中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030410

臺北市立西湖國民中學

指導老師姓名

陳宏仁

徐寶玉

作者姓名

陳煒堯

藍培珊

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數 學 科

組　　別：國 中 組

作品名稱：棋盤上的數學

關 鍵 詞：位置距離

編　　號：

棋盤上的數學

壹、摘要

一、$M_{n\times n}(s)$：在 n×n 正方形棋盤中,排列 s 顆棋子在方格內,每一方格最多只能排 1 子,棋子的配置需滿足兩個條件：

(一) 無任意 4 子可形成矩形框的 4 個頂點(此矩形框需與棋盤邊平行)

(二) 在無棋子的方格中,無法再加入棋子

二、$V_{n\times n\times n}(a_1,......,a_n)$：在 n×n×n 的正方體棋盤中,每層的棋子個數分別為 $a_1,......,a_n$, $S=a_1+......+a_n$,棋子的配置需滿足兩個條件：

(一) 無任意 8 子可形成長方體的 8 個頂點(此長方體邊需與立體棋盤邊平行)

(二) 在無棋子的方格中,無法再加入棋子

本研究在 $M_{n\times n}(s)$與 $V_{n\times n\times n}(a_1,......,a_n)$,$S=a_1+......+a_n$ 中探討 s 的最小值、最大值及變化情形,並分析其配置方法。之後推廣至長方形 $M_{n\times m}(s)$及長方體 $V_{n\times m\times k}(a_1,......,a_k)$,$S=a_1+......+a_k$。最後根據研究結果設計一個「避開矩形框棋」,並分析出致勝的策略。

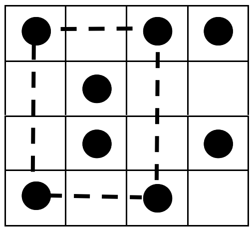
貳、研究動機

從我們幸運的在學校上了一門數學課程～「程序性思考課程」後,我們都對數學產生了興趣有一次,我們在**「趣味數學謎題的 20 種解法」**一書中看到一個問題,問題的內容如下

【問題 84】 不會成為長方形的配置

在 4×4 = 16 個正方形的格子裡面，想多放黑棋子。但是假若沿著格子連結 4 個棋子時，會成為長方形就不行。如右圖有 8 個黑棋子，但會構成虛線那種長方形，所以不行。

請說明具體的配置，同時證實不能再多放。



對於這個問題,我們曾思考過,也試著提出一些策略來解決,策略有

策略一 ： 任意排。策略二 ： 一層一層向外擴大。策略三：利用空格。這些方法對於問題的解決都不大,不是找不出棋子總數為最多,就是方法只限於某個棋盤。就在我們一籌莫展,甚至想就此放棄的同時,我們突然產生一種不一樣的想法

既然要避開矩形框且在空格中無法再加入棋子,換句話說就是在棋盤中每行的任兩顆棋子之距離或所在列的位置需不同 ,且每種距離只能出現一次(位置距離均需不同)

在第四冊第二章「簡單的幾何圖形」單元中,我們學到長方形、正方形、長方體及正方體的特性,另於第一冊第一章「數與數線」單元中也學會數線與絕對值的觀念。因此,想藉著這些基礎及新產生的想法,來繼續挑戰這個問題

參、研究目的

一、 名詞解釋及定義

二、正方形棋盤的探討

$M_{n\times n}(s)$：在 n×n 的方格棋盤中(1<n),排列 s 顆棋子在方格內,每一方格最多只能排 1 子,其中 s 顆棋子的配置需滿足兩個條件

1. 並無任意 4 子可形成矩形框的 4 個頂點(此矩形框的邊需與棋盤的邊平行)

2. 在無棋子的方格中,無法再加入棋子

(一) 在 $M_{n\times n}(s)$中，探討 s 的最小值，並分析其配置方法

(二) 在 $M_{n\times n}(s)$中，探討 s 的最大值，並分析其配置方法

(三) 在 $M_{n\times n}(s)$中，探討 s 的變化情形，並分析其配置方法

三、長方形棋盤的探討

$M_{n\times m}(s)$：在 n×m 的方格棋盤中(1<n<m),排列 s 顆棋子在方格內,每一方格最多只能排 1 子,其中 s 顆棋子的配置需滿足兩個條件

1. 並無任意 4 子可形成矩形框的 4 個頂點(此矩形框的邊需與棋盤的邊平行)

2. 在無棋子的方格中,無法再加入棋子

(一) 在 $M_{n\times m}(s)$中，探討 s 的最小值，並分析其配置方法

(二) 在 $M_{n\times m}(s)$中，探討 s 的最大值，並分析其配置方法

(三) 在 $M_{n\times m}(s)$中，探討 s 的變化情形，並分析其配置方法

四、正方體與長方體棋盤的探討

$V_{n\times n\times n}(a_1,a_2,......,a_n)$：在 n×n×n 的正方體棋盤中(1<n),每層排列棋子的個數分別為 $a_1,a_2,......,a_n$ 且 $s=a_1+a_2+......+a_n$,其中 s 顆棋子的配置需滿足兩個條件：

