3+h1,4)90}^0,$$

$$D_4 = A + ABR_{h1,190}^0 + BCR_{(h1,1+h1,2)90}^0 + CDR_{(h1,1+h1,2+h1,3)90}^0 + DDR_{(h1,1+h1,2+h1,3+h1,4)90}^0$$

2. 假設 $1 \leq k \leq m-1, 1 \leq j \leq 4$ 時，定理成立。

當 $k=m$ 時，由性質二可知：

(1) 若 $j=1$ ， $A_{4m-3} = (f_{A90}^0)^{h_{m,1}}(A_{4m-4})$ ，即 $A_{4m-4}A_{4m-3} = A_{4m-4}A_{4m-4}R_{hm,190}^0$ ，則

$$A_{4m-3} = A_{4m-4} + A_{4m-4}A_{4m-4}R_{hm,190}^0, \text{ 又 } A_{4m-4}A_{4m-4} = AAR_{(h1,1+\dots+h(m-1),4)90}^0, \text{ 故}$$

$$A_{4m} = A + AB(R_{h_{1,1}90^0} + \dots + R_{(h_{1,1}+\dots+h_{m,1})90^0}) + BC(R_{(h_{1,1}+h_{1,2})90^0} + \dots + R_{(h_{1,1}+\dots+h_{m,2})90^0}) + CD(R_{(h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3})90^0} + \dots + R_{(h_{1,1}+\dots+h_{m,3})90^0}) + DA(R_{(h_{1,1}+\dots+h_{1,4})90^0} + \dots + R_{(h_{1,1}+\dots+h_{m,4})90^0}) \quad \square$$

由「沙發轉動前後，可坐人的正面方向必須不變」的要求，可得：

定理五

任取一個旋轉 n 次且具有 m 個循環的轉法 F 如下：

$$F = (f_{D90})^{h_{m,4}} (f_{C90})^{h_{m,3}} (f_{B90})^{h_{m,2}} (f_{A90})^{h_{m,1}} (f_{D90})^{h_{1,4}} (f_{C90})^{h_{1,3}} (f_{B90})^{h_{1,2}} (f_{A90})^{h_{1,1}}$$

當 $h_{1,1} + \dots + h_{m,4} = 4t$ (t 是正整數) 時， AB 方向仍朝下。

證明：

由定理四，知 $A_{4m} = D_{4m-1} + D_{4m-1}A_{4m-1}R_{h_{m,4}90^0}$ 、 $B_{4m} = D_{4m-1} + D_{4m-1}B_{4m-1}R_{h_{m,4}90^0}$ ，故

$$A_{4m} B_{4m} = A_{4m-1} B_{4m-1} R_{h_{m,4}90^0} = AB R_{(h_{1,1}+\dots+h_{m,4})90^0}$$

因此當 $A_{4m} B_{4m} = AB$ 時，沙發轉動前後，可坐人的正面方向必不變。即

當 $R_{(h_{1,1}+\dots+h_{m,4})90^0} = 1$ ，或 $(h_{1,1}+\dots+h_{m,4})90^0 = 360^0 t$ ，或 $h_{1,1}+\dots+h_{m,4} = 4t$ 時， $A_{4m}B_{4m}$ 方向仍不變 (朝下)。 $\square$

根據定理四及定理五，可以列出研究問題的方程式如下：

定理六

任取一個旋轉 n 次且具有 m 個循環的轉法 F ，必須符合下列的方程式，才能使「轉沙發的問題」有解

1. 旋轉 n 次： $h_{1,1} + \dots + h_{m,4} = n$

2. 坐人的正面方向不變： $h_{1,1} + \dots + h_{m,4} = 4t$

3. 「轉」到相鄰的位置： $A_{4m} = D$ ，即

$$p[(i^{h_{1,1}+h_{1,2}} + i^{h_{1,1}+h_{m,2}}) - (i^{h_{1,1}+h_{1,4}} + i^{h_{1,1}+h_{m,4}})] + qi[(i^{h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3}} + i^{h_{1,1}+h_{m,3}}) - (i^{h_{1,1}+h_{1,4}} + i^{h_{1,1}+h_{m,4}})] = p$$

為了討論方便，重述如下：

4. 旋轉次數與坐人的正面方向不變： $n = 4t$

5. 轉到相鄰位置： $A_{4m} = D$ ，等價於

$$(b_1 - b_3 - d_1 + d_3)p + (a_2 - a_4 - c_2 + c_4)q = p, \text{ 及} \\ (b_2 - b_4 - d_2 + d_4)p + (-a_1 + a_3 + c_1 - c_3)q = 0$$

