中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030405

臺北縣立丹鳳國民中學

指導老師姓名

朱蕙苓

黃宇暄

作者姓名

林芸群

許娟維

白宇辰

巫宗樺

中華民國第 44 屆中小學科學展覽會

作 品 說 明 書

科　　　別：數學科

組　　　別：國　中　組

作品名稱　：方塊的因數與倍數

關鍵字查詢:因數與倍數、排列組合、圖形的樣式與規律

編　　　號：

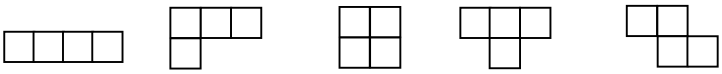
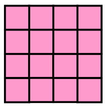
目　錄

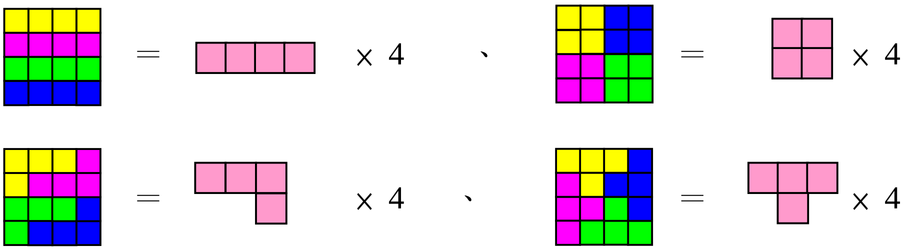
方 塊 的 因 數 與 倍 數

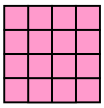
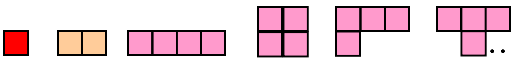
壹、 摘要

本研究主要在探討單格至 8 格圖形的因、倍數問題，過程是先找出 5 至 8 格的所有圖形，整理觀察，找出可拼成矩形的多方塊，即爲最小公倍數方塊圖的因數多方塊，並歸納這些因數多方塊的特徵。

貳、研究動機

上課時老師利用方塊圖形教我們因數與倍數觀念，用簡單的長條方塊排成矩形，矩形的方格數也就是此長條方塊的倍數。老師還利用俄羅斯方塊的 4 格方塊（），要我們找出它們的最小公倍數圖形，就是每一個 4 方塊均可單獨拼湊成的最小共同矩形  4×4=16 ，



且 16 的因數有 1, 2 , 4 , 8 , 16，所以要考慮再加進單格、2 格、8 格，16 格方塊，因此  的因數圖形有 ..

讓我們覺得公因數與公倍數有趣極了。同學發起大家一起尋找 5 格、6 格…的最小公倍數圖形，老師建議我們先找出 5 格、6 格…的方塊排列有哪些？再找出這個圖形的最小倍數方格數。

參、研究目的

一、以簡單組合、排列、移動、比對的規則找出 5 至 8 格方塊的不同方塊組合。

二、找出相同方格數多方塊拼成的最小公倍數（LCM）方塊圖與其因數多方塊。

三、根據可拼成最小公倍數（LCM）方塊圖的因數多方塊，歸納因數多方塊的特徵。

肆、研究設備與器材

方格紙、紀錄紙、筆、電腦

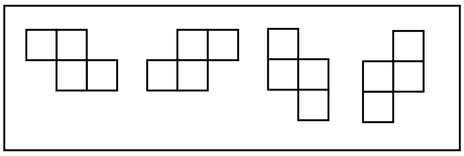
伍、研究過程

本研究主要在探討單格至 8 格圖形的因、倍數問題，過程是先找出 5 格至 8 格的所有圖形，整理觀察，找出可拼成矩形的方塊，並歸納其特徵。

一、圖形的說明：

令小正方形的邊長爲 1 ×1，面積等於 1，以下圖爲例，旋轉或翻轉有不同的外形，但要算同一類型。

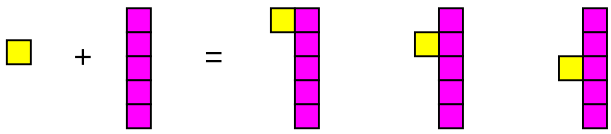
例如：



是同一類型。

二、尋找多方塊：(用數字拆解法排 6 方塊圖形)

