

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030417

彰化縣立員林國民中學

指導老師姓名

顏富明

作者姓名

呂建宏

廖冠傑

顏震宇

莊捷安

# 中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

科 別:數學科

組 別:國中組

作品名稱:梯形中的多重縮放關係

關 鍵 詞:比例線段、相似形、光源法 ( 最多三個 )

編 號:

## 壹、研究摘要

本研究對於過梯形對角線交點平行於上底的平行線，以雙光源的方式探討此平行線與上下底所構成的比例線段的關係，並藉由過對角線交點，作平行線的方法，重複構造梯形，以探討這些平行線所構成的比例線段的關係。並進一步探討正多邊形縮放的比例線段間的關係，以及多邊形縮放的比例線段間的關係。

本研究發現：

一、對於梯形 ABCD，AD//BC，AD<BC，由雙光源所構造的比例線段關係式為：

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n-2}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{2}{a_n}$$

(AD 為  $a_1$ ，BC 為  $a_2$ ，AD 與 BC 之間的平行線為  $a_3$ 、 $a_4$ 、 $a_5$ 、 $a_6$ 、 $a_7$ 、 $a_8 \cdots a_n$ )

二、將外層正  $n$  邊形，藉由光源法(光源置於其外接圓圓心)將其縮小為內層相似正  $n$  邊形，再用雙光源方式將其放大為中層相似正  $n$  邊形，此三個相似正  $n$  邊形的周長( $S$  大、 $S$  中、 $S$  小)所構成的比例關係式為：

$$\frac{S_{中}}{S_{大}} + \frac{S_{中}}{S_{小}} = 2(\text{定值}) \quad (S \text{ 代表周長})$$

三、將外層  $n$  邊形，藉由光源法(光源置於圖形內部)將其縮小為內層相似  $n$  邊形，再用雙光源方式將其放大為中層相似  $n$  邊形，此三個相似  $n$  邊形的對應邊所構成的比例線段關係式為：

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_2}{c_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_3}{c_3} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} + \frac{b_n}{c_n} = 2 \times n$$

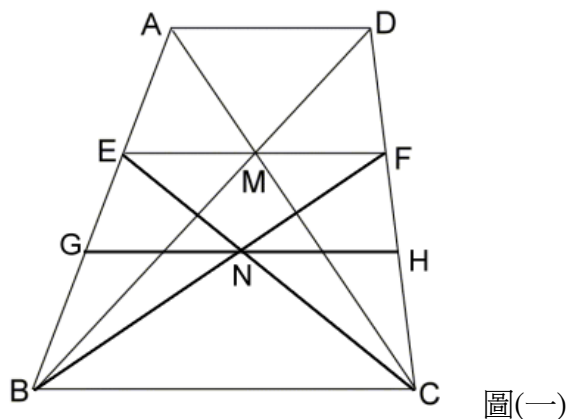
## 貳、研究動機

在數學課分組討論時，同學發現我們的參考資料內有一題很有趣的題目：

原始問題(簡稱**原題**)，如圖(一)

已知：梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$  ( $AD < BC$ )，AC 和 BD 交於 M， $EF \parallel AD$ ，且過 M，EC 和 FB 交於 N， $GH \parallel AD$ ，且過 N，求證： $\frac{1}{AD} + \frac{2}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{2}{GH}$

有一位同學說：「如果將 EF 當作新梯形 EBCF 的上底，再過其兩條對角線交點 N，繼續依照原題條件延伸，是否這些比例線段依然有一些關係存在呢？」於是，我們就決定要往這個方向作研究。



圖(一)

## 參、研究目的

- (一)過原梯形的對角線交點作平行線，得一新梯形，對新梯形重複此做法，探討這些比例線段間的關係。
- (二)探討正多邊形縮放的比例線段間的關係。
- (三)探討多邊形縮放的比例線段間的關係。

## 肆、研究設備與器材

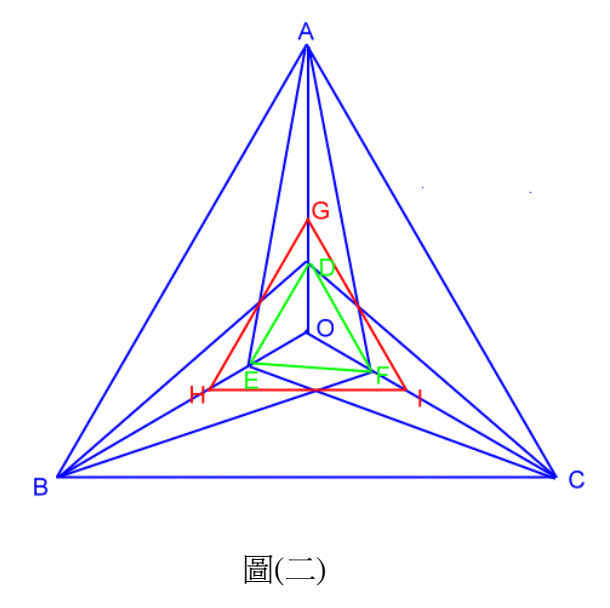
尺、圓規、三角板、紙、筆、電腦。

## 伍、研究過程及方法

### 一、名詞解釋

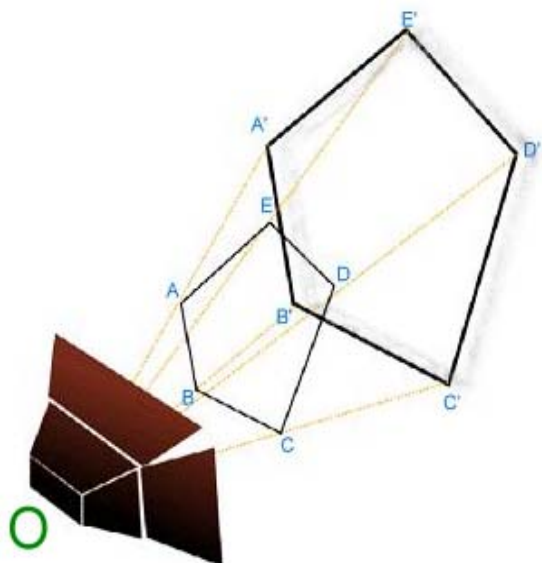
如圖(二)， $\triangle ABC \sim \triangle DEF \sim \triangle GHI$

| 圖形名稱     | 圖形示例            |
|----------|-----------------|
| 1. 內層相似形 | $\triangle DEF$ |
| 2. 中層相似形 | $\triangle GHI$ |
| 3. 外層相似形 | $\triangle ABC$ |



圖(二)

## 二、相似形的形成(光源法)

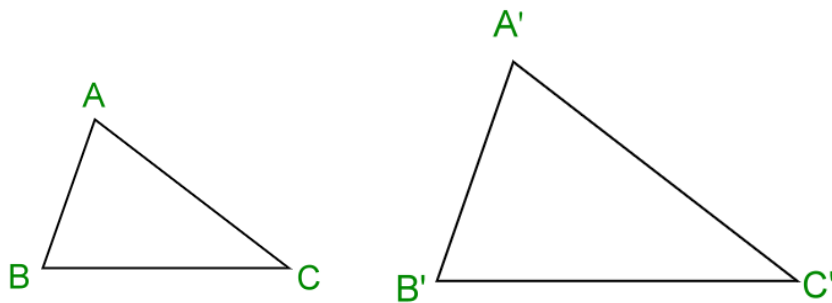


圖(三)