證明：

假設

$i^{h_{1,1}} + i^{h_{1,1}+h_{m,1}} = a_1 + a_2i - a_3 - a_4i$ 且 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = m$ ， a_1, a_2, a_3, a_4 為非負整數

$i^{h_{1,1}+h_{1,2}} + i^{h_{1,1}+h_{m,2}} = b_1 + b_2i - b_3 - b_4i$ 且 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = m$ ， b_1, b_2, b_3, b_4 為非負整數

$i^{h_{1,1}+h_{1,2}+h_{1,3}} + i^{h_{1,1}+h_{m,3}} = c_1 + c_2i - c_3 - c_4i$ 且 $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = m$ ， c_1, c_2, c_3, c_4 為非負整數

$i^{h_{1,1}+h_{1,4}} + i^{h_{1,1}+h_{m,4}} = d_1 + d_2i - d_3 - d_4i$ 且 $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = m$ ， d_1, d_2, d_3, d_4 為非負整數

$$\text{則 } A_{4m} = [(b_1 - b_3 - d_1 + d_3)p + (a_2 - a_4 - c_2 + c_4)q] \\ + [(b_2 - b_4 - d_2 + d_4)p + (-a_1 + a_3 + c_1 - c_3)q] i,$$

因 $A_{4m} = D = p + 0i$ ，可得

$$(b_1 - b_3 - d_1 + d_3)p + (a_2 - a_4 - c_2 + c_4)q = p, \text{ 及}$$

$$(b_2 - b_4 - d_2 + d_4)p + (-a_1 + a_3 + c_1 - c_3)q = 0$$

□

五、已知無解和有解的情形

我們已假設沙發的長是 p 、寬是 q ，並規定 $p \geq q$ ，可判斷無解和有解的情形如下：

定理七 當長與寬的比值為無理數時，此問題無解。

證明：

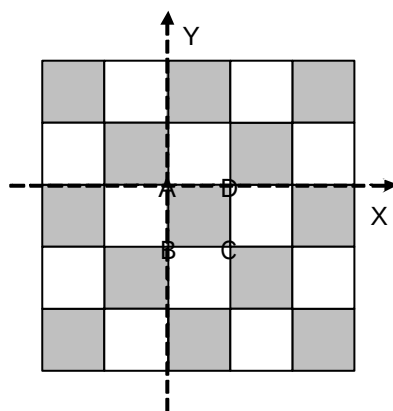
在定理六的第 5 式中，將 $(b_1 - b_3 - d_1 + d_3)p + (a_2 - a_4 - c_2 + c_4)q = p$ 移項後，可得 $p/q = (-a_2 + a_4 + c_2 - c_4)/(b_1 - b_3 - d_1 + d_3 - 1)$ 為有理數，與假設矛盾，故無解。 □

定理八 當長與寬比值是最簡分數時，若分子為奇數，此問題無解。

證明：

在定理六的第 5 式中，將 $(b_1 - b_3 - d_1 + d_3)p + (a_2 - a_4 - c_2 + c_4)q = p$ ，及 $(b_2 - b_4 - d_2 + d_4)p + (-a_1 + a_3 + c_1 - c_3)q = 0$ 兩式相加可得：
 $(b_1 + b_2 - b_3 - b_4 - d_1 - d_2 + d_3 + d_4)p + (-a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + c_1 - c_2 - c_3 + c_4)q = p$ ，
 故 $2[(p + q)m - p(b_3 + b_4 + d_1 + d_2) - q(a_1 + a_4 + c_2 + c_3)] = p$
 當長(即 p)為正奇數時，顯然是無解的。 □

特別地，由定理八可知當沙發是正方形時，問題是無解的。然而有趣的是：
 「正方形沙發符合條件的位置，像是西洋棋的棋盤」，如圖四。



圖四

定理九 當長與寬比值是最簡分數時，若分子為偶數，分母為奇數，此問題有解。

證明：

我們發現兩種特殊的轉法 F_1 與 F_2 ，說明如下：

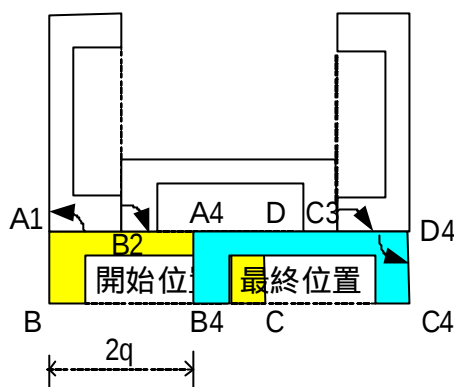
$$\text{取 } F_1 = f_{D90}^0 f_{C(-90)}^0 f_{B(-90)}^0 f_{A90}^0 = (f_{D90}^0)^1 (f_{C90}^0)^3 (f_{B90}^0)^3 (f_{A90}^0)^1,$$