方塊以直行爲一組計算，將數字和爲 6 的數字組合由左至右的方向拼湊。以六方塊爲例分別是 6、5+1、4+2、4+1+1……，再以交換律試著排列，有重複就必須排除！如：



1 + 5 = 6

（1）（5，1）的組合有 1+5 = 5+1=6 的排列 (加法的交換律)

但 1+5 與 5+1 的圖形重複，因此視爲同一組討論。

（2）（4，2）的組合有 2+4=4+2 的排列

2 可以再分解成（4，1，1），如下：

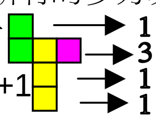
1+1+4 = 4+1+1 = 1+4+1

觀察上面 1+1+4 = 4+1+1 圖形重複，因此視爲同一組討論。

（3）方塊以直行爲一組計算，根據排列的數字順序將圖形拼出，再考慮**移動**所造成的效果將圖形一一拼湊。

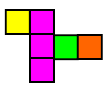
（4）依據數字和的直行排列組合所找出的圖形，再以橫列角度計算，前後交叉比對尋找重複的圖形，直到所有的多方塊都已成對爲止。

如：2 + 3 + 1 的圖形中有



但以橫列計算則爲 1+3+1+1

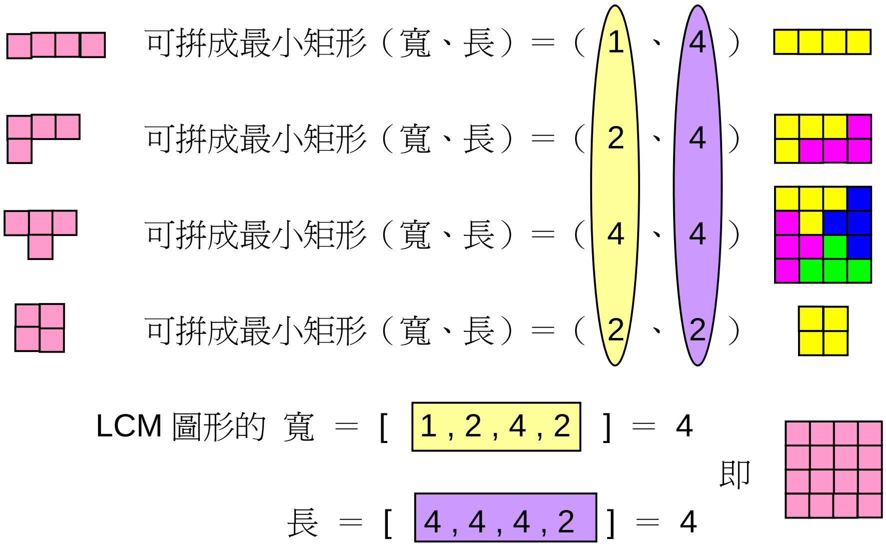
因此可在直式 1+3+1+1 排列中找到視爲重複，以此類推**交叉比對**。



1+3+1+1

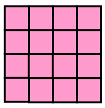
三、找出 LCM 圖形

先找每個多方塊圖形可單獨拼出的最小矩形，再將所得所有最小矩形方塊數的寬與長交叉組合取 LCM，即 LCM 圖形的寬與長。

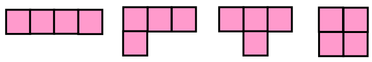


四、因數圖形

因數圖形爲（1）可拼成矩形的多方塊：多方塊中可拼成最小矩形也就是 LCM 圖形的因數圖形，（2）根據 LCM 矩形的寬 x長的塊數，考慮應再加入的因數圖形；我們整理這些因數圖形並歸納其特徵。例如：