1. 並無任意 8 子可形成長方體的 8 個頂點(此長方體的邊需與棋盤的邊平行)

2. 在無棋子的方格中,無法再加入棋子

(一) 在 $V_{n\times n\times n}(a_1,a_2,......,a_n)$中(1<n),探討 s 的最小值、最大值及變化情形,並分析配置方法

(二) 在 $V_{n\times m\times k}(a_1,a_2,......,a_k)$中(1<n<m<k),探討 s 的最小值、最大值及變化情形,並分析配置方法

五、設計一個「避開矩形框棋」,並加以分析出致勝的策略

肆、研究過程與方法

一、名詞解釋及定義

(一) 在 n×n 的棋盤中,我們將每個格子編號(i,j)其中 1≤i,j≤n,如表(一)

表（一）

(1,1)	(1,2)	……	(1,k)	……	(1,r)	……	(1,n)
(2,1)	(2,2)	……	(2,k)	……	(2,r)	……	(2,n)
……	……	……	……	……	……	……	……
(i,1)	(i,2)	……	(i,k)	……	(i,r)	……	(i,n)
……	……	……	……	……	……	……	……
(j,1)	(j,2)	……	(j,k)	……	(j,r)	……	(j,n)
……	……	……	……	……	……	……	……
(n,1)	(n,2)	……	(n,k)	……	(n,r)	……	(n,n)

(二) (i,k)=0 表示第 i 列,第 k 行沒有棋子
(j,r)=1 表示第 j 列,第 r 行有棋子

(三) T (i,j;k,r)=abcd 表示 (i,k)=a;(i,r)=b;(j,k)=c;(j,r)=d a.b.c.d∈{0,1}

(四) T (i,j;k)=ab 表示(i,k)=a;(j,k)=b。 a.b∈{0,1}

(五) 位置距離 : 在同一行中之兩子所在列的位置與距離

二、正方形棋盤的探討

(一) 在 $M_{n\times n}$(s)中,探討 s 的最小值,並分析配置方法

1. 探討 S 的最小值

在不同的棋盤下實際排列,試著發現 S 為最小值的規律性。參閱附件(一)

整理與歸納 將附件(一)整理成表(二)

表(二)

n×n	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
S 的最小值	3	5	7	9	11	13	15	17

猜想 由表(二)中形成猜想: 在 $M_{n\times n}$(S)中 S 的最小值=2n-1

舉例檢驗 我們以 n=10 為例 ,S=19 ,與猜想符合，於是加以證明

證明 我們利用反證法

(1) 在 $M_{n\times n}$(S)中,假設 S 的最小值≠2n-1,即 S 的最小值=c,其中 n<c<2n-1

(2) 因為每行至少要有 1 子,所以在剩下的(c-n)子中,不論如何擺放均無法使其中一行全滿,即存在(i,k)=0,且與(i,k)有關的所有矩形框中找不到 T(i,j;k,r)=0111

與配置方法的分析~(3)矛盾！故在 $M_{n\times n}$(S)中 S 的最小值=2n-1

一般化 經過證明後無誤,與猜想符合,因此

在 $M_{n\times n}$(S)中,S 的最小值=2n-1。

2. 分析 S 為最小值配置方法

分析 要找出滿足在$M_{n\times n}$(S)中 ,S的最小值

(1) 每行至少有 1 子

(2) 對於**「擺放棋子要避開矩形框」**條件,T(i,j;k)=11 與 T(i,j;r)=11 不能同時存在

(3) 對於**「空格不能再加入棋子」**條件,對於所有(i,k)=0,則與(i,k)有關的所有矩形框中,至少存在一個 T(i,j;k,r)=0111

策略 (1) 在$n\times C^n_2$的矩形棋盤中,每行放不同位置距離的2子(共有C^n_2個不同位置距離),其滿足$M_{n\times C^n_2}$(s)

(2) 在滿足(1)情況下,將 C^n_2 行的棋子數壓縮到最小,即為只有 1 行擺滿棋子

(3) 其餘(n-1)行各放 1 子,此時 S=2n-1 為 $M_{n\times n}(S)$的最小值

配置方法　根據以上策略知 : $M_{n\times n}(S)$中,配置S為最小值方法

(1) 在n×n棋盤中,使一行擺滿棋子
(2) 在其他(n-1)行中,每行各放1子

(二)在 $M_{n\times n}(s)$中,探討 s 的最大值,並分析配置方法

1. 探討 s 的最大值

在不同棋盤下實際排列, 試著發現 s 為最大值的規律性。參閱附件(二)

整理與歸納　將排列的結果整理成表(三)