F_1 會將沙發右移到兩倍寬距離 (即 $2q$) 的位置，如圖五。

說明：將 F_1 的轉法代入定理四，其中 F_1 的 $n=8$ ， $m=1$ ，可得 A_4 的複數表示式為：

$$A_4 = p(i^4 - i^8) + qi(i^7 - i^1) = 2q$$

□



$$F_1 = f_{D90}^0 f_{C(-90)}^0 f_{B(-90)}^0 f_{A90}^0$$

圖五

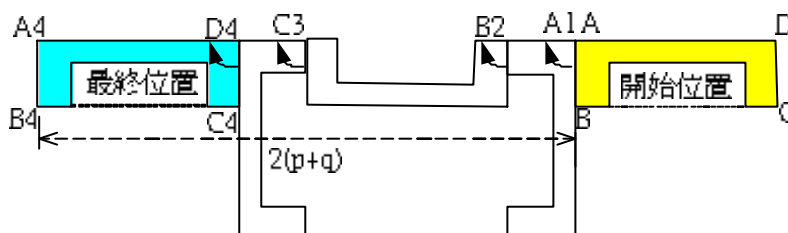
$$\text{取 } F_2 = f_{D(-90)}^0 f_{C(-90)}^0 f_{B(-90)}^0 f_{A(-90)}^0 = (f_{D90}^0)^3 (f_{C90}^0)^3 (f_{B90}^0)^3 (f_{A90}^0)^3$$

F_2 會將沙發向左移到兩倍長寬和距離（即 $2(p+q)$ ）的位置，如圖六：

說明：將 F_2 的轉法代入定理四，其中 F_2 的 $n=12$ ， $m=1$ ，可得 A_4 的複數表示式為：

$$A_4 = p(i^6 - i^{12}) + qi(i^9 - i^3) = -2(p+q)$$

□



$$F_2 = f_{D(-90)}^0 f_{C(-90)}^0 f_{B(-90)}^0 f_{A(-90)}^0$$

圖六

現在我們利用 F_1 、 F_2 ，可以導出此問題「當長與寬比值是最簡分數時，若分子為偶數，分母為奇數」的解。假設轉法 F_1 轉了 x 次； F_2 轉了 y 次（ x 、 y 為正整數），可以把沙發移至右側相鄰的位置，則依問題我們必須要求 p 、 q 、 x 、 y 滿足下式：

$$-2(p+q)y + 2qx = p$$

$$(2y+1)p = 2q(x-y)$$

$$p/q = 2(x-y)/2y+1$$

不難看出長寬比值 p/q 的分母為奇數，分子為偶數。

最後，代入定理六檢驗：取定 $F = (F_2)^y (F_1)^x$

1. 旋轉次數與坐人的正面方向不變： $n = 8x + 12y = 4(2x + 3y)$ 。

2. 轉到相鄰位置：因 F 的循環數 $m = x + y$ ，所以 $A_{4(x+y)} = (F_2)^y (F_1)^x (A)$ ，即

$$A_{4(x+y)} = p[(i^4 + i^{4+8(x-1)} + i^{8x+6} + i^{8x+6+12(y-1)}) - (i^8 + i^{8+8(x-1)} + i^{8x+12} + i^{8x+12+12(y-1)})] + qi[(i^7 + i^{7+8(x-1)} + i^{8x+9} + i^{8x+9+12(y-1)}) - (i^1 + i^{1+8(x-1)} + i^{8x+3} + i^{8x+3+12(y-1)})]$$

$$\begin{aligned}
&= p[(x-y)-(x+y)] + qi[(-xi+yi)-(xi-yi)] \\
&= -2yp + 2(x-y)q ; \text{ 將 } p/q = 2(x-y)/(2y+1) \text{ 代入} \\
&= -2py + 2py + p \\
&= p
\end{aligned}$$