爲 4x4 = 16 的矩形，16 的因數有 1，2，4，8，16

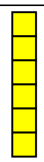
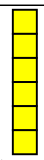
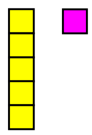
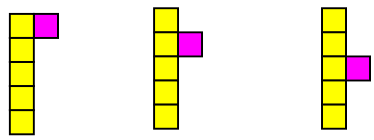
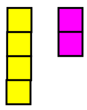
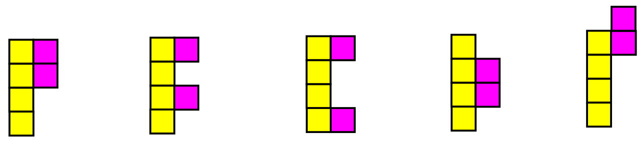
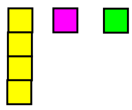
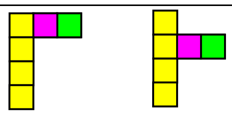
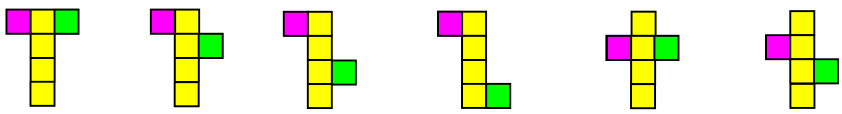
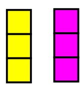
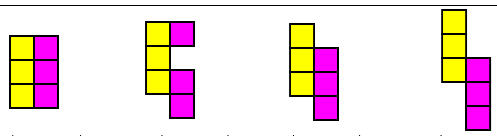
則 4x4 = 16 的因數圖形除了 

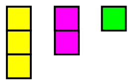
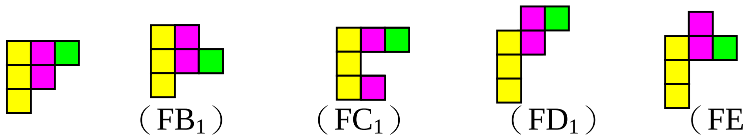
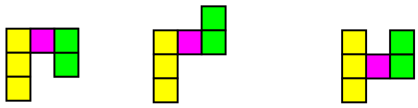
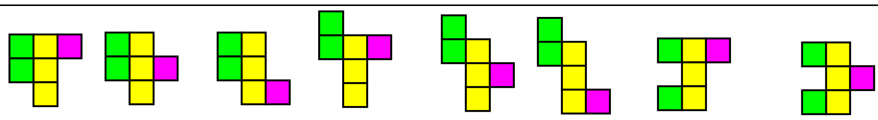
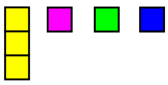
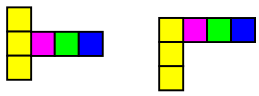
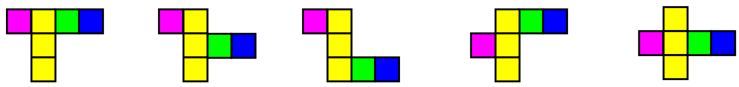
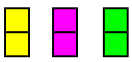
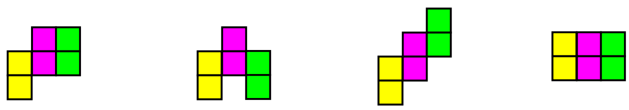
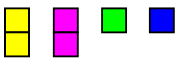
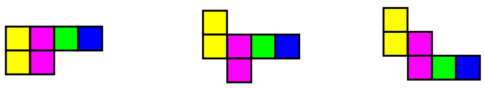
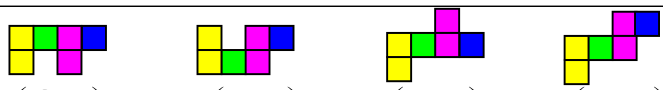
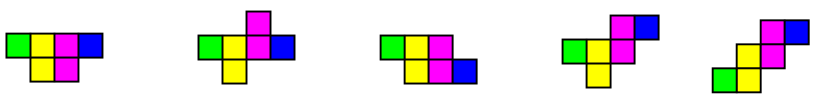
還要考慮單、2、8、16 格的因數多方塊。