表(三)

n×n	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7
s 的最大值	3	6	9	12	16	21

在表(三)中發現 n=2.3.4.5 有規律性,但 n=6.7 以後似乎無規律,因此試著去證明找到的是否為最大值

證明　***請參閱工作記錄及詳見現場說明！***

經過證明後,確定表(三)的最大值無誤,因此朝著將棋盤再擴大的方向去找,如附件(三)

整理歸納

(1) 將附件(三)整理成表(四)

表(四)

n×n	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10	11×11	12×12	13×13
s 最大值	3	6	9	12	16	21	24	29	34	39	45	52
n×n	14×14	15×15	16×16	17×17	18×18	19×19	20×20	21×21	22×22	23×23	24×24	25×25
s 最大值	55	59	65	71	77	84	91	98	106	114	118	125
n×n	26×26	27×27	28×28	29×29	30×30	31×31	32×32	33×33	34×34	35×35		
s 最大值	131	138	146	154	162	171	180	189	199	210		

(2) 表(四)中,只發現總棋子數斷斷續續出現相差 3.4.5.6.7.8 等,但仍觀察不出規律性
(3) 既然從數字面找不出規律性,改變思考方向,從配置方法下手

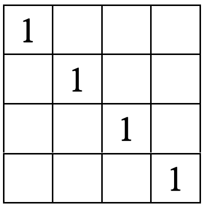
2. 探討 s 為最大值的配置方法

配置方法 1　***斜排思考***

(1) 先排主軸線
(2) 以主軸線兩側交互排列出不同距離的主要斜線
(3) 排出次要斜線

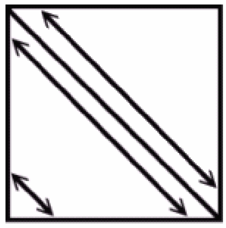
(4) 檢查最後兩條主要斜線是否影響到前一條次要條斜線的棋子數

(配置策略參閱工作記錄及詳見現場說明！)

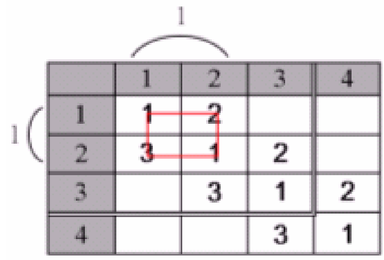


圖(一)

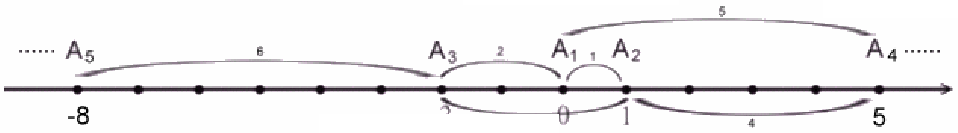
圖(二)



圖(三)

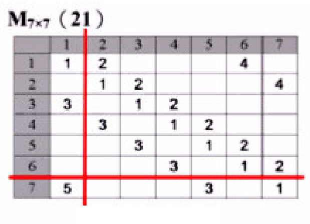


圖(四)



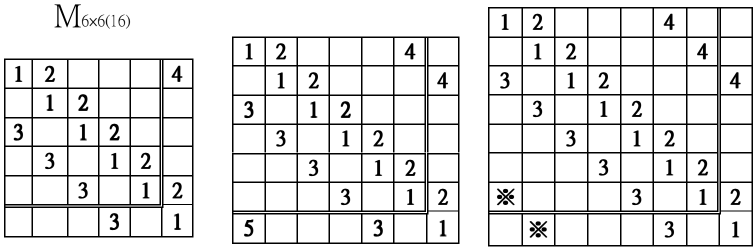
圖(五)

M7×7(21)



圖(六)

M6×6(16)



圖(七)

配置方法 2 ***直(橫)排的組合思考***

定理 1： 在 n× C_2^n 棋盤中,每行放不同位置距離的 2 子,棋子總數為 2 C_2^n ,此 n× C_2^n 棋盤滿足 $M_{n\times C_2^n}(2C_2^n)$,S=2 C_2^n 為最大值

定理 2-1：經選擇的 3 行每行 2 子可換成 1 行 3 子

定理 2-2：經選擇的 1 行 3 子與 3 行每行 2 子可換成 1 行 4 子

定理推廣： 由定理 2-1,2-2 我們可推廣

經選擇的 1 行 k 子與 k 行每行 2 子可換成 1 行(k+1)子

定理 3： 滿足定理 1 的 n× C_2^n 棋盤中,任意刪去一行,所形成的 n×(C_2^n -1)的棋盤亦滿足 $M_{n\times(C_2^n-1)}(2(C_2^n-1))$,s=2(C_2^n -1)為最大值