五邊形 ABCDE 與其前面的屏幕平行，光源 O 在五邊形 ABCDE 的後面，用光源 O 照射五邊形 ABCDE，在屏幕上生成影子 A'B'C'D'E'，則五邊形 ABCDE 相似於五邊形 A'B'C'D'E'。

## 三、相似形的定義

對於 $\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ ，若滿足下列兩個條件：1.對應角相等 2.對應邊成比例  
則 $\triangle ABC$  相似於 $\triangle A'B'C'$ ，記為 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。



圖(四)

即 $\triangle ABC$ ， $\triangle A'B'C'$  若滿足條件

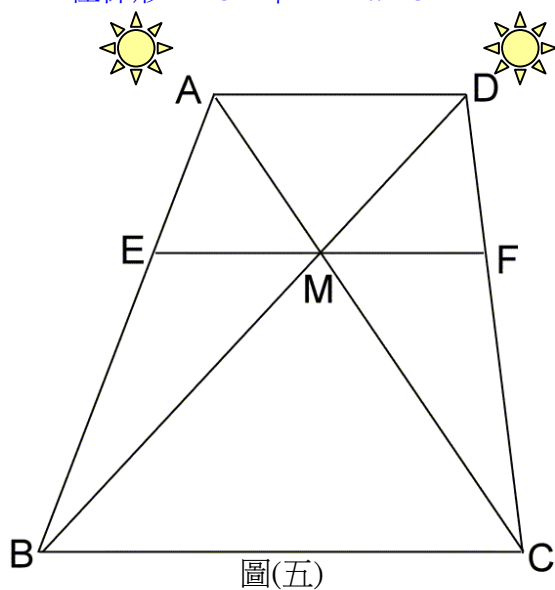
1.  $\angle BAC = \angle B'A'C'$   
 $\angle ABC = \angle A'B'C'$   
 $\angle ACB = \angle A'C'B'$

2. 
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

則 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

#### 四、性質一(雙光源構造等線段性質)

在梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $AD < BC$ ，AC、DB 交於 M，過 M 作  $EF \parallel BC$ ，則  $EM = MF$



證明：

①  $\because \triangle ABC$  中， $EM \parallel BC$

$\triangle DBC$  中， $MF \parallel BC$

$$\therefore \frac{EM}{BC} = \frac{AE}{AB} \quad \frac{MF}{BC} = \frac{DF}{DC}$$

② 又  $\because AD \parallel EF \parallel BC$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{EM}{BC} = \frac{MF}{BC}$$

$$\Rightarrow EM = MF$$

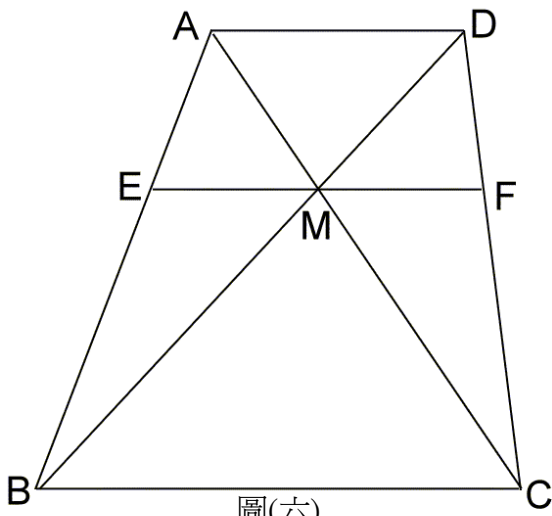
心得：

如圖(五)，以 A 為光源，將 EM 按比例放大為 BC，再以 D 為光源，按相同比例將 BC 縮小為 MF，所以， $EM = MF$ 。

## 五、性質二

已知：梯形 ABCD，AD//BC，AD<BC，兩對角線交點為 M，EF//BC，且過 M

求證： $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{EF}$



圖(六)

證明：

∵△ABD 中，EM//AD

△ABC 中，EM//BC

$$\therefore \frac{EM}{AD} = \frac{EB}{AB} \quad \text{—————} \quad ①$$

$$\frac{EM}{BC} = \frac{AE}{AB} \quad \text{—————} \quad ②$$

①+②

$$\frac{EM}{AD} + \frac{EM}{BC} = \frac{EB + AE}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

$$\text{即 } \frac{EM}{AD} + \frac{EM}{BC} = 1 \quad \text{—————} \quad ③$$

③式可兩邊同除以 EM

$$\text{得 } \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{EM} \quad \text{—————} \quad ④$$

由性質一，得

$$EM = MF$$

$$\Rightarrow EF = 2EM \quad \text{—————} \quad ⑤$$

由④⑤

$$\Rightarrow \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{\frac{EF}{2}} = \frac{2}{EF}$$

$$\text{即 } \boxed{\frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{EF}}$$

心得：

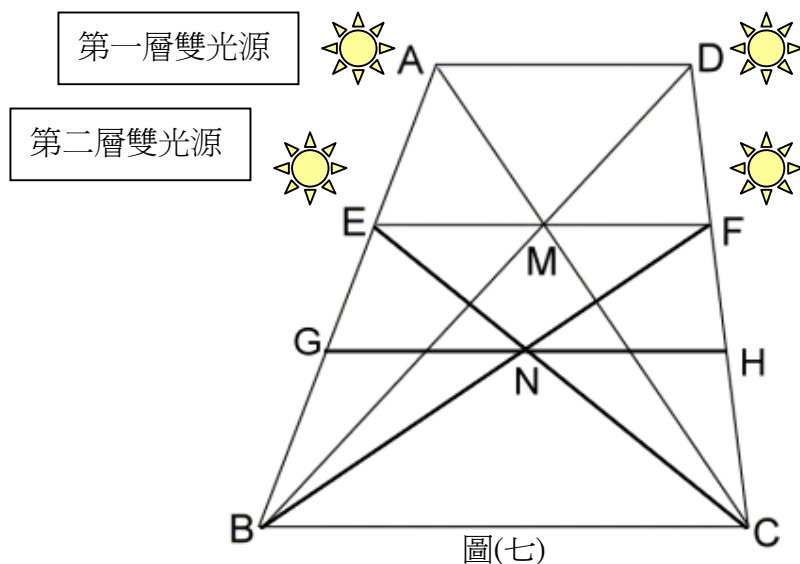
$$\boxed{\text{此結論等同於 } \frac{EF}{AD} + \frac{EF}{BC} = 2 \text{ (定值)}}$$

## 六、原題的推廣

### (一)原題的證明

已知：梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $AD < BC$ ，AC 和 BD 交於 M， $EF \parallel AD$ ，且過 M，  
EC 和 FB 交於 N， $GH \parallel AD$ ，且過 N。