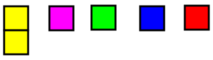
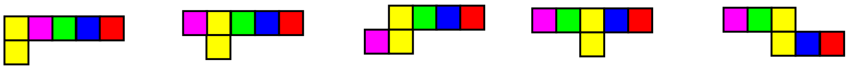
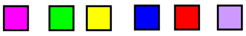
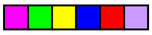
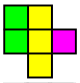
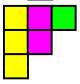
陸、研究結果

（一）找尋多方塊

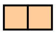
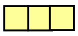
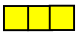
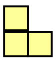
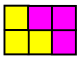
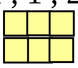
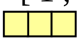
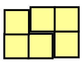
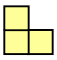
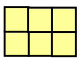
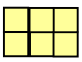
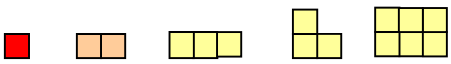
用數字和拆解組合、排列、移動與交叉比對四個步驟找尋多方塊、下表爲 6 方塊的所有圖形，6 格、7 格與 8 格方塊的圖形詳見現場補充資料。

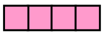
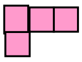
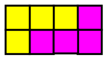
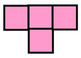
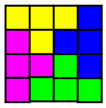
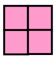
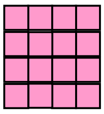
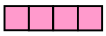
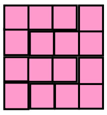
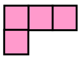
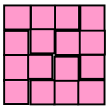
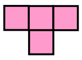
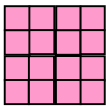
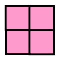
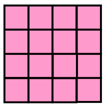
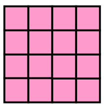
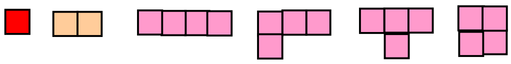
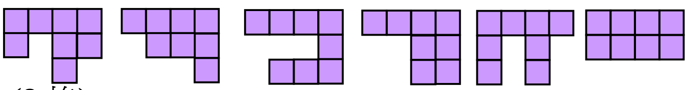
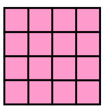
6 方塊的組合	6 方 塊 的 排 列
 6	 （AA$_1$） 6
 5 + 1	 （BA$_1$）（BB$_1$）（BC$_1$） 5+1 5+1 5+1
 4 + 2	 （CA$_1$）（CB$_1$）（CC$_1$）（CD$_1$）（CE$_1$） 數字排列 4+2
 4 + 1 + 1	 （DA$_1$）（DB$_1$） 4+1+1 4+1+1  （DC$_1$）（DD$_1$）（DE$_1$）（DF$_1$）（DG$_1$）（DH$_1$） 數字排列 1 + 4 + 1
 3 + 3	 （EA$_1$）（EB$_1$）（EC$_1$）（ED$_1$） 數字排列 3 + 3

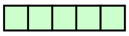
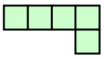
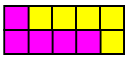
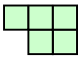
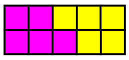
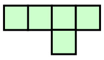
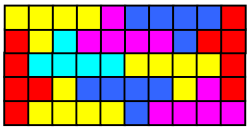
 3 + 2 + 1	 （FB_1） （FC_1） （FD_1） （FE_1） 數字排列 3 + 2 + 1
	 （FC_2） （FG_1） （FI_1） 3 + 1 + 2 3 + 1 + 2 3 + 1 + 2
	 （FB_2） （FJ_1）（FK_1）（FL_1） （FM_1）（FI_1） （FO_1） 數字排列 2+3+1
 3 + 1 + 1 + 1	 （DC_2） （DA_2） 3+1+1+1 3+1+1+1
	 （DB_2） （FK_2） （FG_2） （FE_2） （DG_2） 數字排列 1+3+1+1
 2 + 2 + 2	 （FJ_2） （FO_2） （GA_1） （EA_2） 數字排列 2 + 2 + 2
 2 + 2 + 1 + 1	 （CA_2） （DD_2） （FD_2） 數字排列 2+2+1+1
	 （CB_2） （EB_2） （DE_2） （FM_2） 數字排列 2+1+2+1
	 （CC_2） （DF_2） 2+1+1+2 2+1+1+2
	 （CD_2） （DH_2） （EC_2） （FL_2） （GA_2） 數字排列 1+2+2+1