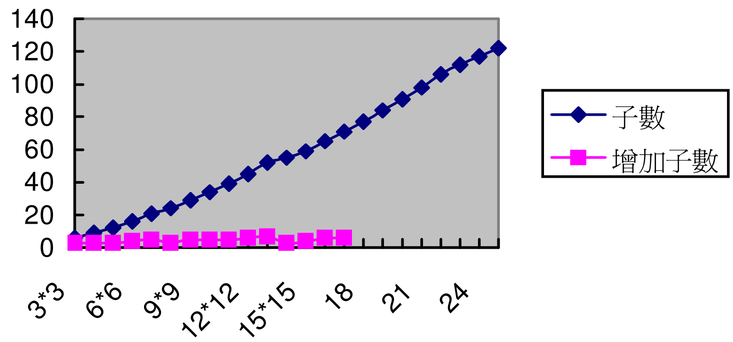
定理證明請參閱工作記錄及詳見現場說明！

所以在 $M_{n\times n}(s)$中,s 為最大值的配置方法

(1) 在 $n\times C_2^n$ 棋盤中,每行放不同位置距離的 2 子
(2) 利用定理 2-1 換子,至不能換爲止
(3) 利用定理 2-2 換子,至不能換爲止
(4) 利用定理 2-1.2-2 之推廣換子,至不能換爲止
(5) 在(2).(3).(4)的過程中,將棋盤換成 $n\times n$ 就停止,但換完後仍有多餘的行數,利用定理 3 刪除

回顧與檢討

(1) 在配置方法上,仍無法找到利於規律性的跡象,我們利用找到的數據資料畫成折線圖來加以檢討原因,如圖(八)



圖(八)

從上面的圖表可發現,此爲一個略有規則的曲線,從加的子數看,也是呈現不規則曲線, 這可作爲未來探討的主題

(2) 就在覺得有些遺憾之時,我們在馮躍峰教授所著的「棋盤上的組合數學」一書中有以下的發現 :(原始資料請參閱附件 (四))

① ***書上提及對於在 $M_{n\times n}(S)$,S 爲最大值時還無一般的答案***

此與我們現在的結果相同

② ***在 $M_{n\times n}(S)$中,S 爲最大值 $MS_n \leqq \dfrac{n+n\sqrt{4n+3}}{2}$***

此不等式有誤,應爲筆誤,正確爲 $MS_n \leqq \dfrac{n+n\sqrt{4n-3}}{2}$

證明: 設每行的棋子個數分別爲 $X_1,X_2,\ldots\ldots,X_n$ $MS_n=X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n=\sum_{i=1}^{n} x_i$

從$\boxed{\text{配置方法 2}}$之位置距離中可知 $C_2^n \geqq \sum_{i=1}^{n} C_2^{x_i}$

所以 $\dfrac{n(n-1)}{2} \geqq \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1)}{2}$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\sum_{i=1}^{n} x_i}{2} \geqq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{2n}-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2}=\frac{MS_n^2}{2n}-\frac{MS_n}{2}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \geqq \frac{MS_n^2}{2n} - \frac{MS_n}{2}$$

$$MS_n^2 - nMS_n - n^2(\mathrm{n}-1) \ \leqq 0 \qquad\qquad MS_n \leqq \frac{n+n\sqrt{4n-3}}{2}$$

在我們找出的 n=2～35 中均符合此不等式

③ ***<u>書上指出 n=4.7.13 時等號成立,即 $MS_4=9,MS_7=21,MS_{13}=53$,並列出排列方法</u>***

其中 $MS_4=9,MS_{13}=53$ 有誤,應爲筆誤,正確爲

$MS_4 \leqq \frac{4+4\sqrt{4\times4-3}}{2}$ ≒9.211 等號不成立(但仍符合上述之不等式)

$MS_{13} \leqq \frac{13+13\sqrt{4\times13-3}}{2}$ =52,而書上 MS_{13} 的排列也是 52 子,此與我們的結果相同,***但排列方式不同***

(3) 在配置方法中檢討爲何找不到規律性的可能原因

① 方法 1 中,主要斜線排列的位置本身失去規律性,參閱附件(五)。再加上次要斜線及「暫時取代」現象的出現與消失,對於棋子總數之規律性均有影響

② 由方法 2 知 : 由於代換須有選擇且多餘部分可刪除 ,此均影響棋子總數的規律性

(三) 在 $M_{n\times n}(s)$中,探討 s 的變化情形,並分析配置方法

在 s 從最小値到最大値之間實際排列,找出滿足 $M_{n\times n}(s)$的棋子總數,參閱附件(六)

整理與歸納

將附件(六)整理成表(五)。

表(五)

s / n×n	最小値	最大値	從最小値到最大値
2×2	3	3	×
3×3	5	6	×
4×4	7	9	7,8,9
5×5	9	12	9,10,11,12
6×6	11	16	11,12,13,14,15,16

猜想　在 $M_{n\times n}(s)$中,s 從最小値到最大値之間,每加 1 子都有解

舉例檢驗

1. n=7， s=13,14,15,16,17,18,19,21 時有解，但 s=20 無解
2. n=10，s=19,20,21,……,32,33,34 時均有解
3. n=18，s=35,36,37,……,75,76,77 時均有解