□

由移動的座標可以看出轉法 F 中， F_1 與 F_2 的轉動順序可做交換，其轉法解排列數為 $(x+y)!/x!y!$ 。

例一： p/q 比值小於 1 的情況： $p = 2, q = 5$

$$2/5 = 2(x-y)/(2y+1)$$

$$\text{可得 } 2(2y+1) = 10(x-y)$$

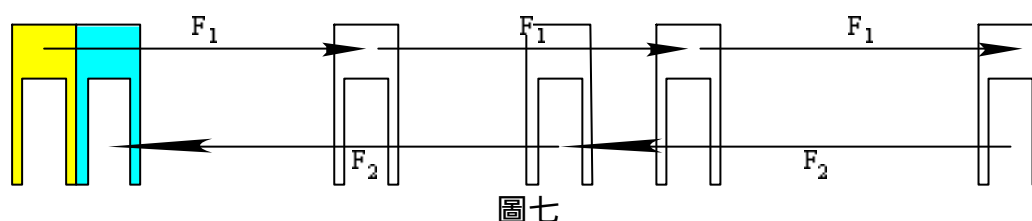
$$4y+2 = 10x-10y$$

$$10x-14y = 2$$

$$5x-7y = 1$$

$$\text{則 } x = 3, y = 2$$

因此，可知有 10 種轉法可以達成問題的要求，其中一種為 $(F_2)^2 (F_1)^3$ ，如圖七。



圖七

例二： p/q 比值大於 1 的情況： $p = 4, q = 3$

$$4/3 = 2(x-y)/(2y+1)$$

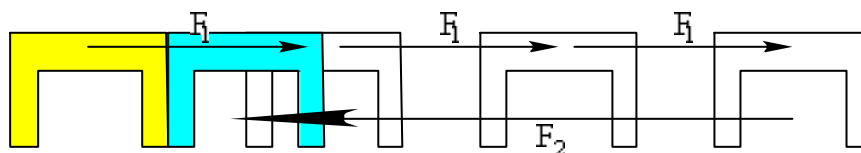
$$\text{可得 } 4(2y+1) = 6(x-y)$$

$$8y+4 = 6x-6y$$

$$6x-14y = 4$$

$$\text{則 } x = 3, y = 1$$

因此，可知有 4 種轉法可以達成問題的要求，其中一種為 $F_2 (F_1)^3$ ，如圖八。



圖八

伍、研究結果

我們經由一些轉法假設，再利用旋轉的極式表示，可以成功導出沙發轉動後頂點的座標表示式。我們已經解出長與寬比值為實數時，此問題是否無解或有解的情況。

- (一) 當長與寬比值為無理數時，此問題無解。
- (二) 當長與寬比值是最簡分數時；若分子為奇數，此問題無解。
- (三) 當長與寬比值是最簡分數時，若分子為偶數，分母為奇數，此問題有解。

陸、討論

我們也發現本研究的方法具有一般性，至少還可以處理三大類的問題：

- (一) 你可以考慮不同形狀的沙發，例如，正三角形、正五邊形、正六邊形等的沙發。
- (二) 如果一塊正面朝上的長方形榻榻米，若每次只能以四個邊用翻轉的方式搬動，請問可不可能將榻榻米搬到原位置的旁邊，而且正面還是朝上呢？
- (三) 另外，這個問題本身也可以往三度空間延伸：
若在平面上，有一個正面朝上的立方塊，若每次只能以一個稜邊用翻轉 90 度的方式移動，請問可不可能將立方塊「翻轉」到相鄰的位置，而且正面還是朝上呢？

柒、參考資料

- [1] 國立編譯館國中數學教科書編審委會，國民中學數學第二冊，正式本再版三刷，台北市，國立編譯館，第 46 到 72 頁，民 90。
- [2] 國立編譯館國中數學教科書編審委員會，國民中學數學第六冊，正式本再版二刷，台北市，國立編譯館，第 6 到 39 頁，民 91。
- [3] 高中數學第一冊，修訂版，台南市，南一書局有限公司，第 46 到 61 頁，民 91。
- [4] 高中數學第二冊，修訂版，台南市，南一書局有限公司，第 65 到 211 頁，民 91。
- [5] 高中數學第三冊，修訂版，台南市，南一書局有限公司，第 1 到 64 頁，民 91。

評 語

030418 國中組數學科 第三名

平面座標上長方形沙發旋轉問題之解的存在性

探討特定的平面圖形在經過剛體運動後的可能狀態，給出了完整的解答，難度很高，使用的各種數學工具和討論技巧也十分適切，非常優秀的作品。