

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030412

臺北市立介壽國民中學

指導老師姓名

張靜華

涂永金

作者姓名

翁凡

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：瘋不瘋？非常瘋！

關 鍵 詞：立即瘋、Excel 函數分析、特殊排列組合設計

編 號：

壹、摘要：

本作品主要是從「立即瘋」遊戲的解題過程，突發奇想，試著設計全新的「立即瘋」遊戲。

「立即瘋」原設計的木頭材料不容易處理，沒有拓展空間，所以「瘋不瘋?非常瘋!」改以智慧片取代。瞭解原設計的解題後，自行以正八面體設計不同顏色變化和位置，加以比對、分析和檢驗。

本作品主要結果如下：

- 一、以電腦輔助有條理且有效率的解決原設計的「立即瘋」遊戲。
- 二、重新設計不同顏色的新「立即瘋」遊戲，並確認只有唯一解。
- 三、設計正八面體的「瘋不瘋?非常瘋!」遊戲，並確認只有唯一解。

我應用了「顏色表格化分析」、「特殊排列組合設計」和「Excel 函數分析」，有效及有效率的解決原「立即瘋」問題，並重新設計創造出全新的「瘋不瘋?非常瘋!」遊戲。

貳、研究動機： (部編版·第四冊 2-4 生活中的立體圖形)

立即瘋是個很好玩的遊戲，假使你玩出興趣時，就會像我一樣，把他當作一個研究題材，並發現其中奧秘的地方。

國小6年級時，我曾經玩瘋過，但這卻啟發我用推理的方法來玩益智遊戲，使之前的玩瘋過程變的很有意義，不再只是拿著立即瘋的道具亂拼亂湊，而是有系統的把它分析、處理，使得原本的解題時間縮短，這些東西就成為我研究的結晶。

期間研究過地圖著色問題，從四色猜想開始、平面地圖著色四色定理、到球面地圖著色五色定理，數學家們足足花了一世紀，才在電腦科技協助下獲得答案。因此我自習 Excel，應用其函數功能，耗費多時，隆重推出本款比「立即瘋」及「究極瘋」遊戲更「瘋」的「瘋不瘋?非常瘋!」完整版！

當時倉促嘗試發展出「究極瘋」遊戲，並參加科展獲獎，八年級時，重新以自學的 Excel 統計函數檢視當時作品，發現部分設計並非十分完美，可以找出第二種以上解答。這次科展，我決定要繼續創造比「立即瘋」、「究極瘋」更令人瘋狂的「瘋不瘋?非常瘋!」，並全程利用電腦 Excel 函數統計的功能，讓運算公式化，減少人工計數時間，自動檢驗錯誤，把立即瘋、究極瘋做的更瘋更好玩！

參、研究目的：

推出比「立即瘋」及「究極瘋」遊戲更「瘋」的「瘋不瘋?非常瘋!」完整版！

- 一、以正六面體為題，發展另一套「立即瘋」遊戲

(一)以科學方法--函數統計分析「立即瘋」遊戲原設計	
(二)重新打造全新的「立即瘋」	4 種顏色 4 方塊成柱
	5 種顏色 5 方塊成柱
	6 種顏色 6 方塊成柱
	7 種顏色 7 方塊成柱
	8 種顏色 8 方塊成柱
(三)發展全新的「瘋不瘋?非常瘋!」	4 個正八面體 4 種顏色來製作題目
	5 個正八面體 5 種顏色來製作題目
	6 個正八面體 6 種顏色來製作題目
	7 個正八面體 7 種顏色來製作題目
	8 個正八面體 8 種顏色來製作題目

肆、研究設備器材：

我使用的器材有個人電腦，以及正方形、正三角形、正五邊形及正六邊形工程智慧片（長久公司製，有紅 Red、黃 Yellow、藍 Blue、綠 Green 及中空 No color 等 5 種顏色，外加自製橙色 Orange、紫色 Purple 及銀色 Silver 共八種）、鐵樂士噴漆。

伍、文獻探討：

「立即瘋」是一種在北美洲相當受歡迎的益智遊戲。這遊戲的器材是由四塊立方體（正六面體）組成。每塊立方體分別有紅、黃、藍、綠 4 種顏色，但每塊立方體顏色的分佈並不相同。玩這種遊戲的目標是把四塊立方體疊成柱形，一個疊一個，使柱子的四面，都有紅、黃、藍、綠 4 種顏色，這是個很有挑戰性的題目！

「四色問題」是一百多年前討論任意一張分區地圖，相鄰的區域都塗上不同顏色，只用四種顏色來著色夠嗎？。數學家們努力了將近一個世紀，在 1976 年，美國伊利諾大學的兩位數學教授阿倍爾(K.appel)及哈根(W.Haken)才**利用電腦**的輔助將這個問題解決。

陸、研究過程及方法：

一、 設定使用的正多面體

適合當題目的正多邊形智慧片有：1.正三角形 2.正方形 3.正五邊形 4.正六邊形

能拼出之正多面體如下：

可用正多面體	圖片	分析此正多面體的優缺點	是否使用
正四面體		僅四面，堆疊不易，可選擇性太少，不適合出題	X
正六面體		「立即瘋」用正六面體。很適合作為題材	O
正八面體		「究極瘋」用正八面體。很適合作為題材	O
正十二面體		形體太複雜、材料不夠，而且不容易觀察	X
正二十面體		形體太複雜、材料不夠，而且不容易觀察	X

最後，我決定研究的方向：

1、正六面體	(1)先以不同的方法分析原設計	
	(2)重新打造全新的「立即瘋」	4 種顏色 4 方塊成柱
		5 種顏色 5 方塊成柱
		6 種顏色 6 方塊成柱
		7 種顏色 7 方塊成柱
	8 種顏色 8 方塊成柱	
2、正八面體	發展全新的「瘋不瘋?非常瘋!」	
	4 個正八面體每個側面(共計有六個側面)相對位置都不同 4 種顏色來製作題目	
	5 個正八面體每個側面(共計有六個側面)相對位置都不同 5 種顏色來製作題目	
	6 個正八面體每個側面(共計有六個側面)相對位置都不同 6 種顏色來製作題目	
	7 個正八面體每個側面(共計有六個側面)相對位置都不同 7 種顏色來製作題目	
8 個正八面體每個側面(共計有六個側面)相對位置都不同 8 種顏色來製作題目		