求證： $\frac{1}{AD} + \frac{2}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{2}{GH}$



證明：

梯形 ABCD 中， $\because EF \parallel AD \parallel BC$ ，且 EF 通過 M 點

由性質二得  $\frac{EF}{AD} + \frac{EF}{BC} = 2$

即  $\frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{EF}$  \_\_\_\_\_ ①

梯形 EBCF 中， $\because GH \parallel AD \parallel EF \parallel BC$ ，且 GH 通過 N 點，

$\Rightarrow \frac{GH}{EF} + \frac{GH}{BC} = 2$

即  $\frac{1}{EF} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{GH}$  \_\_\_\_\_ ②

①+②得

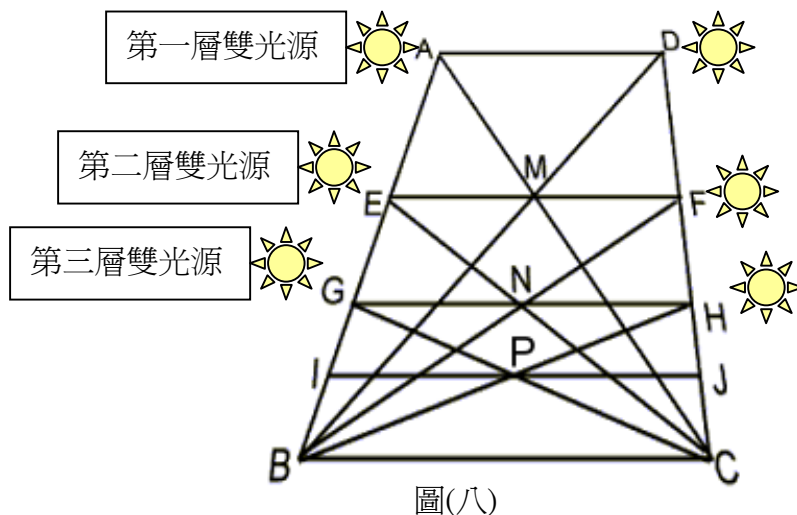
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{EF} + \frac{2}{BC} = \frac{2}{EF} + \frac{2}{GH}$$

$$\boxed{\frac{1}{AD} + \frac{2}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{2}{GH}}$$

(二)原題的延伸之一

已知：如圖(八)，梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $AD < BC$ ，  
AC 和 BD 交於 M， $EF \parallel AD$ ，且過 M，  
EC 和 BF 交於 N， $GH \parallel AD$ ，且過 N，  
GC 和 BH 交於 P， $IJ \parallel AD$ ，且過 P。

求證： $\frac{1}{AD} + \frac{3}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{1}{GH} + \frac{2}{IJ}$



證明：

梯形 ABCD 中， $\because AD \parallel BC$ ，且  $EF \parallel AD$ ， $GH \parallel AD$ ， $IJ \parallel AD$   
 $\therefore AD \parallel EF \parallel GH \parallel IJ \parallel BC$

又 EF，GH，IJ 分別通過 M，N，P

由性質二， $\Rightarrow \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{EF}$  \_\_\_\_\_ ①

$\frac{1}{EF} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{GH}$  \_\_\_\_\_ ②

$\frac{1}{GH} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{IJ}$  \_\_\_\_\_ ③

①+②+③得

$$\boxed{\frac{1}{AD} + \frac{3}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{1}{GH} + \frac{2}{IJ}}$$

### (三)原題的延伸之二

已知：如圖(九)，梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $AD < BC$ ，

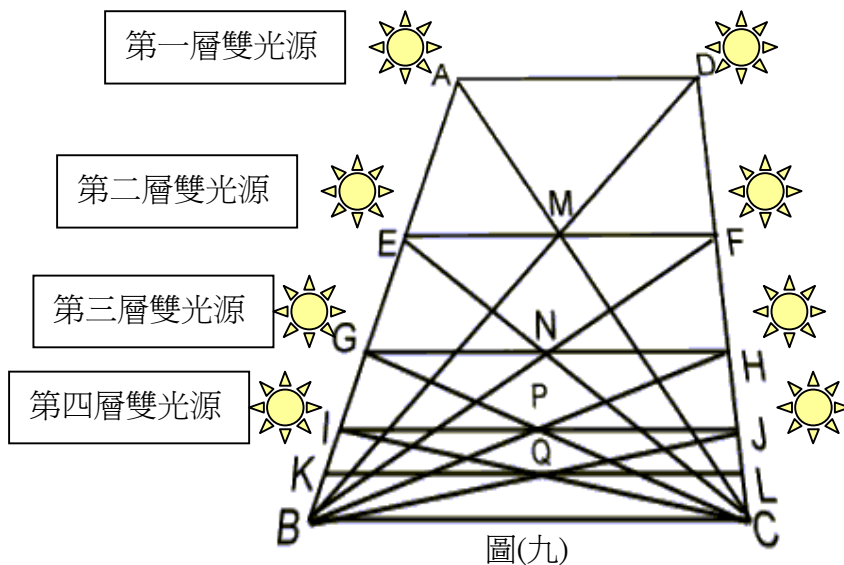
AC 和 BD 交於 M， $EF \parallel AD$ ，且過 M，

EC 和 BF 交於 N， $GH \parallel AD$ ，且過 N，

GC 和 BH 交於 P， $IJ \parallel AD$ ，且過 P，

IC 和 BJ 交於 Q， $KL \parallel AD$ ，且過 Q。

求證： $\frac{1}{AD} + \frac{4}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{1}{GH} + \frac{1}{IJ} + \frac{2}{KL}$



證明：

梯形 ABCD 中， $\because AD \parallel BC$ ，且  $EF \parallel AD$ ， $GH \parallel AD$ ， $IJ \parallel AD$ ， $KL \parallel AD$

$$\therefore AD \parallel EF \parallel GH \parallel IJ \parallel KL \parallel BC$$

又 EF，GH，IJ，KL 分別通過 M，N，P，Q

由性質二，

$$\Rightarrow \frac{1}{AD} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{EF} \quad \text{—————} \quad \text{①}$$

$$\frac{1}{EF} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{GH} \quad \text{—————} \quad \text{②}$$

$$\frac{1}{GH} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{IJ} \quad \text{—————} \quad \text{③}$$