從以上的例子中，發現 n＝7 時與猜想不合

即對於在 $M_{n\times n}(s)$中，每增加 1 子不一定都有解，因此，將進一步分析其配置方法

分析

1. 若從 s 為最小值開始考慮，則因為在同一行的棋子個數愈多 s 的總數愈少，所以若想再增加棋子，則需考慮移動棋子，使每行的棋子數減少，如此才有機會增加棋子。
2. 同樣的需滿足 $M_{nxn}(s)$的條件。

策略

1. 先排出在 $M_{nxn}(s)$中,s 為最小值的結果
2. 在 $M_{nxn}(s)$中,從 s 為最小值開始,每加 1 子,製造 1 個以上的矩形框
3. 利用移動棋子來破壞此矩形框 ,往 s 為最大值的排列方式思考

配置方法 ***參閱工作記錄及詳見現場說明！***

一般化 因此,我們只能說

在 $M_{nxn}(s)$中,s 從最小值到最大值之間,幾乎每加 1 子都有解

三、長方形棋盤的探討

(一) 在 $M_{nxm}(s)$中($1<n<m$),探討 s 的最小值,並分析配置方法

我們以 $M_{nxn}(s)$中,s 為最小值的配置方法為基礎,進而加以探討

配置方法

1. 先排出在 $M_{nxn}(s)$中,s 為最小值的結果
2. 在其他的(m－n)行中各放一子

一般化

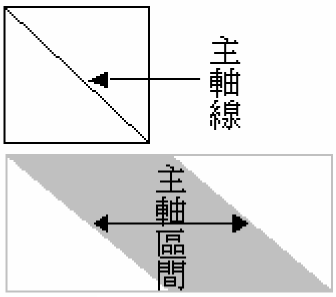
在 M_{nxm} (s)中,$1<n<m$,s 的最小值=n+m-1

(二) 在 M_{nxm} (s)中,探討 S 的最大值,並分析配置方法

利用在 $M_{nxn}(s)$中,s 為最大值的配置方法為基礎,進一步將之推廣出 $M_{nxm}(s)$的配置方法

配置方法 1 ***棋盤框套選的全面性思考 (棋子不動,棋盤動)***

由 $M_{nxn}(s)$,s 為最大值的配置方法 1 推廣：將主軸線拉開成一個主軸區間。如圖(九)



圖(九)

所以在 $M_{nxm}(s)$中,s 為最大值的配置方法

1. 先畫出若干條主要斜線
2. 在選定的 n×m 棋盤框中，套選出使主軸區間有最多條主要斜線的位置
3. 在主軸區間的主要斜線個數確定下,找出非主軸區間，也有最多條主要斜線的位置
4. 利用未出現的位置距離之棋子，組合出一行中最多的棋子，去換排列較少棋子的一行
5. 在排列完成的棋盤中,分解一行中最多棋子數去代換一行中較少的棋子數

配置方法 2　***組合、分解的累積性思考　(棋盤不動,棋子動)***

由 M_{nxn}(s),s 爲最大值的配置方法 2 推廣：尋求每加一行棋子組合分解所形成的矩形棋盤結果配置方法

第一階段： 先排出在 M_{nxn}(s)中,s 爲最大值的結果

第二階段： 對於尙未出現的位置距離,先組合出能在同一行中重複最多的排法(使同一行中產生最多子),排在新加的一行,至剩餘的位置距離都排完

第三階段： 在排列完成的棋子中,分解一行中最多的位置距離,再重複步驟 2.。最後,分解至每行均只有一個位置距離,形成 $n\times C_2^m$ 的矩形

第四階段： 在 $n\times C_2^n$ 的棋盤,每加一行,只能加 1 子

一般化

若 MS_n 爲在 M_{nxn}(S)中,S 的最大值　　RS 爲在 M_{nxm}(S)中,S 的最大值

A_n 爲每行有 n 子之行數　　d 在 n 列中,除 $M_{nxn}(MS_n)$以外,剩餘的位置距離

w 爲棋盤在 $n\times C_2^n$ 後,棋盤加的行數與棋子數

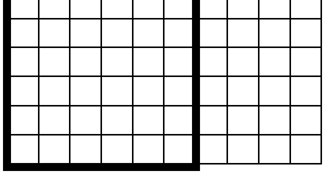
則　$Mn\times(n+d+\frac{(n+1)(n-2)}{2}A_n+\frac{n(n-3)}{2}A_{n-1}+......+9A_5+5A_4+2A_3+w)(RS=MS_n+2d+n(n-2)A_n+(n-1)(n-3)A_{n-1}+......+15A_5+8A_4+3A_3+w)$

反思

1. 方法 1 的主要構想是***棋子不動,棋盤動***,爲直接尋求目的棋盤的全面性找法。方法 2 爲***棋盤不動,棋子動***,爲逐加一行尋求的累積性找法
2. 雖然方法 1 與方法 2 排出的棋子總數均同,***但不同方法排列出的***型態***卻不同***