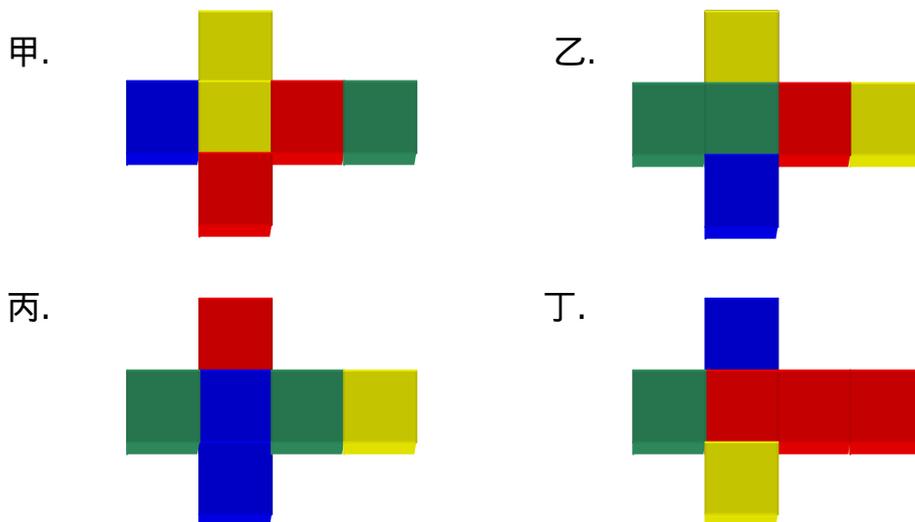
二、開始進行顏色配置

正多面體	方塊數	顏色
正六面體	4	紅、黃、藍、綠
	5	紅、黃、藍、綠、空白
	6	紅、黃、藍、綠、空白、橙
正八面體	7	紅、黃、藍、綠、空白、橙、紫
	8	紅、黃、藍、綠、空白、橙、紫、銀

三、開始設計題目

(一) 分析原設計--以正六面體為題，分析「立即瘋」遊戲。

四塊立方體展開圖如下：



遊戲的目標是把四塊正六面體依相對位置相疊或在平面排成一列，使相對位置的四個側面，都有不同顏色！

1.亂槍打鳥法（嘗試錯誤法）：

一正六面體有六面，每面都是正方形，將它旋轉，每個面朝上考慮相對位置都有四種不同的排法，所以就僅僅這一個正六面體就有 $4 \times 6 = 24$ 種不同的放置方法，四個疊在一起，不計算這些正六面體彼此之間的排列關係，也要有 $24^4 = 331776$ 種排法。

因此要亂槍打鳥拼出立即瘋的正確答案並不容易。

2.推理分析法

(1) 分析：

- 1 每塊正六面體不會出現的兩面,是上下分別平行的一對,我們稱它為底。
- 2 根據以上分析,將每塊正六面體分成 3 組。(上下平行兩面為一組)
- 3 作出分析表

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	Y	R	Y	G	B	R
乙	Y	B	G	R	G	Y
丙	G	G	R	B	Y	B
丁	R	R	B	Y	R	G

(2) 統計：

6 面體編號	紅 R	黃 Y	藍 B	綠 G	合計
甲	2	2	1	1	6
乙	1	2	1	2	6
丙	1	1	2	2	6
丁	3	1	1	1	6
顏色總數	7	6	5	6	24
需要顏色	4	4	4	4	16
多餘顏色	3	2	1	2	8

(3) 分組分析和函數分析：

說明六面體編號 1111 是什麼意思：第一個 1 是正六面體甲的第一組；第二個 1 是正六面體乙的第一組；第三個 1 是正六面體丙的第一組；最後的 1 就是正六面體丁的第一組。

六面體 編·號	甲		乙		丙		丁		R	Y	B	G	是否 正確
1111	Y	R	Y	B	G	G	R	R	3	2	1	2	0
1112	Y	R	Y	B	G	G	B	Y	1	3	2	2	X
1113	Y	R	Y	B	G	G	R	G	2	2	1	3	X
1121	Y	R	Y	B	R	B	R	R	4	2	2	0	X
1122	Y	R	Y	B	R	B	B	Y	2	3	3	0	X
1123	Y	R	Y	B	R	B	R	G	3	2	2	1	X
1131	Y	R	Y	B	Y	B	R	R	3	3	2	0	X
1132	Y	R	Y	B	Y	B	B	Y	1	4	3	0	X
1133	Y	R	Y	B	Y	B	R	G	2	3	2	1	X
1211	Y	R	G	R	G	G	R	R	4	1	0	3	X