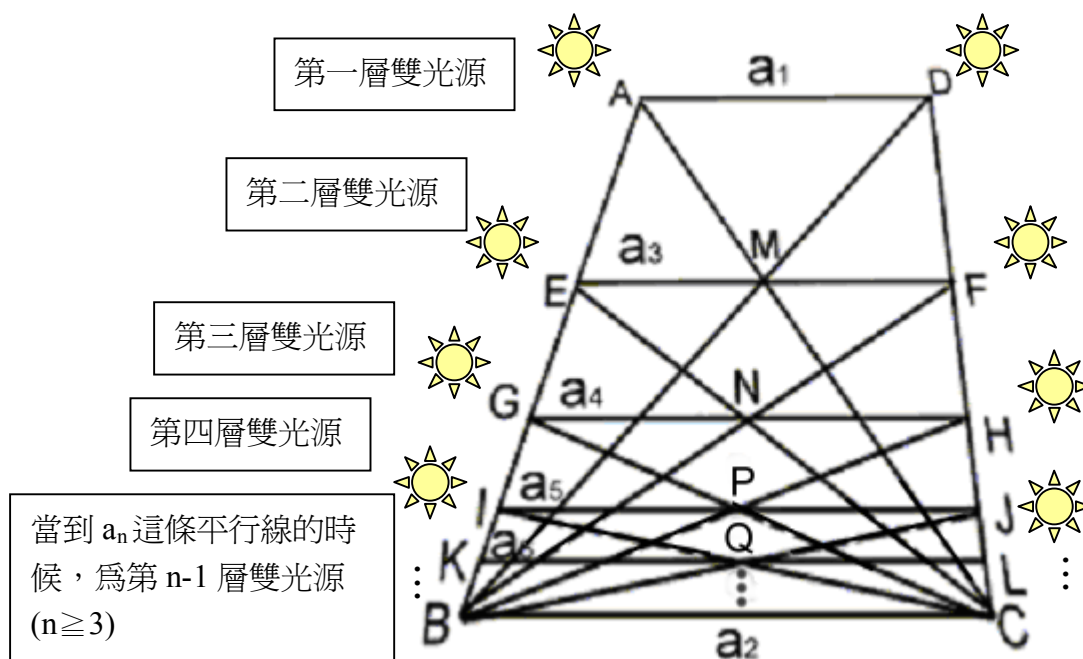
$$\frac{1}{IJ} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{KL} \quad \text{—————} \quad \text{④}$$

① + ② + ③ + ④ 得

$$\boxed{\frac{1}{AD} + \frac{4}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{1}{GH} + \frac{1}{IJ} + \frac{2}{KL}}$$

## 七、原題的一般化

梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $AD < BC$ ，不妨設  $AD$  爲  $a_1$ ， $BC$  爲  $a_2$ ， $AD$  與  $BC$  之間的平行線爲  $a_3$ 、 $a_4$ 、 $a_5$ 、 $a_6$ 、 $a_7$ 、 $a_8 \cdots a_n$ 。



圖(十)

綜合(五)-1, (五)-2, (五)-3 得

$$\frac{1}{AD} + \frac{2}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{2}{GH}$$

$$\frac{1}{AD} + \frac{3}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{1}{GH} + \frac{2}{IJ}$$

$$\frac{1}{AD} + \frac{4}{BC} = \frac{1}{EF} + \frac{1}{GH} + \frac{1}{IJ} + \frac{2}{KL}$$

**猜測：**

即  $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{2}{a_4}$

即  $\boxed{\frac{1}{a_1} + \frac{3}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{2}{a_5}}$

即  $\boxed{\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{2}{a_6}}$

•  
•  
•  
•  
•  
•

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n-2}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{2}{a_n}$$

求證：

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n-2}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{2}{a_n}$$

證明：

由性質二，

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3} \cdots \cdots (1)$$

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_4} \cdots \cdots (2)$$

$$\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_5} \cdots \cdots (3)$$

$$\frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_6} \cdots \cdots (4)$$

$\vdots$

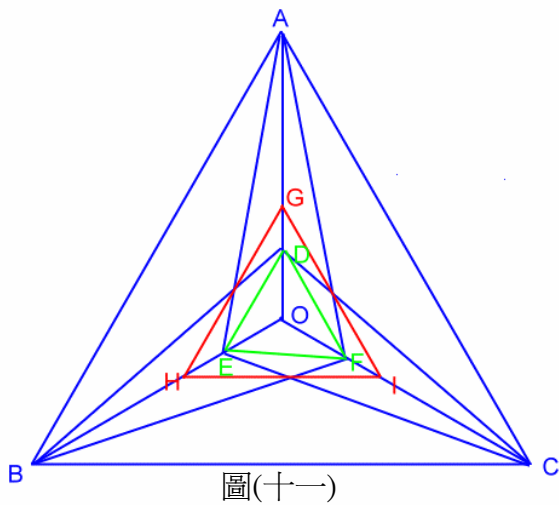
$$\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_n} \cdots \cdots (n-2)$$

(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+ $\cdots$ +(n-2)得

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n-2}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{2}{a_n} \quad (\text{得證})$$

## 八、在正多邊形的縮放中，做原題的延伸

### (一)正三角形



找出正三角形 ABC 的外接圓圓心 O，作 OA、OB、OC，在 OA 上取一點 D，作 DE//AB，EF//BC，FD//CA，可構成三個梯形 ABED、BCFE、CADF，各作其對角線，過對角線交點作 GH、HI、IG 分別平行 AB、BC、CA。

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF \sim \triangle GHI,$$

$\because \triangle ABC$  為正三角形

$$\Rightarrow \triangle DEF, \triangle GHI \text{ 為正三角形}$$

設  $\triangle ABC$  周長為“S 大”、 $\triangle GHI$  周長為“S 中”、 $\triangle DEF$  周長為“S 小”

由性質二，

$$\Rightarrow \frac{1}{EF} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{HI}$$

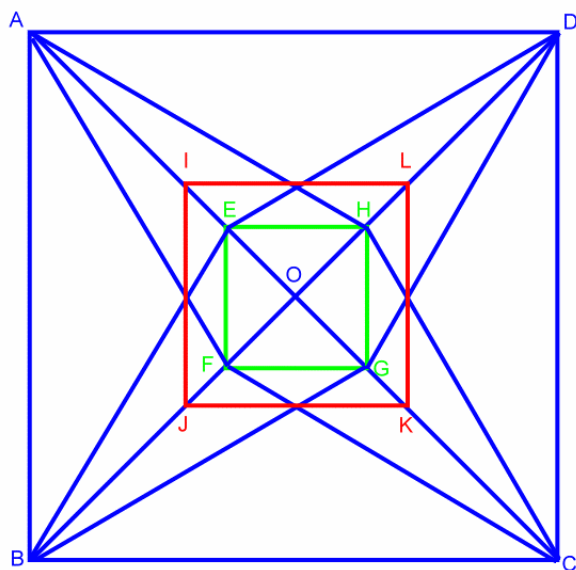
$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{S_{\text{大}}}{3}} + \frac{1}{\frac{S_{\text{小}}}{3}} = \frac{2}{\frac{S_{\text{中}}}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{S_{\text{大}}} + \frac{3}{S_{\text{小}}} = \frac{6}{S_{\text{中}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S_{\text{大}}} + \frac{1}{S_{\text{小}}} = \frac{2}{S_{\text{中}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{大}}} + \frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{小}}} = 2(\text{定值})}$$

## (二)正方形



圖(十二)

找出正方形 ABCD 的外接圓圓心 O，作 OA、OB、OC、OD，在 OA 上取一點 E，作 EF//AB，FG//BC，GH//CD，HE//AD 可構成四個梯形 ABFE、BCGF、CDHG，DAEH，各作其對角線，過對角線交點作 IJ、JK、KL、LI 分別平行 AB、BC、CD、DA。