 2 + 1 + 1 + 1+ 1	 （BA$_2$）（BB$_2$）（CE$_2$）（BC$_2$）（ED$_2$） 數字排列 2+1+1+1+1
 1+ 1 + 1 + 1 + 1+ 1	 （AA$_2$） 1+1+1+1+1+1
	英文字母相同者，（AA$_1$）（AA$_2$）成對、（AB$_1$）（AB$_2$）成對..... 共 33 組表相同的六方塊。 而  直行數組合 2+3+1 與橫列數組合 2+3+1 相同  直行數組合 3+2+1 與橫列數組合 3+2+1 相同 因此圖形本身即爲交叉比對時的對象。
6 方塊共有 成對 33 種 ＋ 不成對 2 種 = 35 種	

（二）在找出單格到 8 格方塊圖形後，開始找用某個多方塊單獨可以拼湊出的所有可能矩形，再尋找 n 格方塊的 LCM 矩形與其因數多方塊，下表爲研究的結果:

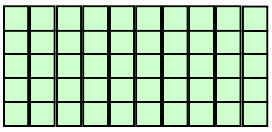
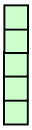
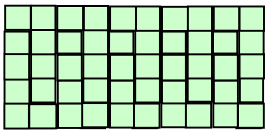
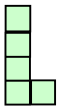
n 格方塊	單獨拼成矩形方塊圖	特性
單方塊		爲 1x1 正方形，不用再拼
2 格方塊		爲 1x2 矩形，不用再拼
3 格方塊		 爲 1x3 矩形，不用再拼
		 可拼成 2x3 的矩形
	推論：3 格的 LCM 圖形的 寬＝[1 , 1 , 1 , 2]、長＝[1 , 1 , 3 , 3]是 2x3 = 6 的矩形  ＝  × 2  ＝  × 2 （1）3 格的 LCM 圖形爲  （2）6 的因數有 1，2，3，6 （3） 的因數圖形有 	

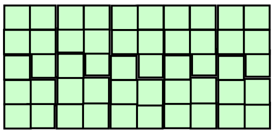
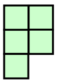
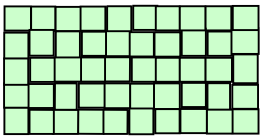
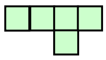
<table>
<tr><td rowspan="4">4 格方塊</td><td></td><td>爲 1x4 矩形，不用再拼</td></tr>
<tr><td></td><td>
可拼成 2x4 矩形</td></tr>
<tr><td></td><td>
可拼成 4x4 矩形</td></tr>
<tr><td></td><td>爲 2x2 正方形，不用再拼</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">
推論：長、寬交叉組合找 4 格方塊的 LCM 圖形
寬＝[1 , 2 , 4 ,2]、長＝[4 , 4 , 4 , 2]爲 4x4=16 的矩形
 ＝  × 4
 ＝  × 4
 ＝  × 4
 ＝  × 4
（1）4 格的 LCM 圖形爲  4x4=16 矩形
（2）16 的因數爲 1, 2 , 4 , 8 ,16，因此因數圖形中沒有 3 格，但應加入 8 與 16 格多方塊
（3） 的因數圖形： 

(8 格)

</td></tr>
</table>

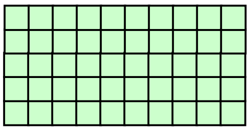
5 格方塊		爲 1x5 矩形，不用再拼
		 可拼成 2x5 矩形
		 可拼成 2x5 矩形
		 十塊可拼成 10x5 矩形

推論：長、寬交叉組合找 5 格的 LCM 圖形

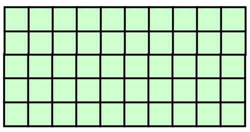
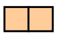
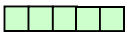
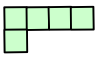
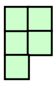
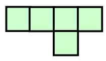
寬＝[5 , 5 , 5 ,5]、長＝[1 , 2 , 2 ,10]爲 5x10 矩形