1212 ^e	Y ^e	R ^e	G	R ^e	G	G	B ^e	Y ^e	2 ^e	2 ^e	1 ^e	3 ^e	X ^e
1213 ^e	Y ^e	R ^e	G	R ^e	G	G	R ^e	G	3 ^e	1 ^e	0 ^e	4 ^e	X ^e
1221 ^e	Y ^e	R ^e	G	R ^e	R ^e	B ^e	R ^e	R ^e	5 ^e	1 ^e	1 ^e	1 ^e	X ^e
1222 ^e	Y ^e	R ^e	G	R ^e	R ^e	B ^e	B ^e	Y ^e	3 ^e	2 ^e	2 ^e	1 ^e	X ^e
1223 ^e	Y ^e	R ^e	G	R ^e	R ^e	B ^e	R ^e	G	4 ^e	1 ^e	1 ^e	2 ^e	X ^e
1231 ^e	Y ^e	R ^e	G	R ^e	Y ^e	B ^e	R ^e	R ^e	4 ^e	2 ^e	1 ^e	1 ^e	X ^e
1232 ^e	Y ^e	R ^e	G	R ^e	Y ^e	B ^e	B ^e	Y ^e	2 ^e	3 ^e	2 ^e	1 ^e	X ^e
1233 ^e	Y ^e	R ^e	G	R ^e	Y ^e	B ^e	R ^e	G	3 ^e	2 ^e	1 ^e	2 ^e	O ^e
1311 ^e	Y ^e	R ^e	G	Y ^e	G	G	R ^e	R ^e	3 ^e	2 ^e	0 ^e	3 ^e	X ^e
1312 ^e	Y ^e	R ^e	G	Y ^e	G	G	B ^e	Y ^e	1 ^e	3 ^e	1 ^e	3 ^e	X ^e
1313 ^e	Y ^e	R ^e	G	Y ^e	G	G	R ^e	G	2 ^e	2 ^e	0 ^e	4 ^e	X ^e
1321 ^e	Y ^e	R ^e	G	Y ^e	R ^e	B ^e	R ^e	R ^e	4 ^e	2 ^e	1 ^e	1 ^e	X ^e
1322 ^e	Y ^e	R ^e	G	Y ^e	R ^e	B ^e	B ^e	Y ^e	2 ^e	3 ^e	2 ^e	1 ^e	X ^e
1323 ^e	Y ^e	R ^e	G	Y ^e	R ^e	B ^e	R ^e	G	3 ^e	2 ^e	1 ^e	2 ^e	O ^e
1331 ^e	Y ^e	R ^e	G	Y ^e	Y ^e	B ^e	R ^e	R ^e	3 ^e	3 ^e	1 ^e	1 ^e	X ^e
1332 ^e	Y ^e	R ^e	G	Y ^e	Y ^e	B ^e	B ^e	Y ^e	1 ^e	4 ^e	2 ^e	1 ^e	X ^e
1333 ^e	Y ^e	R ^e	G	Y ^e	Y ^e	B ^e	R ^e	G	2 ^e	3 ^e	1 ^e	2 ^e	X ^e
2111 ^e	Y ^e	G	Y ^e	B ^e	G	G	R ^e	R ^e	2 ^e	2 ^e	1 ^e	3 ^e	X ^e
2112 ^e	Y ^e	G	Y ^e	B ^e	G	G	B ^e	Y ^e	0 ^e	3 ^e	2 ^e	3 ^e	X ^e
2113 ^e	Y ^e	G	Y ^e	B ^e	G	G	R ^e	G	1 ^e	2 ^e	1 ^e	4 ^e	X ^e
2121 ^e	Y ^e	G	Y ^e	B ^e	R ^e	B ^e	R ^e	R ^e	3 ^e	2 ^e	2 ^e	1 ^e	X ^e
2122 ^e	Y ^e	G	Y ^e	B ^e	R ^e	B ^e	B ^e	Y ^e	1 ^e	3 ^e	3 ^e	1 ^e	X ^e
2123 ^e	Y ^e	G	Y ^e	B ^e	R ^e	B ^e	R ^e	G	2 ^e	2 ^e	2 ^e	2 ^e	X ^e
2131 ^e	Y ^e	G	Y ^e	B ^e	Y ^e	B ^e	R ^e	R ^e	2 ^e	3 ^e	2 ^e	1 ^e	X ^e
2132 ^e	Y ^e	G	Y ^e	B ^e	Y ^e	B ^e	B ^e	Y ^e	0 ^e	4 ^e	3 ^e	1 ^e	X ^e
2133 ^e	Y ^e	G	Y ^e	B ^e	Y ^e	B ^e	R ^e	G	1 ^e	3 ^e	2 ^e	2 ^e	X ^e
2211 ^e	Y ^e	G	G	R ^e	G	G	R ^e	R ^e	3 ^e	1 ^e	0 ^e	4 ^e	X ^e
2212 ^e	Y ^e	G	G	R ^e	G	G	B ^e	Y ^e	1 ^e	2 ^e	1 ^e	4 ^e	X ^e
2213 ^e	Y ^e	G	G	R ^e	G	G	R ^e	G	2 ^e	1 ^e	0 ^e	5 ^e	X ^e
2221 ^e	Y ^e	G	G	R ^e	R ^e	B ^e	R ^e	R ^e	4 ^e	1 ^e	1 ^e	2 ^e	X ^e
2222 ^e	Y ^e	G	G	R ^e	R ^e	B ^e	B ^e	Y ^e	2 ^e	2 ^e	2 ^e	2 ^e	X ^e
2223 ^e	Y ^e	G	G	R ^e	R ^e	B ^e	R ^e	G	3 ^e	1 ^e	1 ^e	3 ^e	X ^e
2231 ^e	Y ^e	G	G	R ^e	Y ^e	B ^e	R ^e	R ^e	3 ^e	2 ^e	1 ^e	2 ^e	O ^e
2232 ^e	Y ^e	G	G	R ^e	Y ^e	B ^e	B ^e	Y ^e	1 ^e	3 ^e	2 ^e	2 ^e	X ^e
2233 ^e	Y ^e	G	G	R ^e	Y ^e	B ^e	R ^e	G	2 ^e	2 ^e	1 ^e	3 ^e	X ^e
2311 ^e	Y ^e	G	G	Y ^e	G	G	R ^e	R ^e	2 ^e	2 ^e	0 ^e	4 ^e	X ^e
2312 ^e	Y ^e	G	G	Y ^e	G	G	B ^e	Y ^e	0 ^e	3 ^e	1 ^e	4 ^e	X ^e
2313 ^e	Y ^e	G	G	Y ^e	G	G	R ^e	G	1 ^e	2 ^e	0 ^e	5 ^e	X ^e
2321 ^e	Y ^e	G	G	Y ^e	R ^e	B ^e	R ^e	R ^e	3 ^e	2 ^e	1 ^e	2 ^e	O ^e