⇒ 四邊形 ABCD ~ 四邊形 EFGH ~ 四邊形 IJKL

∵ 四邊形 ABCD 為正方形

⇒ 四邊形 EFGH，四邊形 IJKL 為正方形

設 □ABCD 周長為 "S 大"，□IJKL 周長為 "S 中"，  
□EFGH 周長為 "S 小"

由性質二，

$$\Rightarrow \frac{1}{FG} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{JK}$$

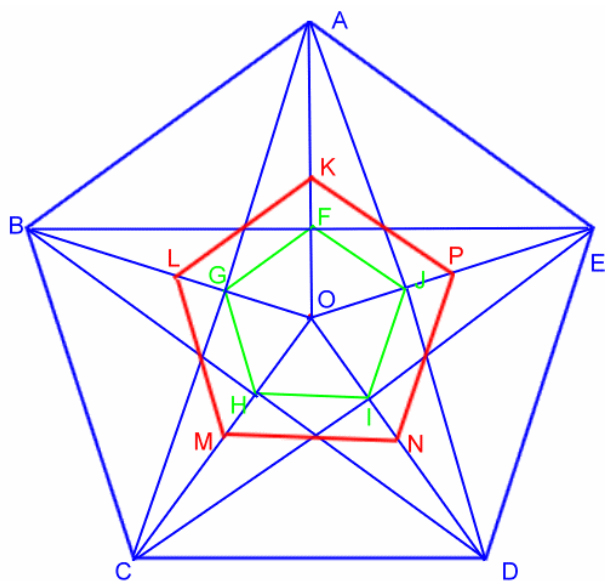
$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{S_{\text{大}}}{4}} + \frac{1}{\frac{S_{\text{小}}}{4}} = \frac{2}{\frac{S_{\text{中}}}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{S_{\text{大}}} + \frac{4}{S_{\text{小}}} = \frac{8}{S_{\text{中}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S_{\text{大}}} + \frac{1}{S_{\text{小}}} = \frac{2}{S_{\text{中}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{大}}} + \frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{小}}} = 2(\text{定值})}$$

### (三)正五邊形



圖(十三)

找出正五邊形 ABCDE 的外接圓圓心 O，作 OA、OB、OC、OD、OE，在 OA 上取一點 F，作 FG//AB，GH//BC，HI//CD，IJ//DE、JF//EA 可構成五個梯形 ABGF、BCHG、CDIH、DEJI、EAFJ，各作其對角線，過對角線交點作 KL、LM、MN、NP、KP 分別平行 AB、BC、CD、DE、EA。

⇒ 五邊形 ABCDE ~ 五邊形 FGHIJ ~ 五邊形 KLMNP

∵ 五邊形 ABCDE 為正五邊形

⇒ 五邊形 FGHIJ，五邊形 KLMNP 為正五邊形  
設正五邊形 ABCDE 周長為“S 大”、正五邊形 KLMNP 周長為“S 中”、正五邊形 FGHIJ 周長為“S 小”。

由性質二，

$$\Rightarrow \frac{1}{HI} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$$

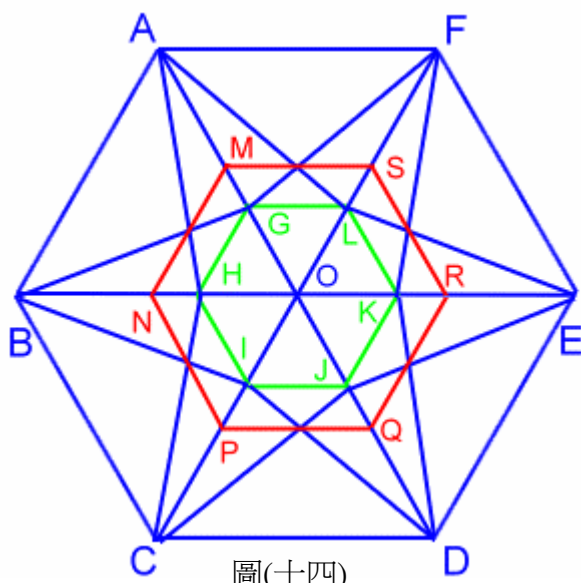
$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{S_{\text{大}}}{5}} + \frac{1}{\frac{S_{\text{小}}}{5}} = \frac{2}{\frac{S_{\text{中}}}{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{S_{\text{大}}} + \frac{5}{S_{\text{小}}} = \frac{10}{S_{\text{中}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S_{\text{大}}} + \frac{1}{S_{\text{小}}} = \frac{2}{S_{\text{中}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{大}}} + \frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{小}}} = 2(\text{定值})}$$

(四)正六邊形



圖(十四)

由性質二，

找出正六邊形 ABCDEF 的外接圓圓心 O，作 OA、OB、OC、OD、OE、OF，在 OA 上取一點 G，作 GH//AB，HI//BC，IJ//CD，JK//DE、KL//EF，LG//FA 可構成六個梯形 ABHG、BCIH、CDJI、DEKJ、EFLK、FAGL，各作其對角線，過對角線交點作 MN、NP、PQ、QR、RS、SM 分別平行 AB、BC、CD、DE、EF、FA。

⇒ 六邊形 ABCDEF ~ 六邊形 GHIJKL ~ 六邊形 MNPQRS

∴ 六邊形 ABCDEF 為正六邊形

⇒ 六邊形 GHIJKL，六邊形 MNPQRS 為正六邊形  
設正六邊形 ABCDEF 周長為“S 大”、正六邊形 MNPQRS 周長為“S 中”、正六邊形 GHIJKL 周長為“S 小”。

$$\Rightarrow \frac{1}{IJ} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{PQ}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{S_{\text{大}}}{6}} + \frac{1}{\frac{S_{\text{小}}}{6}} = \frac{2}{\frac{S_{\text{中}}}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{S_{\text{大}}} + \frac{6}{S_{\text{小}}} = \frac{12}{S_{\text{中}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S_{\text{大}}} + \frac{1}{S_{\text{小}}} = \frac{2}{S_{\text{中}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{大}}} + \frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{小}}} = 2(\text{定值})}$$

(五)綜合(一)、(二)、(三)、(四)得

|                                                                             |       |        |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------|--------|
| $\frac{3}{S_{\text{大}}} + \frac{3}{S_{\text{小}}} = \frac{6}{S_{\text{中}}}$  | ..... | 正三角形   |
| $\frac{4}{S_{\text{大}}} + \frac{4}{S_{\text{小}}} = \frac{8}{S_{\text{中}}}$  | ..... | 正方形    |
| $\frac{5}{S_{\text{大}}} + \frac{5}{S_{\text{小}}} = \frac{10}{S_{\text{中}}}$ | ..... | 正五邊形   |
| $\frac{6}{S_{\text{大}}} + \frac{6}{S_{\text{小}}} = \frac{12}{S_{\text{中}}}$ | ..... | 正六邊形   |
| $\vdots$                                                                    |       |        |
| $\frac{n}{S_{\text{大}}} + \frac{n}{S_{\text{小}}} = \frac{2n}{S_{\text{中}}}$ | ..... | 正 n 邊形 |