(三) 在 M_{nxm}(S)中,探討 S 的變化情形,並分析配置方法

由 M_{nxn}(S)中,S 從最小値到最大值之間幾乎每加一子都有解繼續推廣



配置方法

1. 先排出在 M_{nxn}(S)中,S 爲最小値的排列結果
2. 將 n×m 的長方形棋盤分割成一 n×n 的正方形部分與剩餘 n×(m-n)的長方形部分,並利用每加一子,使 n×n 的正方形上的棋子數排列爲最大值

3. 找出未出現的位置距離,剩餘的長方形棋盤中,利用每加一子補齊
4. 最後分解正方形棋盤部分的棋子,使長方形棋盤部份達到每加一子均有解

一般化　在 M_{nxm}(S)中,S 從最小值到最大值之間,每加一子一定都有解

四、正方形體與長方體棋盤的探討

(一) 在 V_{nxnxn} (a_1....a_n),S=a_1+......+a_n 的棋盤中,探討 S 的最小值、最大值及變化情形,並分析配置方法

1. 探討 S 爲最小值、最大值及變化情形

從 M_{nxn}(S)發展所形成的正方體 V_{nxnxn} (a_1......a_n),S=a_1+......+a_n 實際排列,試找出不同立方體棋盤下 S 的變化情形。排列結果,參閱附件(九)

發現與歸納

(1) 在附件(九)中，由於爲不同的 $V_{n\times n\times n}$(a_1……a_n) ,S= a_1+……+a_n，我們將再進一步整理成表(六)。

表(六)

S / n×n×n	最小值 (VmS_n)	最大值 (VMS_n)	從最小值到最大值的變化情形
2×2×2	7	7	7
3×3×3	19	21	19.20.21
4×4×4	37	43	37.38.39.40.41.42.43
5×5×5	61	73	61.62.63.64.65.66.67.68.69.70.71.72.73
6×6×6	91	116	91.92.93.94.95.96.97.98.99.100.101.102.103.104. 105.106.107.108.109.110.111.112.113.114.115.116

(2) 從表(五)中 ,發現 VmS_n

n=2,　$VmS_2=\mathit{7}$

n=3,　$VmS_3=VmS_2+2\times6=\mathit{7+2}\ \times\mathit{6}$

n=4,　$VmS_4=VmS_3+3\times6=7+2\times6+3\times6=\mathit{7+5}\ \times\mathit{6}$

n=5,　$VmS_5=VmS_4+4\times6=7+2\times6+3\times6+4\times6=\mathit{7+9}\ \times\mathit{6}$

n=6,　$VmS_6=VmS_5+5\times6=7+2\times6+3\times6+4\times6+5\times6=\mathit{7+14}\ \times\mathit{6}$

(3) 從表(五)中發現 VMS_n

n=2,　$VMS_2=2^2+3$　　n=5,　$VMS_5=5^2+4\times12$

n=3,　$VMS_3=3^2+2\times6$　　n=6,　$VMS_6=6^2+5\times16$

n=4,　$VMS_4=4^2+3\times9$

(4) 另外,當 S=2~6 中,S 從最小值到最大值之間,每加一子都有解

猜想　對於在發現與歸納中形成以下的猜想

(1) 在 V_{nxnxn} (a_1......a_n),S=a_1+......+a_n 中,S 的最小值爲

$VmS_n=VmS_{n-1}+6\ (n-1)$

$=VmS_{n-2}+6[(n-2)+(n-1)]$

$=VmS_{n-3}+6[(n-3)+(n-2)+(n-1)]$

- - - - - - - - - - - -

$=VmS_2+6[2+3+4+......+(n-3)+(n-2)+(n-1)]$

$$=VmS_2+6\times\frac{(2+n-1)(n-2)}{2}$$

$=7+3(n-2)(n+1)$

$=3n^2-3n+1$

(2) 在 $V_{nxnxn}(a_1......a_n)$,$S=a_1+......+a_n$ 中,S 的最大值爲 $VMS_n=n^2+(n-1)MS_n$,MS_n 爲在 $M_{nxn}(S)$中,s 的最大值

(3) 在 $V_{nxnxn}(a_1......a_n)$,$S=a_1+......+a_n$ 中,S 從最小值到最大值之間每加 1 子均有解

$\boxed{\text{證明與分析}}$ **請參閱配置方法！**

$\boxed{\text{一般化}}$

(1) 在 $V_{nxnxn}(a_1......a_n)$,$S=a_1+......+a_n$ 中,S 的最小值$=3n^2-3n+1$
(2) 在 $V_{nxnxn}(a_1......a_n)$,$S=a_1+......+a_n$ 中,S 的最大值$=n^2+MS_n(n-1)$ MS_n 爲在 $M_{nxn}(s)$中,s 的最大值
(3) 在 $V_{nxnxn}(a_1......a_n)$,$S=a_1+......+a_n$ 中,S 從最小值到最大值之間 ,只能說幾乎都有解