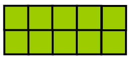
 ＝  x10 、  ＝  × 10

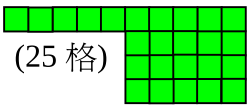
 ＝  × 10、  ＝  × 10

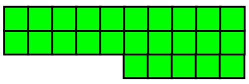
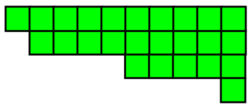
（1）5 格的 LCM 圖形爲  5x10=50 矩形

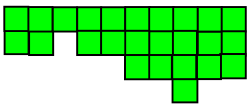
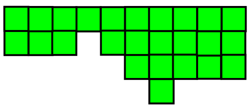
（2）50 的因數爲 1, 2 , 5, 10 , 25 , 50

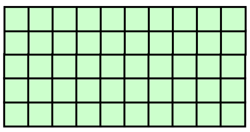
（3） 的因數圖形有      

  (10 格)

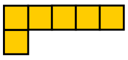
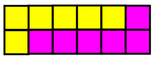
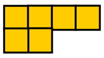
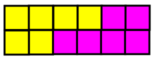
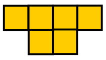
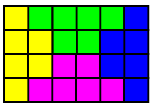
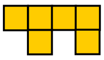
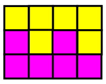
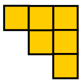
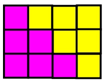
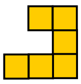
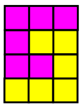
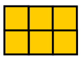


  …(見現場補充資料)

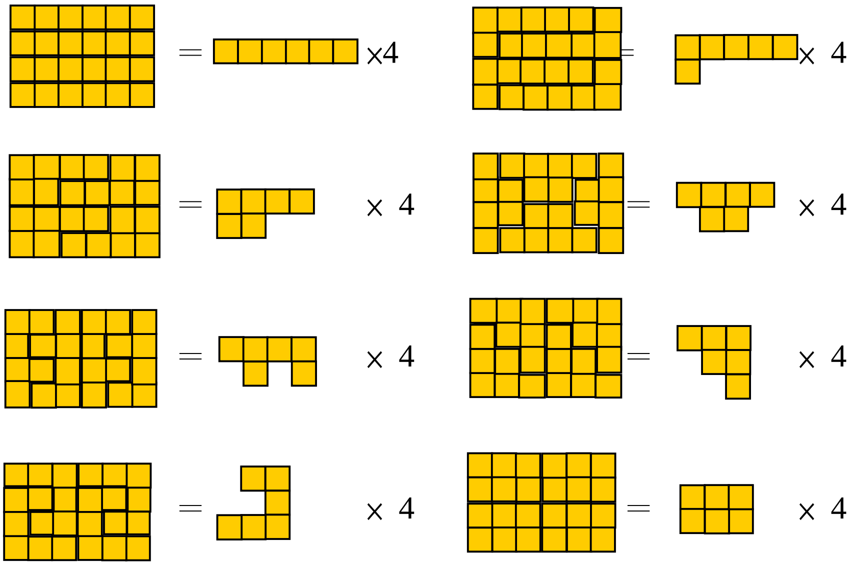


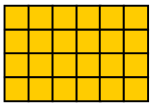
其中 25 格因數圖形已超出我們尋找單至 8 格因數範圍，且超過 500 個，限於篇幅，會在第柒章討論說明。

6 格方塊		爲 1x6 矩形，不用再拼
		 可拼成 2x6 矩形
		 可拼成 2x6 矩形
		 可拼成 4x6 矩形
		 可拼成 3x4 矩形
		 可拼成 3x4 矩形
		 可拼成 3x4 矩形
		爲 2x3 矩形，不用再拼

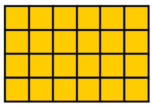
6 格方塊

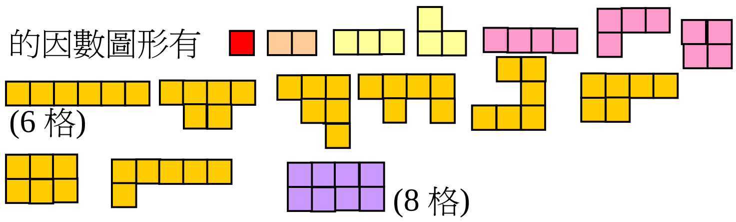
推論：長、寬交叉組合找 5 格方塊的 LCM 圖形
寬＝[1 , 2 , 2 , 4 , 4 , 4 , 4 , 2]、
長＝[6 , 6 , 6 , 6 , 3 , 3 , 3 , 3]為 4x6 矩形