上述關係式皆等同於

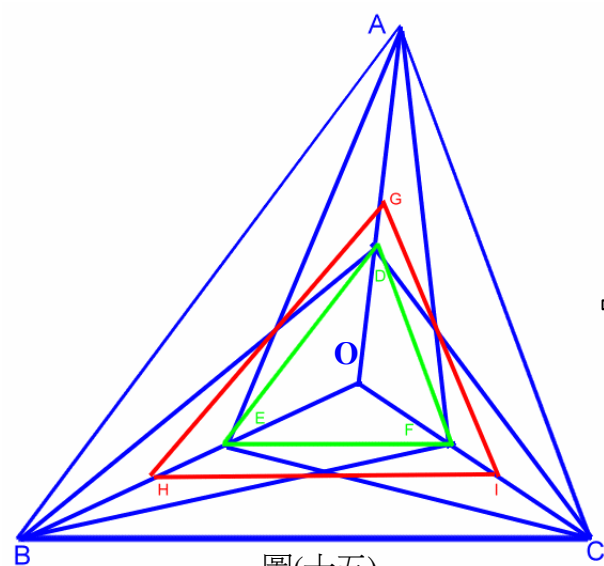
|                                                                            |       |   |
|----------------------------------------------------------------------------|-------|---|
| $\frac{1}{S_{\text{大}}} + \frac{1}{S_{\text{小}}} = \frac{2}{S_{\text{中}}}$ | ————— | ① |
|----------------------------------------------------------------------------|-------|---|

由①得

|                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{大}}} + \frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{小}}} = 2(\text{定值})$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------|

## 九、在多邊形的縮放中，做原題的延伸

### (一)三角形



在不規則三角形內取任意一點 O，連 OA、OB、OC，在 OA 上取一點 D，作 DE//AB，EF//BC，FD//CA，可構成三個梯形 ABED、BCFE、CADF，各作其對角線，過對角線交點作 GH、HI、IG 分別平行 AB、BC、CA。由性質二，

$$\Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{DE} = \frac{2}{GH} \quad \text{————— ①}$$

$$\frac{1}{BC} + \frac{1}{EF} = \frac{2}{HI} \quad \text{————— ②}$$

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{FD} = \frac{2}{IG} \quad \text{————— ③}$$

①兩邊同乘以 GH

$$\Rightarrow \frac{GH}{AB} + \frac{GH}{DE} = 2 \quad \text{————— ④}$$

②兩邊同乘以 HI

$$\Rightarrow \frac{HI}{BC} + \frac{HI}{EF} = 2 \quad \text{————— ⑤}$$

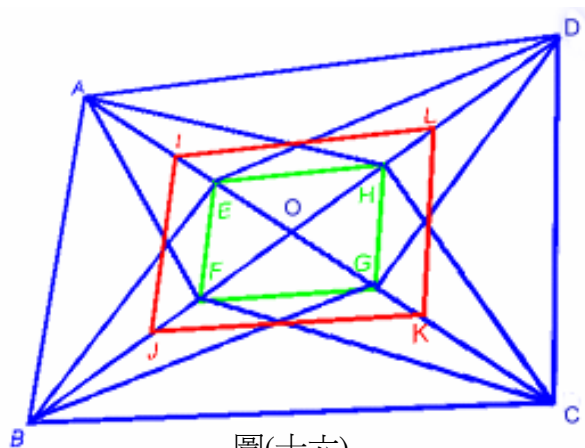
③兩邊同乘以 IG

$$\Rightarrow \frac{IG}{CA} + \frac{IG}{FD} = 2 \quad \text{————— ⑥}$$

④ + ⑤ + ⑥ 得

$$\frac{GH}{AB} + \frac{GH}{DE} + \frac{HI}{BC} + \frac{HI}{EF} + \frac{IG}{CA} + \frac{IG}{FD} = 2 \times 3$$

## (二)四邊形



圖(十六)

在不規則四邊形內取任意一點  $O$ ，連  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$ ，在  $OA$  上取一點  $E$ ，作  $EF \parallel AB$ ， $FG \parallel BC$ ， $GH \parallel CD$ ， $HE \parallel DA$  可構成四個梯形  $ABFE$ 、 $BCGF$ 、 $CDHG$ ， $DAEH$ ，各作其對角線，過對角線交點作  $IJ$ 、 $JK$ 、 $KL$ 、 $LI$  分別平行  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$ 。

由性質二，

$$\Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{EF} = \frac{2}{IJ} \quad \text{—————} \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{BC} + \frac{1}{FG} = \frac{2}{JK} \quad \text{—————} \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{CD} + \frac{1}{GH} = \frac{2}{KL} \quad \text{—————} \quad \textcircled{3}$$

$$\frac{1}{DA} + \frac{1}{HE} = \frac{2}{LI} \quad \text{—————} \quad \textcircled{4}$$

①兩邊同乘以  $IJ$

$$\Rightarrow \frac{IJ}{AB} + \frac{IJ}{EF} = 2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{5}$$

②兩邊同乘以  $JK$

$$\Rightarrow \frac{JK}{BC} + \frac{JK}{FG} = 2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{6}$$

③兩邊同乘以  $KL$

$$\Rightarrow \frac{KL}{CD} + \frac{KL}{GH} = 2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{7}$$

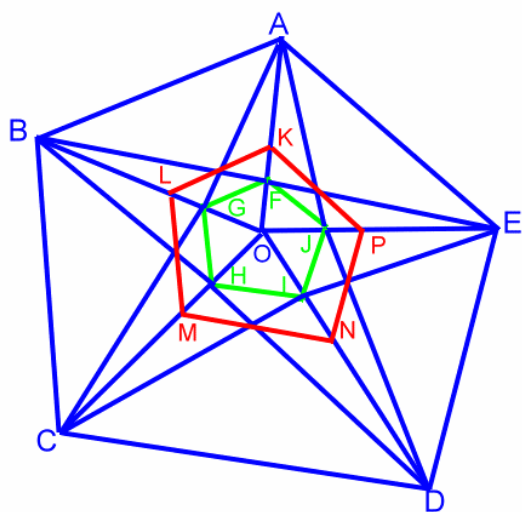
④兩邊同乘以  $LI$

$$\Rightarrow \frac{LI}{DA} + \frac{LI}{HE} = 2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{8}$$

⑤+⑥+⑦+⑧得

$$\frac{IJ}{AB} + \frac{IJ}{EF} + \frac{JK}{BC} + \frac{JK}{FG} + \frac{KL}{CD} + \frac{KL}{GH} + \frac{LI}{DA} + \frac{LI}{HE} = 2 \times 4$$

### (三)五邊形



圖(十七)