2. 探討 S 爲最小值、最大值及變化情形的配置方法

(1)定義

① 在 n×n×n 的棋盤中,爲了方便往後的表示法 ,先將每個格子編號爲(i,j.k),1≦i,j,k≦n。如圖(十)

第一層

(1,1,1)	(1,2,1)	……	(1,n,1)
(2,1,1)	(2,2,1)	……	(2,n,1)
……	……	……	……
(n,1,1)	(n,2,1)	……	(n,n,1)

第二層

(1,1,2)	(1,2,2)	……	(1,n,2)
(2,1,2)	(2,2,1)	……	(2,n,2)
……	……	……	……
(n,1,2)	(n,2,2)	……	(n,n,2)

……

第 n 層

(1,1,n)	(1,2,n)	……	(1,n,n)
(2,1,n)	(2,2,n)	……	(2,n,n)
……	……	……	……
(n,1,n)	(n,2,n)	……	(n,n,n)

圖(十)

② (i,j,x)=0︰ 表示第 x 層的第 i 列第 j 行沒有棋子

(k,r,y)=1︰ 表示第 y 層的第 k 列第 r 行有棋子

③ T_p (i,j;k,r)=1111︰ 表示(i,k,p)=(i,r,p)=(j,k,p)=(j,r,p)=1。第 p 層所形成矩形框的 4 個頂點都有棋子,又稱爲「位置矩形」

④ $T_{p,q}$(i,j;k,r)=0111,1111 表示 : (i,k,p)=0 (i,r,p)=(j,k,p)=(j,r,p)=1 (i,k,q)=(i,r,q)=(j,k,q)=(j,r,q)=1

(2) 有了在 $M_{nxn}(s)$中,s 的配置方法後試著以此爲基礎,進一步加以探討在 $V_{nxnxn}(a_1......a_n)$ 中,$S=a_1+......+a_n$ 的配置方法

- ***S 爲最小值的配置方法***

在 n×n×n 的棋盤中,滿足 $V_{nxnxn}(a_1......a_n)$,$S=a_1+......+a_n$,S 爲最小值的配置方法爲:

配置方法

① 於第一層放滿棋子
② 其他(n-1)層均符合 $M_{nxn}(s)$,s 的最小值之排列結果可

- ***S 爲最大值的配置方法***

配置方法

① 在 n×n×n 的棋盤中,於第一層排滿棋子
② 在其他的(n-1)層棋盤中均排出符合 $M_{nxn}(S)$,S 爲最大值的排列方式 ,結果爲最大值

- ***S 變化情形的配置方法***

同理,對 S 從最小值到最大值之間,每加一子都有解部分,配置方法爲 :

① 在 n×n×n 的棋盤中,於第一層排滿棋子
② 在其他的(n-1)層棋盤中,均排出符合 $M_{nxn}(S)$,每加一子均有解之情形 ,在 $V_{nxnxn}(a_1......a_n)$, $S=a_1+......+a_n$ 中,S 每加一子均有解

(二) 在 $V_{nxmxk}(a_1......a_K)$,$S=a_1+......+a_k$ 的棋盤中,探討 S 的最小值,最大值及變化情形,並分析配置方法

由(一)在 $V_{nxnxn}(a_1......a_n)$,$S=a_1+......+a_n$ 的正方體棋盤中可將之推廣到長方體棋盤 $V_{nxmxk}(a_1......a_k)$, $S=a_1+......+a_k$ 中

1. S 的最小值

(1) 第一層排滿棋子,共 n×m 子
(2) 其他的(k-1)層棋盤中,均排出符合 $M_{nxm}(S)$,S 爲最小值的排列結果,(k-1)(m+n-1)子

因此,S 的最小值=mn+(k-1)(m+n-1) 子

2. S 的最大值

(1) 第一層排滿棋子,共 n×m 子
(2) 其他的(k-1)層棋盤中,均排出符合 $M_{nxm}(S)$,S 爲最大值的排列結果,共 RS(k-1),RS 爲符合 $M_{nxm}(S)$,S 爲最大值

因此,S 的最大值=mn+RS(k-1)子,RS 爲符合 $M_{nxm}(S)$,S 爲最大值

3. S 的變化情形

(1) 第一層排滿棋子
(2) 其他的(k-1)層棋盤中,均排出符合 $M_{nxm}(S)$,S 從最小值到最大值之間,每加一子均有解之情形

由於在 $M_{nxm}(S)$中,S 從最小值到最大值之間,每加一子均有解,因此,S 從最小值到最大值之間,每加一子亦均有解

應用　　**參閱附件(九)**

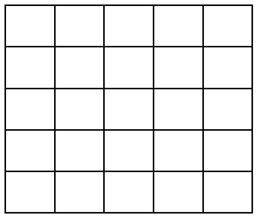
五、設計一個「避開矩形框」的遊戲,並分析出必勝策略

根據這個題目,設計一個「避開矩形框」的遊戲

遊戲規則

(一)在 5×5 的正方形棋盤中,兩人輪流放棋子,如圖(十一)