2322	Y	G	G	Y	R	B	B	Y	1	3	2	2	X
2323	Y	G	G	Y	R	B	R	G	2	2	1	3	X
2331	Y	G	G	Y	Y	B	R	R	2	3	1	2	X
2332	Y	G	G	Y	Y	B	B	Y	0	4	2	2	X
2333	Y	G	G	Y	Y	B	R	G	1	3	1	3	X
3111	B	R	Y	B	G	G	R	R	3	1	2	2	X
3112	B	R	Y	B	G	G	B	Y	1	2	3	2	X
3113	B	R	Y	B	G	G	R	G	2	1	2	3	X
3121	B	R	Y	B	R	B	R	R	4	1	3	0	X
3122	B	R	Y	B	R	B	B	Y	2	2	4	0	X
3123	B	R	Y	B	R	B	R	G	3	1	3	1	X
3131	B	R	Y	B	Y	B	R	R	3	2	3	0	X
3132	B	R	Y	B	Y	B	B	Y	1	3	4	0	X
3133	B	R	Y	B	Y	B	R	G	2	2	3	1	X
3211	B	R	G	R	G	G	R	R	4	0	1	3	X
3212	B	R	G	R	G	G	B	Y	2	1	2	3	X
3213	B	R	G	R	G	G	R	G	3	0	1	4	X
3221	B	R	G	R	R	B	R	R	5	0	2	1	X
3222	B	R	G	R	R	B	B	Y	3	1	3	1	X
3223	B	R	G	R	R	B	R	G	4	0	2	2	X
3231	B	R	G	R	Y	B	R	R	4	1	2	1	X
3232	B	R	G	R	Y	B	B	Y	2	2	3	1	X
3233	B	R	G	R	Y	B	R	G	3	1	2	2	X
3311	B	R	G	Y	G	G	R	R	3	1	1	3	X
3312	B	R	G	Y	G	G	B	Y	1	2	2	3	X
3313	B	R	G	Y	G	G	R	G	2	1	1	4	X
3321	B	R	G	Y	R	B	R	R	4	1	2	1	X
3322	B	R	G	Y	R	B	B	Y	2	2	3	1	X
3323	B	R	G	Y	R	B	R	G	3	1	2	2	X
3331	B	R	G	Y	Y	B	R	R	3	2	2	1	X
3332	B	R	G	Y	Y	B	B	Y	1	3	3	1	X
3333	B	R	G	Y	Y	B	R	G	2	2	2	2	X

使用 Microsoft Excel 函數統計示例:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	六面體	甲		乙		丙		丁		R	Y	B	G	是否正解
2	3333	B	R	G	Y	Y	B	R	G	2	2	2	2	X

儲存格	輸入統計函數(計算各顏色數量)	顯示計算結果	輸入統計函數(檢驗是否為正解)	正解否
J2:	=COUNTIF(\$B\$2:\$I\$2,"R")	2	N2: IF(AND(J2=3,K2=2,L2=1,M2=2),"O","X")	X
K2:	=COUNTIF(\$B\$2:\$I\$2,"Y")	2		
L2:	=COUNTIF(\$B\$2:\$I\$2,"B")	2		
M2:	=COUNTIF(\$B\$2:\$I\$2,"G")	2		

計算範圍內指定儲存格的數目

檢驗(J2,K2,L2,M2) = (3,2,1,2) 顯示O

檢驗(J2,K2,L2,M2) (3,2,1,3) 顯示X

Microsoft Excel 函數統計如下:

函數名稱	功能
COUNTIF (數據範圍, 條件)	計算某範圍內符合某搜尋準則的儲存格個數。
IF (Logical_test, Value_if_true, Value_if_false)	如果指定的條件為 TRUE 則傳回一值, 如果為 FALSE 則傳回另一值。
AND (公式 1, 公式 2,, 公式 30)	當所有引數的邏輯值均為 TRUE 時則傳回 TRUE, 否則即傳回 FALSE。

(4) 驗證可能為底的 5 組解:

六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
1111	Y	R	Y	B	G	G	R	R	O
1233	Y	R	G	R	Y	B	R	G	O
1323	Y	R	G	Y	R	B	R	G	O
2231	Y	G	G	R	Y	B	R	R	O
2321	Y	G	G	Y	R	B	R	R	O

(5) 檢驗是不是答案:

1	六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
	1111	Y	R	Y	B	G	G	R	R	O

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	Y	R	Y	G	B	R
乙	Y	B	G	R	G	Y
丙	G	G	R	B	Y	B
丁	R	R	B	Y	R	G

2	六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
	1233	Y	R	G	R	Y	B	R	G	X

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	Y	R	Y	G	B	R
乙	G	R	G	Y	Y	B
丙	Y	B	G	G	R	B
丁	R	G	R	R	B	Y

3	六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
	1323	Y	R	G	Y	R	B	R	G	X

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	Y	R	Y	G	B	R
乙	G	Y	Y	B	G	R
丙	R	B	Y	B	G	G
丁	R	G	R	R	B	Y

4	六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
	2231	Y	G	G	R	Y	B	R	R	X

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	Y	G	B	R	Y	R
乙	G	R	G	Y	Y	B
丙	Y	B	G	G	R	B
丁	R	R	B	Y	R	G

5	六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
	2321	Y	G	G	Y	R	B	R	R	X

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	Y	G	B	R	Y	R
乙	G	Y	Y	B	G	R
丙	R	B	Y	B	G	G
丁	R	R	B	Y	R	G

(二) 重新製作完確的「瘋不瘋?非常瘋!」遊戲

1.用五個正八面體

(1) 第一次配置：

玩這種遊戲的目標是把五塊正八面體依相對位置相疊或在平面排成一列，使相對位置的六個側面，都有不同五種顏色！

因為在之前的作品中，發現了一些關鍵，會導致無法創造出唯一解的題目，因此在這次的製作中，特別注重的一些顏色相互的關係，即可避免出現第二組以上的解答！

正八面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面	
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	B	B	B
丙	Y	Y	N	Y	N	Y	R	R
丁	N	N	R	G	R	G	Y	N
戊	N	N	G	R	G	R	N	Y

(一組側面是指兩個平行相對的面)

此為我參加小學科展時所設計的遊戲，乍看之下並無缺陷，但在顏色的組合中隱藏著相似的組合，只要有二個正八面體排列有相似的組合，就會增加第二組解答的危險性，此缺點是在使用 Excel 函數檢驗時找到。(此設計不符合遊戲設計的目的，需改良！)

(2) 第二次顏色配置

八面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
甲	R	N	B	R	Y	G	N	B
乙	N	R	N	B	R	B	G	N
丙	Y	Y	G	N	B	R	Y	G
丁	R	N	Y	G	N	Y	R	Y
戊	N	R	R	Y	G	N	B	R

經過縝密的改良後，像之前設計中的第 2 及第 3 組對面有相似，但在此設計中完全找不到，並由這次的改良中發現了一些設計時要注意的事項，是之前沒有想到的。

函數分析後發現這次應該沒有問題了(真正只有一組讓人瘋掉的解答!!)