在不規則五邊形內取任意一點 O，連 OA、OB、OC、OD、OE，在 OA 上取一點 F，作 FG//AB，GH//BC，HI//CD，IJ//DE、JF//EA，可構成五個梯形 ABGF、BCHG、CDIH、DEJI、EAFJ，各作其對角線，過對角線交點作 KL、LM、MN、NP、PK 分別平行 AB、BC、CD、DE、EA。

由性質二，

$$\Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{FG} = \frac{2}{KL} \quad \text{—————} \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{BC} + \frac{1}{GH} = \frac{2}{LM} \quad \text{—————} \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{CD} + \frac{1}{HI} = \frac{2}{MN} \quad \text{—————} \quad \textcircled{3}$$

$$\frac{1}{DE} + \frac{1}{IJ} = \frac{2}{NP} \quad \text{—————} \quad \textcircled{4}$$

$$\frac{1}{EA} + \frac{1}{JF} = \frac{2}{PK} \quad \text{—————} \quad \textcircled{5}$$

①兩邊同乘以 KL

$$\Rightarrow \frac{KL}{AB} + \frac{KL}{FG} = 2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{6}$$

②兩邊同乘以 LM

$$\Rightarrow \frac{LM}{BC} + \frac{LM}{GH} = 2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{7}$$

③兩邊同乘以 MN

$$\Rightarrow \frac{MN}{CD} + \frac{MN}{HI} = 2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{8}$$

④兩邊同乘以 NP

$$\Rightarrow \frac{NP}{DE} + \frac{NP}{IJ} = 2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{9}$$

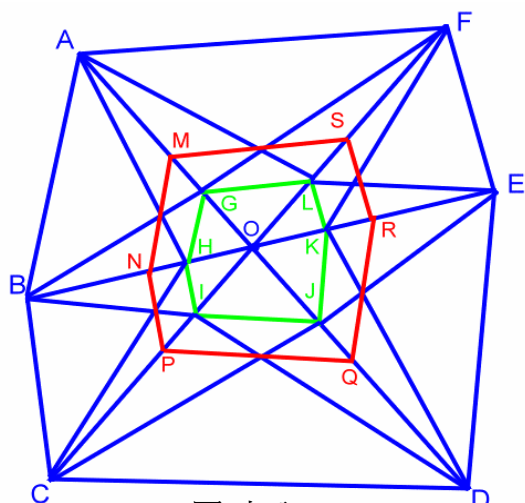
⑤兩邊同乘以 PK

$$\Rightarrow \frac{PK}{EA} + \frac{PK}{JF} = 2 \quad \text{—————} \quad \textcircled{10}$$

⑥+⑦+⑧+⑨+⑩得

$$\frac{KL}{AB} + \frac{KL}{FG} + \frac{LM}{BC} + \frac{LM}{GH} + \frac{MN}{CD} + \frac{MN}{HI} + \frac{NP}{DE} + \frac{NP}{IJ} + \frac{PK}{EA} + \frac{PK}{JF} = 2 \times 5$$

(四)六邊形



圖(十八)

在不規則六邊形內取任意一點 O，連 OA、OB、OC、OD、OE、OF，在 OA 上取一點 G，作 GH//AB，HI//BC，IJ//CD，JK//DE、KL//EF，LG//FA，可構成六個梯形 ABHG、BCIH、CDJI、DEKJ、EFLK、FAGL，各作其對角線，過對角線交點作 MN、NP、PQ、QR、RS、SM 分別平行 AB、BC、CD、DE、EF、FA。

由性質二，

$$\Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{GH} = \frac{2}{MN} \quad \text{—————} \quad ①$$

$$\frac{1}{BC} + \frac{1}{HI} = \frac{2}{NP} \quad \text{—————} \quad ②$$

$$\frac{1}{CD} + \frac{1}{IJ} = \frac{2}{PQ} \quad \text{—————} \quad ③$$

$$\frac{1}{DE} + \frac{1}{JK} = \frac{2}{QR} \quad \text{—————} \quad ④$$

$$\frac{1}{EF} + \frac{1}{KL} = \frac{2}{RS} \quad \text{—————} \quad ⑤ \quad \frac{1}{FA} + \frac{1}{LG} = \frac{2}{SM} \quad \text{—————} \quad ⑥$$

①兩邊同乘以 MN

$$\Rightarrow \frac{MN}{AB} + \frac{MN}{GH} = 2 \quad \text{—————} \quad ⑦$$

②兩邊同乘以 NP

$$\Rightarrow \frac{NP}{BC} + \frac{NP}{HI} = 2 \quad \text{—————} \quad ⑧$$

③兩邊同乘以 PQ

$$\Rightarrow \frac{PQ}{CD} + \frac{PQ}{IJ} = 2 \quad \text{—————} \quad ⑨$$

④兩邊同乘以 QR

$$\Rightarrow \frac{QR}{DE} + \frac{QR}{JK} = 2 \quad \text{—————} \quad ⑩$$

⑤兩邊同乘以 RS

$$\Rightarrow \frac{RS}{EF} + \frac{RS}{KL} = 2 \quad \text{—————} \quad ⑪$$

⑥兩邊同乘以 SM

$$\Rightarrow \frac{SM}{FA} + \frac{SM}{LG} = 2 \quad \text{—————} \quad ⑫$$

⑦+⑧+⑨+⑩+⑪+⑫得

$$\frac{MN}{AB} + \frac{MN}{GH} + \frac{NP}{BC} + \frac{NP}{HI} + \frac{PQ}{CD} + \frac{PQ}{IJ} + \frac{QR}{DE} + \frac{QR}{JK} + \frac{RS}{EF} + \frac{RS}{KL} + \frac{SM}{FA} + \frac{SM}{LG} = 2 \times 6$$

(五)綜合(一)、(二)、(三)、(四)

1.  $n$  邊形內任意一點往頂點之連線，可構造出  $n$  個三角形
2. 作  $n$  邊形的相似形於  $n$  邊形的內部
3. 可得  $n$  個梯形
4. 每個梯形作對角線，可得  $n$  個交點
5. 過對角線交點作線段平行所對應  $n$  邊形的邊長
6. 可得 3 個相似  $n$  邊形
7. (1)設內層相似形各邊的邊長分別為  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_n$   
(2)設中層相似形各邊的邊長分別為  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \dots, b_n$   
(3)設外層相似形各邊的邊長分別為  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, \dots, c_n$   
其中  $a_i, b_i, c_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 構成一組對應邊
8.  $n$  邊形縮放中的比例線段關係為

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_2}{c_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_3}{c_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} + \frac{b_n}{c_n} = 2 \times n$$

## 陸、研究結果

### 一、梯形中的比例線段關係式如下表

| 梯形中的平行線數(含上底、下底) | 比例線段關係式                                                                                                                                                        |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3                | $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$                                                                                                                |
| 4                | $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{2}{a_4}$                                                                                                |
| 5                | $\frac{1}{a_1} + \frac{3}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{2}{a_5}$                                                                                |
| 6                | $\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{2}{a_6}$                                                                |
| ⋮                | ⋮                                                                                                                                                              |
| n                | $\frac{1}{a_1} + \frac{n-2}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{2}{a_n}$ |