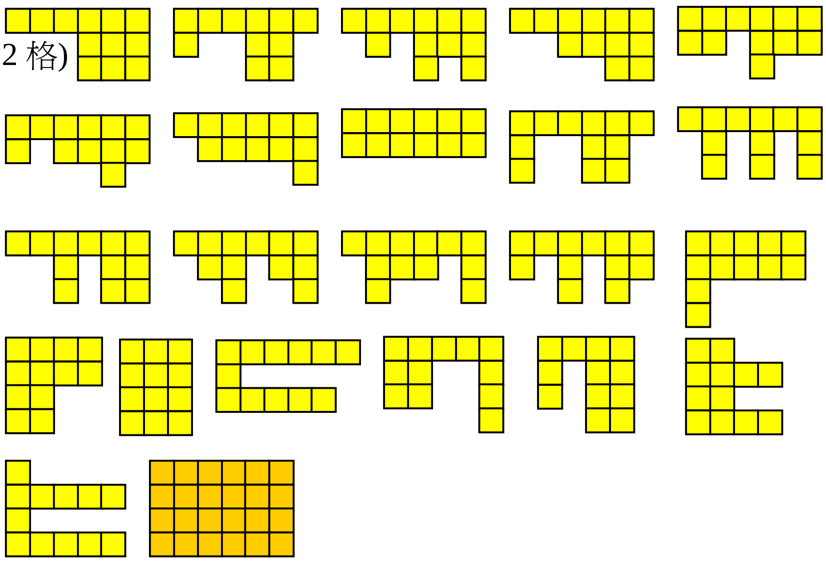
（1）6 格的 LCM 圖形為  4x6=24 矩形

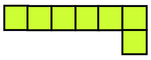
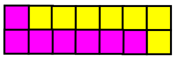
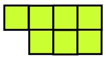
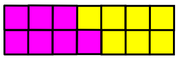
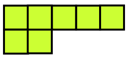
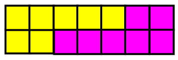
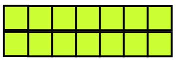
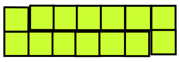
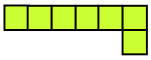
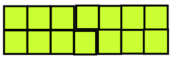
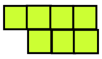
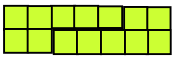
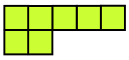
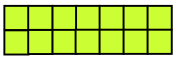
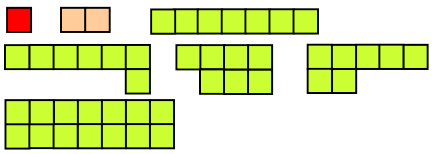
（2）24 的因數有 1 , 2 , 3 , 4 , 8 , 6, 12, 24

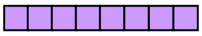
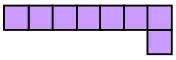
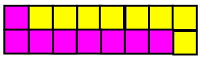
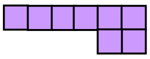
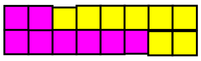
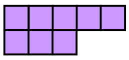
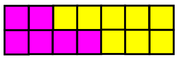
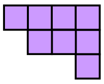
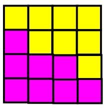
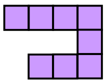
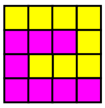
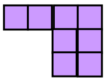
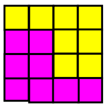
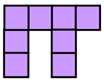
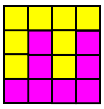
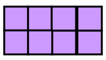
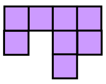
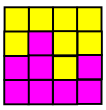
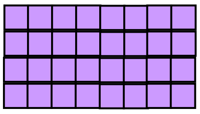
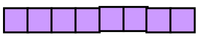
（3） 的因數圖形有