最後我選擇了第二次顏色調整後的 4 組側面。

結果--以五個正八面體為題目設計如下：

5-甲		5-丁	
5-乙		5-戊	
5-丙			

討論--五個正八面體設計

1.亂槍打鳥法（嘗試錯誤法）：

一個正八面體有八個面，每個面都是正三角形，當我們將它旋轉，每個面朝上考慮相對位置都有三種不同的排法，所以就僅僅這一個正八面體就有 $3 \times 8 = 24$ 種不同的放置方法，五個疊在一起，不計算這些正八面體彼此之間的排列關係，也要有 $24^5 = 7962624$ 種排法。

2.推理分析法

(1) 分析：

- 1 每塊正八面體不會出現的兩面，是上下分別平行的一對，我們稱它為底。
- 2 根據以上分析，每塊正八面體可以分成 4 組。（上下平行兩面為一組）

八面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
甲	R	N	B	R	Y	G	N	B
乙	N	R	N	B	R	B	G	N
丙	Y	Y	G	N	B	R	Y	G
丁	R	N	Y	G	N	Y	R	Y
戊	N	R	R	Y	G	N	B	R

(2) 統計：

八面體編號	紅 R	黃 Y	藍 B	綠 G	無色 N	合計
甲	2	1	2	1	2	8
乙	2	0	2	1	3	8
丙	1	3	1	2	1	8
丁	2	3	0	1	2	8
戊	3	1	1	1	2	8
顏色總數	10	8	6	6	10	40
需要顏色	6	6	6	6	6	30
多餘顏色	4	2	0	0	4	10

(3) 分組分析:

講解八面體編號 11111 是什麼意思：第一個 1 是正八面體甲的第一組；第二個 1 是正八面體乙的第二組；第三個 1 是正八面體丙的第一組；第四個 1 是正八面體丁的第二組；最後的 1 就是正八面體戊的第一組。

八面體 編·號	甲		乙		丙		丁		戊		紅 R	黃 Y	藍 B	綠 G	N	是否 正解
	R	N	R	N	Y	Y	R	N	R	N	4	2	0	0	4	
11111	R	N	N	R	Y	Y	R	N	N	R	4	2	0	0	4	O
11112	R	N	N	R	Y	Y	R	N	R	Y	4	3	0	0	3	X
11113	R	N	N	R	Y	Y	R	N	G	N	3	2	0	1	4	X
11114	R	N	N	R	Y	Y	R	N	B	R	4	2	1	0	3	X
11121	R	N	N	R	Y	Y	Y	G	N	R	3	3	0	1	3	X
11122	R	N	N	R	Y	Y	Y	G	R	Y	3	4	0	1	2	X
11123	R	N	N	R	Y	Y	Y	G	G	N	2	3	0	2	3	X
11124	R	N	N	R	Y	Y	Y	G	B	R	3	3	1	1	2	X
11131	R	N	N	R	Y	Y	N	Y	N	R	3	3	0	0	4	X
11132	R	N	N	R	Y	Y	N	Y	R	Y	3	4	0	0	3	X
11133	R	N	N	R	Y	Y	N	Y	G	N	2	3	0	1	4	X
11134	R	N	N	R	Y	Y	N	Y	B	R	3	3	1	0	3	X
11141	R	N	N	R	Y	Y	R	Y	N	R	4	3	0	0	3	X
11142	R	N	N	R	Y	Y	R	Y	R	Y	4	4	0	0	2	X
11143	R	N	N	R	Y	Y	R	Y	G	N	3	3	0	1	3	X
11144	R	N	N	R	Y	Y	R	Y	B	R	4	3	1	0	2	X

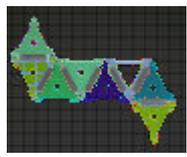
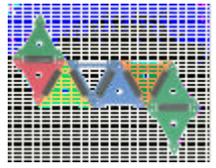
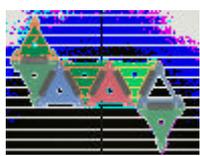
2.用六個正八面體

玩這種遊戲的目標是把六塊正八面體依相對位置相疊或在平面排成一列，使相對位置的六個側面，都有不同六種顏色！

八面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
甲	G	B	B	Y	O	N	G	R
乙	G	G	R	B	Y	O	N	G
丙	O	G	G	R	B	Y	O	N
丁	O	O	N	G	R	B	Y	O
戊	B	O	O	N	G	R	B	Y
己	B	B	Y	O	N	G	R	B

累積上次失敗的經驗，一試便 OK

結果--以六個正八面體為題目設計如下：

6-甲		6-丁	
6-乙		6-戊	
6-丙		6-己	

討論--六個正八面體設計

1.亂槍打鳥法（嘗試錯誤法）：

一個正八面體有八個面，每個面都是正三角形，當我們將它旋轉，每個面朝上考慮相對位置都有三種不同的排法，所以就僅僅這一個正八面體就有 $3 \times 8 = 24$ 種不同的放置方法，六個疊在一起，則有 $24^6 = 191,101,976$ 種排法，你覺得你猜對的機會很多嗎？

2.推理分析法

(1) 分析：

- 1 每塊正八面體不會出現的兩面，是上下分別平行的一對，我們稱它為底。
- 2 根據以上分析，每塊正八面體可以分成 4 組。（上下平行兩面為一組）

八面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
甲	G	B	B	Y	O	N	G	R
乙	G	G	R	B	Y	O	N	G

丙	O	G	G	R	B	Y	O	N
丁	O	O	N	G	R	B	Y	O
戊	B	O	O	N	G	R	B	Y
己	B	B	Y	O	N	G	R	B

(2) 統計：

6面體編號	紅 R	黃 Y	藍 B	綠 G	無 N	橙 O	合計
甲	1	1	2	2	1	1	8
乙	1	1	1	3	1	1	8
丙	1	1	1	2	1	2	8
丁	1	1	1	1	1	3	8
戊	1	1	2	1	1	2	8
己	1	1	3	1	1	1	8
顏色總數	6	6	10	10	6	10	48
需要顏色	6	6	6	6	6	6	36
多餘顏色	0	0	4	4	0	4	12

(3) 分組分析：

講解 111111 是什麼意思：第一個 1 是正八面體甲的第一組；第二個 1 是正八面體乙的第一組；第三個 1 是正八面體丙的第一組；第四個 1 是正八面體丁的第一組；第五個 1 是正八面體戊的第二組；最後的 1 就是正八面體己的第一組。

自 111111 至 444444 共有 $4^6=4096$ 種配對，如果真要分析全部 4096 種排列組合，恐怕自己先瘋了第一步刻意設計多餘顏色為藍、綠、橙色各四個；換句話說，紅、黃、無三色不可能出現在底面。