### 二、正 n 邊形縮放中的比例線段關係式如下表

| 正 n 邊形的邊數(n≥3) | 比例線段關係式                                                |
|----------------|--------------------------------------------------------|
| 3              | $\frac{3}{S_{大}} + \frac{3}{S_{小}} = \frac{6}{S_{中}}$  |
| 4              | $\frac{4}{S_{大}} + \frac{4}{S_{小}} = \frac{8}{S_{中}}$  |
| 5              | $\frac{5}{S_{大}} + \frac{5}{S_{小}} = \frac{10}{S_{中}}$ |
| 6              | $\frac{6}{S_{大}} + \frac{6}{S_{小}} = \frac{12}{S_{中}}$ |
| ⋮              | ⋮                                                      |
| n              | $\frac{n}{S_{大}} + \frac{n}{S_{小}} = \frac{2n}{S_{中}}$ |

上述關係式皆等同於

$$\frac{1}{S_{大}} + \frac{1}{S_{小}} = \frac{2}{S_{中}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{中}}{S_{大}} + \frac{S_{中}}{S_{小}} = 2(\text{定值})$$

三、n 邊形縮放中的比例線段關係式如下表

| n 邊形的邊數( $n \geq 3$ ) | 比例線段關係式                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3                     | $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_2}{c_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_3}{c_3} = 2 \times 3$                                                                                                             |
| 4                     | $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_2}{c_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_3}{c_3} + \frac{b_4}{a_4} + \frac{b_4}{c_4} = 2 \times 4$                                                                         |
| 5                     | $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_2}{c_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_3}{c_3} + \frac{b_4}{a_4} + \frac{b_4}{c_4} + \frac{b_5}{a_5} + \frac{b_5}{c_5} = 2 \times 5$                                     |
| 6                     | $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_2}{c_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_3}{c_3} + \frac{b_4}{a_4} + \frac{b_4}{c_4} + \frac{b_5}{a_5} + \frac{b_5}{c_5} + \frac{b_6}{a_6} + \frac{b_6}{c_6} = 2 \times 6$ |
| $\vdots$              | $\vdots$                                                                                                                                                                                                                             |
| n                     | $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_2}{c_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_3}{c_3} \cdots + \frac{b_n}{a_n} + \frac{b_n}{c_n} = 2 \times n$                                                                  |

註：①設內層相似形各邊的邊長分別為  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$ 、 $a_5$ 、 $a_6$ 、 $\cdots$ 、 $a_n$

②設中層相似形各邊的邊長分別為  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$ 、 $b_4$ 、 $b_5$ 、 $b_6$ 、 $\cdots$ 、 $b_n$

③設外層相似形各邊的邊長分別為  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$ 、 $c_4$ 、 $c_5$ 、 $c_6$ 、 $\cdots$ 、 $c_n$

其中  $a_i$ ， $b_i$ ， $c_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 構成一組對應邊

## 柒、結論

一、對於梯形 ABCD，AD//BC，AD<BC，由雙光源所構造的比例線段關係式為：

第一層雙光源



第二層雙光源



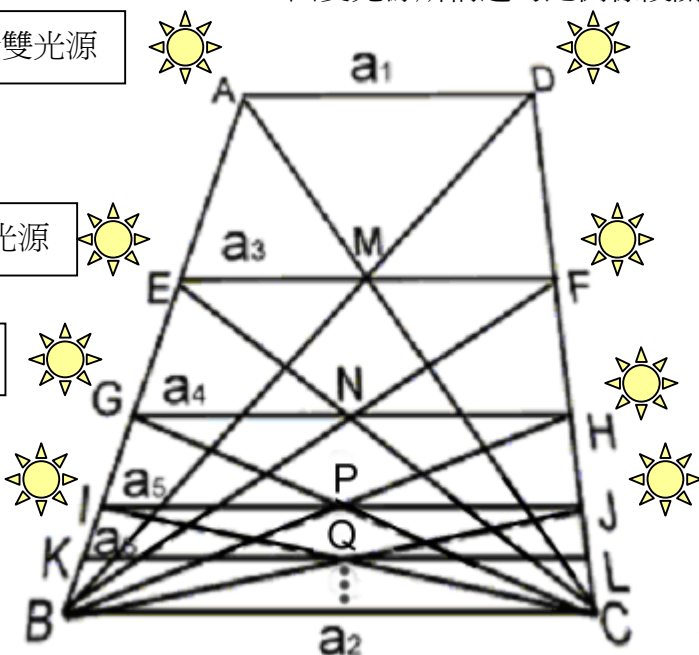
第三層雙光源



第四層雙光源



當到  $a_n$  這條平行線的時候，為第  $n-1$  層雙光源 ( $n \geq 3$ )



圖(十九)

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n-2}{a_2} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_7} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{2}{a_n}$$

(AD 為  $a_1$ ，BC 為  $a_2$ ，AD 與 BC 之間的平行線為  $a_3$ 、 $a_4$ 、 $a_5$ 、 $a_6$ 、 $a_7$ 、 $a_8 \cdots a_n$ )

二、將外層正  $n$  邊形，藉由光源法(光源置於其外接圓圓心)將其縮小為內層相似正  $n$  邊形，再用雙光源方式將其放大為中層相似正  $n$  邊形，此三個相似正  $n$  邊形的周長( $S$  大、 $S$  中、 $S$  小)所構成的比例關係式為：

$$\frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{大}}} + \frac{S_{\text{中}}}{S_{\text{小}}} = 2(\text{定值}) \quad (S \text{ 代表周長})$$

三、將外層  $n$  邊形，藉由光源法(光源置於圖形內部)將其縮小為內層相似  $n$  邊形，再用雙光源方式將其放大為中層相似  $n$  邊形，此三個相似  $n$  邊形的對應邊所構成的比例線段關係式為：

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_1}{c_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_2}{c_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_3}{c_3} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} + \frac{b_n}{c_n} = 2 \times n$$

- 註：
- ①設內層相似形各邊的邊長分別為  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$ 、 $a_5$ 、 $a_6$ 、 $\cdots$ 、 $a_n$
  - ②設中層相似形各邊的邊長分別為  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$ 、 $b_4$ 、 $b_5$ 、 $b_6$ 、 $\cdots$ 、 $b_n$
  - ③設外形相似形各邊的邊長分別為  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$ 、 $c_4$ 、 $c_5$ 、 $c_6$ 、 $\cdots$ 、 $c_n$
- 其中  $a_i$ ， $b_i$ ， $c_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 構成一組對應邊

## 捌、參考資料

國立編譯館主編(1997)，國民中學數學教科書第五冊，台北市國立編譯館  
單墀(1993)數學奧林匹克初三分冊(P.55)，新竹市凡異出版社

## 評 語

030417 國中組數學科 最佳團隊合作獎

梯形中的多重縮放關係

作品以雙光源方式探討平行線與梯形上下底構成比例線段的關係，進而探討正多邊形縮放的比例關係。作者群在口頭報告及在作品構思與參展過程中，表現出作者之間發揮良好團隊合作精神。