(二)棋盤上的棋子滿足 $M_{5x5}(S)$的條件 ,放最後一子的人贏



圖(十一)

發展 1. 我們利用樹狀圖一一分析其勝負局，如附件（十）

2. 其他發展過程***請參閱工作記錄及詳見現場說明！***

無論後手如何下，「避開矩形框棋」對先手還是較為有利，而先手致勝的策略我們整理為：

致勝策略

【策略一】：先手第一子儘量下在中間

【策略二】：先手造出 L 字型

【策略三】：先手接著造出 T 字型或十字型

【策略四】：雙活三若失敗，即轉換成類型Ⅱ(421)的型

【策略五】：先手在造出一行中僅有一子時，需注意不能只剩一行空白行

【策略六】：在造出雙活三的過程中，需隨時與類型Ⅰ～Ⅳ搭配轉換（行或列）。換句話說：即活用「雙活三」與四個類型。

現場另有電腦模擬 ！

伍、研究結果

一、 正方形棋盤的探討

（一）在 $M_{nxn}(s)$中,探討 s 的最小值,並分析配置方法

1. 在 $M_{nxn}(S)$中,s 的最小值=2n-1
2. 配置方法：參閱參~二~(二)~2

（二）在 $M_{nxn}(s)$中,探討 s 的最大值,並分析配置方法

1. 在 $M_{nxn}(S)$中,s 的最大值≦$\frac{n+n\sqrt{4n-3}}{2}$
2. 配置方法 1：斜排思考
3. 配置方法 2：直橫排組合思考

（三）在 $M_{nxn}(s)$中,探討 s 的變化情形,並分析配置方法

1. 在 $M_{n\times n}(s)$中,s 從最小值到最大值之間,幾乎每加 1 子都有解
2. 配置方法：參閱參~二~(三)

二、 長方形棋盤的探討

（一）在 $M_{n\times m}(s)$中,探討 s 的最小值,並分析配置方法

1. 參閱參~三~(一)

（二）在 $M_{n\times m}(s)$中,探討 s 的最大值,並分析配置方法

1. 參閱參~三~(二)
2. 配置方法 1：***棋盤框套選的全面性思考 (棋子不動,棋盤動)***
3. 配置方法 2：***組合、分解的累積性思考 (棋盤不動,棋子動)***

（三）在 $M_{n\times m}(s)$中,探討 s 的變化情形,並分析配置方法

1. 參閱參~三~(三)

三、 正方體與長方體棋盤的探討

（一）在 $V_{n\times n\times n}(a_1,a_2,......,a_n)$中,探討 s 的最小值、最大值及變化情形,並分析配置方法

1. 參閱參~四~(一)

（二）在 $V_{n\times m\times k}(a_1,a_2,…,a_k)$中,探討 s 的最小值、最大值及變化情形,並分析配置方法

1. 參閱參~四~(二)

四、 設計一個「避開矩形框棋」,並加以分析出致勝的策略

致勝策略：參閱參~五

陸、討論與結論

一、在本次的研究中,為了說明棋子在平面或立體棋盤中排列的位置與位置之間的關係,我們和老師一起設計了一些表達位置的符號記錄方式。這對我們這次的研究來說方便清楚了許多,也因此讓我們更了解在數學中,以符號來表示是一件非常重要的事

二、此次研究,我們大膽小心的從正方形、長方形、正方體到長方體棋盤去探討。透過實際操作、歸納整理、猜想、舉例檢驗、証明等一連串的方法,進而得到這許多一般化的結果。另外在配置方法中,也透過分析、策略提出到具體方法的呈現。過程雖然辛苦,但卻能得到一系列完整的科學根念及有效清晰的解決「避開矩形框」問題的方法,著實令人感到興奮

三、在「避開矩形框棋」中,我們學會利用樹狀圖來分析。另外,細心與耐心也使我們對於本來將要放棄的研究,最後能繼續堅持到底

四、我們將再繼續努力更深入的研究「**棋子排列的變化性問題**」,希望能有更進一步的發現

柒、參考資料

一、新世紀編輯小組著,王國詮譯：趣味數學謎題的 20 種解法,初版,台北縣永和市,銀禾文化,P.152,1993(民 82)

二、葉均承(民 91)： 翻棋分類問題,科學教育月刊,251 期,P.9~23,台北市教育局

三、馮躍峰 ： 棋盤上的組合數學,上海教育出版社, P 94~96,1998 年

四、Brain Bolt 著（王榮輝譯）（民 85）數學遊樂園之舉一反三，台北，牛頓

評　語

030410 國中組數學科　第一名

棋盤上的數學

探討在滿足某些特定的條件下，棋盤上棋子數的最大，最小值，對最小值的情況，給出完整的解答，也給出最大值的最佳配置法，對於介於最大、最小值中間的數字，是否存在可能解，也做了完整的討論，想法深入，使用的技巧也極具巧思，是完成度很高的優異成品。