所以將第一個正八面體設計如下：

甲	G	B	B	Y	O	N	G	R
---	---	---	---	---	---	---	---	---

自 211111 至 444444 共有 $3*(4^5)=3072$ 排列組合對不可能為解。 $4096-3072=1024$

將第二正八面體設計個如下：

乙	G	G	R	B	Y	O	N	G
---	---	---	---	---	---	---	---	---

自 121111 至 144444 共有 $3*(4^4)=768$ 排列組合對不可能為解。 $1024-768=256$

將第三個正八面體設計如下：

丙	O	G	G	R	B	Y	O	N
---	---	---	---	---	---	---	---	---

自 112111 至 114444 共有 $3*(4^3)=192$ 排列組合對不可能為解。 $256-192=64$

將第四個正八面體設計如下：

丁	O	O	N	G	R	B	Y	O
---	---	---	---	---	---	---	---	---

自 111211 至 111444 共有 $3 \cdot (4^2) = 48$ 排列組合對不可能為解。 $64 - 48 = 16$

將第五個正八面體設計如下：

戊	B	O	O	N	G	R	B	Y
---	---	---	---	---	---	---	---	---

自 111121 至 111144 共有 $3 \cdot (4^1) = 12$ 種排列組合不可能為解。 $16 - 12 = 4$

將第六個正八面體設計如下：

己	B	B	Y	O	N	G	R	B
---	---	---	---	---	---	---	---	---

自 111112 至 111114 共有 $3 \cdot (4^0) = 3$ 種排列組合不可能為解。 $4 - 3 = 1$

最後只剩 1 種，就是唯一答案。

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面		第 5 組對面		第 6 組對面	
111111	G	B	G	G	O	G	O	O	B	O	B	B

3. 用四個-七個-八個正八面體

(1) 四個正八面體

八面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
甲	G	Y	G	B	Y	R	G	B
乙	Y	G	B	Y	R	G	B	Y
丙	G	Y	Y	R	G	B	Y	R
丁	Y	G	R	G	B	Y	R	G

(2) 七個正八面體

八面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
甲	G	P	B	P	Y	O	N	G
乙	G	G	R	B	P	Y	O	N
丙	O	G	G	R	B	P	Y	O
丁	O	O	N	G	R	B	P	Y
戊	P	O	O	N	G	R	B	P
己	P	P	Y	O	N	G	R	B
庚	P	P	P	Y	O	N	G	R

(3) 八個正八面體

八面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
甲	B	R	G	B	N	P	S	R
乙	R	P	B	N	P	S	R	O
丙	P	B	N	P	S	R	O	Y

丁	B	R	P	S	R	O	Y	G
戊	R	P	S	R	O	Y	G	B
己	P	B	R	O	Y	G	B	N
庚	B	R	O	Y	G	B	N	P
辛	R	P	Y	G	B	N	P	S

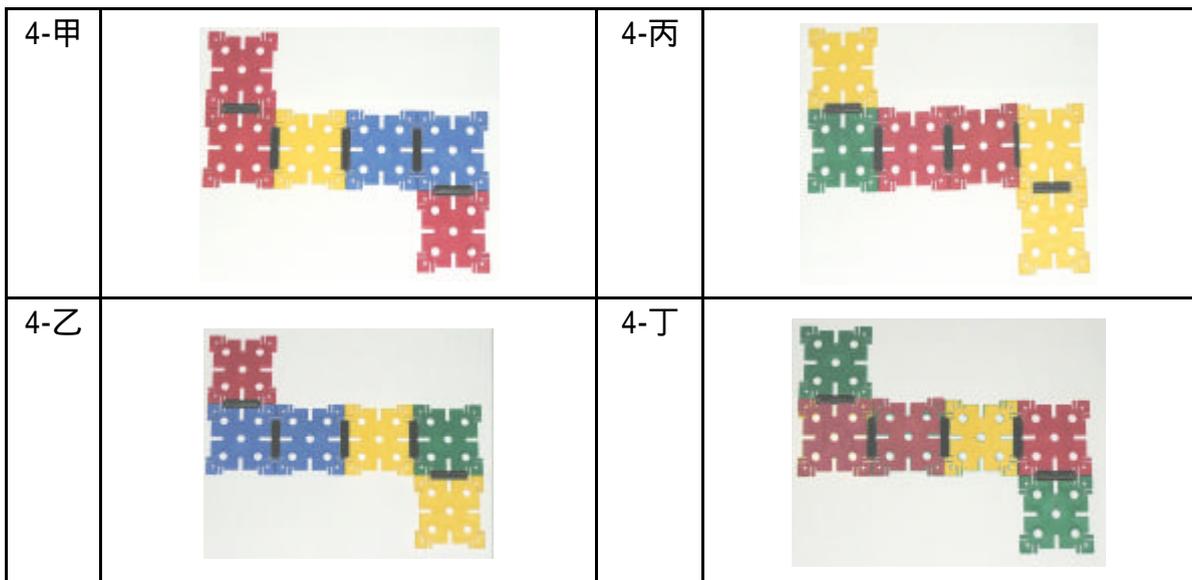
(三) 以正六面體為題，自己發展另一系列「立即瘋」遊戲。

1、四種顏色四方塊成柱

玩這種遊戲的目標是把四塊正六面體依相對位置相疊或在平面排成一列，使相對位置的四個側面，都有不同顏色！

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	R	R	G	B	Y	B
乙	R	Y	B	G	B	Y
丙	Y	Y	Y	R	G	G
丁	G	G	R	Y	R	R

結果--以四個正六面體為題目設計如下：



討論--四種顏色四方塊成柱

1.亂槍打鳥法（嘗試錯誤法）：

一個正六面體有六個面，每個面都是正方形，當我們將它旋轉，每個面朝上考慮相對位置都有四種不同的排法，所以就僅僅這一個正六面體就有 $4 \times 6 = 24$ 種不同的放置方法，四個疊在一起，不計算這些正六面體彼此之間的排列關係，也要有 $24^4 = 331776$ 種排法。

2.推理分析法

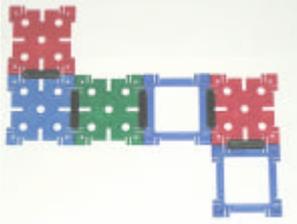
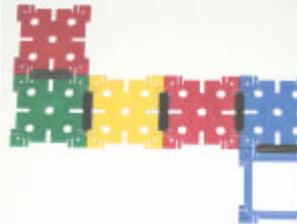
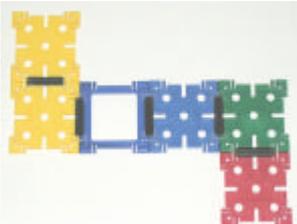
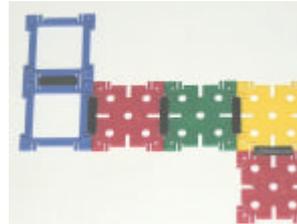
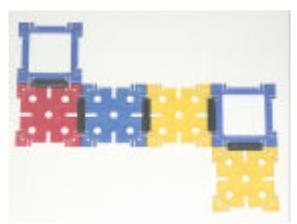
1121	R	R	R	Y	Y	R	G	G	X
1122	R	R	R	Y	Y	R	R	Y	X
1123	R	R	R	Y	Y	R	R	R	X
1131	R	R	R	Y	G	G	G	G	X
1132	R	R	R	Y	G	G	R	Y	X
1133	R	R	R	Y	G	G	R	R	X

2、五種顏色五方塊成柱

玩這種遊戲的目標是把五塊正六面體依相對位置相疊或在平面排成一列，使相對位置的五個側面，都有不同顏色！

正六面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	R	N	B	N	G	R
乙	Y	R	Y	B	N	G
丙	N	Y	R	Y	B	N
丁	R	N	G	R	Y	B
戊	N	R	N	G	R	Y

結果--以五種顏色五方塊成柱為題目設計如下：

5-甲		5-丁	
5-乙		5-戊	
5-丙			

討論--五種顏色五方塊成柱

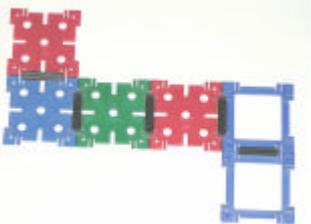
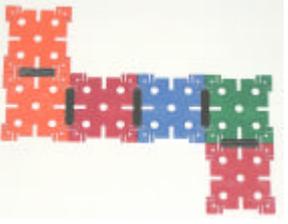
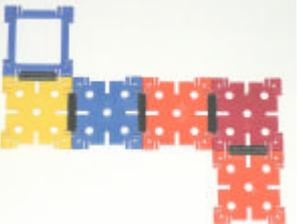
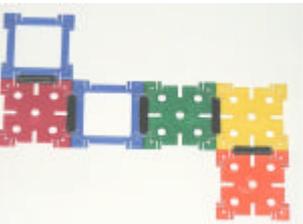
(略)

3、 六種顏色六方塊成柱

玩這種遊戲的目標是把六塊正六面體依相對位置相疊或在平面排成一列，使相對位置的六個側面，都有不同顏色！

六面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組	
甲	R	N	B	R	G	N
乙	O	R	O	B	R	G
丙	N	O	Y	O	B	R
丁	R	N	N	Y	O	B
戊	O	R	G	N	Y	O
己	N	O	R	G	N	Y

結果--以六種顏色六方塊成柱為題目設計如下：

6-甲		6-丁	
6-乙		6-戊	
6-丙		6-己	

討論--六種顏色六方塊成柱

1.亂槍打鳥法（嘗試錯誤法）：

一個正六面體有六個面，每個面都是正方形，當我們將它旋轉，每個面朝上考慮相對位

置都有四種不同的排法，所以就僅僅這一個正六面體就有 $4 \times 6 = 24$ 種不同的放置方法，四個疊在一起，不計算這些正六面體彼此之間的排列關係，也要有 $24^6 = 191102976$ 種排法。

2. 推理分析法

(1) 分析:

- 1 每塊正六面體不會出現的兩面,是上下分別平行的一對,我們稱它為底。
- 2 根據以上分析,每塊正六面體可以分成 3 組。(上下平行兩面為一組)

六面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組	
甲	R	N	B	R	G	N
乙	O	R	O	B	R	G
丙	N	O	Y	O	B	R
丁	R	N	N	Y	O	B
戊	O	R	G	N	Y	O
己	N	O	R	G	N	Y

(2) 統計:

六面體編號	紅 R	黃 Y	藍 B	綠 G	無 N	橙 O	合計
1	2	0	1	1	2	0	6
2	2	0	1	1	0	2	6
3	1	1	1	0	1	2	6
4	1	1	1	0	2	1	6
5	1	1	0	1	1	2	6
6	1	1	0	1	2	1	6
顏色總數	8	4	4	4	8	8	36
需要顏色	4	4	4	4	4	4	24
多餘顏色	4	0	0	0	4	4	12

(3) 分組分析:

講解六面體編號 111111 是什麼意思：第一個 1 是正六面體甲的第一組；第二個 1 是正六面體乙的第一組；第三個 1 是正六面體丙的第一組；第四個 1 是正六面體丁的第一組；第五個 1 是正六面體戊的第二組；最後的 1 就是正六面體己的第一組。

自 111111 至 333333 共有 $3^6 = 729$ 種排列組合,如果真要分析全部 729 種配對,恐怕自己先瘋了,第一步刻意設計多餘顏色為紅、橙、無色各四個;換句話說,藍、黃、綠三色不可能出現在底面

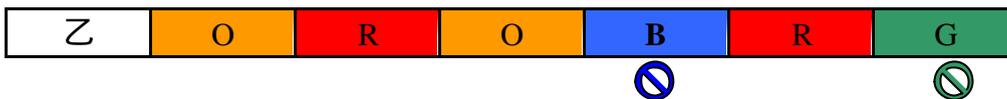
所以將第一個正六面體設計如下:

甲	R	N	B	R	G	N
---	---	---	---	---	---	---



自 211111 至 333333 共有 $2 \times (3^5) = 486$ 種排列組合不可能為解。 $729 - 486 = 243$

將第二個正八面體設計如下：



自 121111 至 133333 共有 $2 \times (3^4) = 162$ 種排列組合不可能為解。 $243 - 162 = 81$

將第三個正八面體設計如下：



自 112111 至 113333 共有 $2 \times (3^3) = 54$ 種排列組合不可能為解。 $81 - 54 = 27$

將第四個正八面體設計如下：



自 111211 至 111333 共有 $2 \times (3^2) = 18$ 種排列組合不可能為解。 $27 - 18 = 9$



自 111121 至 111133 共有 $2 \times (3^1) = 6$ 種排列組合不可能為解。 $9 - 6 = 3$

最後只剩 3 種排列組合做分析,很快就可以找出唯一答案

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面		第 5 組對面		第 6 組對面		
111111	R	R	R	R	O	O	O	O	N	N	N	N	o
111112	R	R	R	R	O	O	O	O	N	N	O	R	x
111113	R	R	R	R	O	O	O	O	N	N	N	R	x

柒、研究結果：

本作品由分析解決四塊正六面體的「立即瘋」遊戲，延伸至創作自己的「究極瘋」和「瘋不瘋?非常瘋!」，改變固定數量和型式，發現一片新園地，充分感受到過程的辛苦和喜悅！

這次科展持續發展其他不同顏色配對，將「瘋不瘋?非常瘋!」變成一序列推理分析的學習活動。

捌、討論：

一、解題時，會有很多的配對方式，之前使用從相對面和「底」方式著手的「顏色表格化分析」雖然方便分析，還是需要不少時間計算各種顏色出現次數，因次，這次以顏色表格化分析為基本，發展出「Excel 函數分析」。「顏色表格化分析」可以方便看出顏色，但是一整排的表格還是累人，「Excel 函數分析」改正之前計算時的缺點，可利用電腦自行記數，避免人工統計錯誤，更可有效省去大半的時間。

二、顏色排列複雜多樣的「瘋不瘋?非常瘋!」，可透過特殊的配色方式，減少檢驗的次數

與確認解答組合底中只有一種排列方式。

三、益智遊戲革命，將「立即瘋」重新用更多顏色、更多塊數，進而發展成正八面體的「瘋不瘋?非常瘋!」，難度雖然增加很多，但也更有挑戰和趣味，尤其發展成一系列學習活動，而研究過程提供有效和有效率的解題策略。

玖、結論

本作品透過實作和有意義的分析，開發出益智遊戲的新世界，到目前為止，得到以下的結論：

一、正六面體的「立即瘋」遊戲

(一) 原設計的「立即瘋」，共有 24^4 種配對，找出所有答案的檢驗次數是 $3^4+2^4*5=161$ (次)，而檢驗結果恰有一組解。

(二) 用直接進入法想找到另一組唯一解的「立即瘋」遊戲很不容易；用正八面體「瘋不瘋?非常瘋!」反向簡化的過程，很快可以找到另一組唯一解設計的「立即瘋」遊戲

(1) 四種顏色四方塊成柱型的「立即瘋」遊戲。示例如下：

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	R	R	G	B	Y	B
乙	R	Y	B	G	B	Y
丙	Y	Y	Y	R	G	G
丁	G	G	R	Y	R	R

(2) 五種顏色五方塊成柱的「立即瘋」遊戲。示例如下：

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	R	N	B	N	G	R
乙	Y	R	Y	B	N	G
丙	N	Y	R	Y	B	N
丁	R	N	G	R	Y	B
戊	N	R	N	G	R	Y

(3) 六種顏色六方塊成柱的「立即瘋」遊戲。示例如下：

六面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組	
甲	R	N	B	R	G	N
乙	O	R	O	B	R	G
丙	N	O	Y	O	B	R
丁	R	N	N	Y	O	B
戊	O	R	G	N	Y	O
己	N	O	R	G	N	Y

二、已設計正八面體「瘋不瘋?非常瘋!」遊戲主要過程如下：

(一) 全新五個的正八面體「瘋不瘋?非常瘋!」：

1. 五個正八面體疊成一柱，所有配對關係有 $(3*8)^5=7962624$ 種排法。
2. 以相對面為一組，正八面體可以找到相對面的四組配對。
3. 先分析不出現在「可視區」(必須被看到的側面)，可以為「底」的上下一組。
4. 統計出哪些面必須放上下；哪些面必須放側面。
5. 分組分析，並找出可以比檢驗次數更少的設計分析次數。
6. 驗證過程確認找到的「瘋不瘋?非常瘋!」是唯一解。下圖是全新「究極瘋」的一種

八面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
甲	R	N	B	R	Y	G	N	B
乙	N	R	N	B	R	B	G	N
丙	Y	Y	G	N	B	R	Y	G
丁	R	N	Y	G	N	Y	R	Y
戊	N	R	R	Y	G	N	B	R

(二) 六個的正八面體「瘋不瘋?非常瘋!」：

我發現可以簡化新「瘋不瘋?非常瘋!」的設計流程，直接由分組分析著手，於是我找到六顏色六正八面體的新「瘋不瘋?非常瘋!」

六面體	第 1 組		第 2 組		第 3 組	
甲	R	N	B	R	G	N
乙	O	R	O	B	R	G
丙	N	O	Y	O	B	R
丁	R	N	N	Y	O	B
戊	O	R	G	N	Y	O
己	N	O	R	G	N	Y

(三)以顏色加以分組分析，可以較容易設計，再更新的「立即瘋」和「瘋不瘋?非常瘋!」。

三、最後經過驗證，我可以確定題目是沒有相似底的存在，上面的研究發現解答果然只有一個，合乎標準；容易讓人瘋掉（通常都是不分析題目就開始亂湊的人），當然會懂得分析的人就會覺得既好玩又有趣，這個遊戲做的應該還算成功！希望對這種益智遊戲有興趣的人，能繼續研究、創新！

四、電腦科技日新月異，現在我新的學習目標是如何使用 3D 動畫軟體，我想把這個遊戲過程透過 3D 動畫立體呈現，說不定，可以發展成為一個益智遊戲教學軟體。

拾、參考資料：

1. 林志忠 著 (民 89)： 學習策略在資優兒童過程導向教學的應用。112~122 頁。國立新竹師範學院特殊教育中心 印行。
2. Wickelgren 著(汪賢馴譯) (1984)： 怎樣解難題。科學月刊社，臺北。
3. VB Tech Lab.&瀨戶遙 著(民 91)： Excel 函數與巨集應用。57~59 & 135~141 頁。博碩文化。
4. 斯坦 著(葉偉文譯) (2002)： 數學是啥玩意？ 10~47 頁。天下文化。

評語

030412 國中組數學科 佳作

瘋不瘋？非常瘋！

從「立即瘋」遊戲出發，利用相關的數學原理轉化為全新的數學遊戲，創造性與實用性兼具。