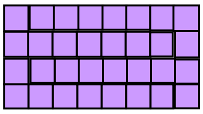
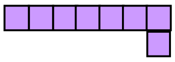
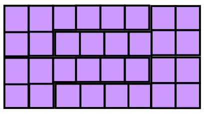
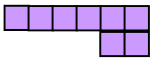
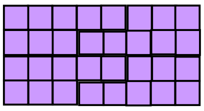
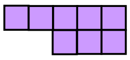
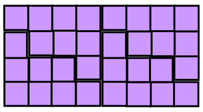
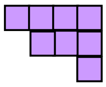
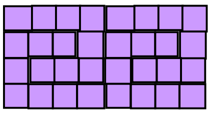
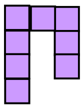
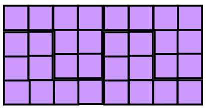
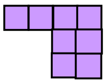
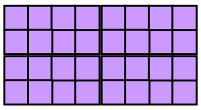
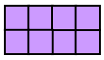
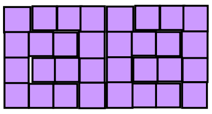
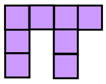
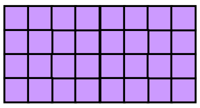
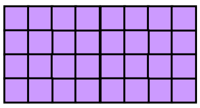
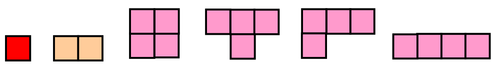
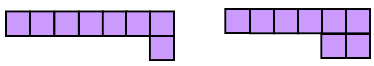
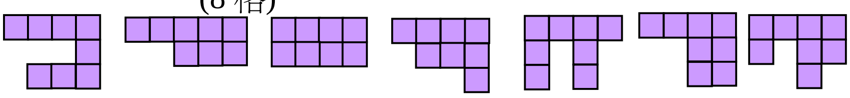
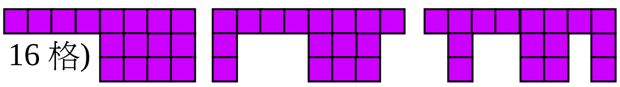
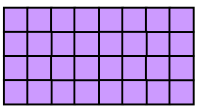


(12 格)



<table>
<tr><td rowspan="5">7 格方塊</td><td></td><td>爲 1x7 矩形，不用再拼</td></tr>
<tr><td></td><td>
可拼成 2x7 矩形</td></tr>
<tr><td></td><td>
可拼成 2x7 矩形</td></tr>
<tr><td></td><td>
可拼成 2x7 矩形</td></tr>
<tr><td colspan="2">推論：長、寬交叉組合找 7 格方塊的 LCM 圖形
寬＝[1 , 2 , 2 , 2]、長＝[7 , 7 , 7 , 7]爲 2x7 矩形
 ＝  × 2
 ＝  × 2
 ＝  × 2
 ＝  × 2
（1）7 格的 LCM 圖形爲 2x7=14 矩形
（2）14 的因數有 1 , 2 , 7, 14
（3） 的因數圖形有 </td></tr>
</table>

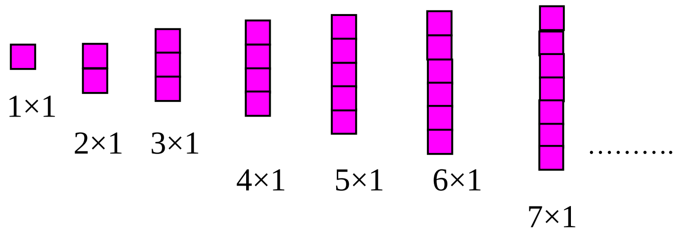
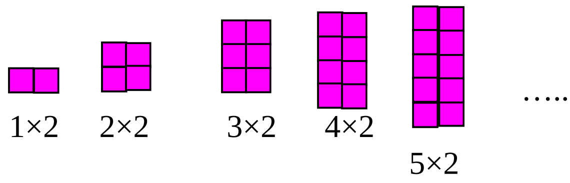
8 格方塊		爲 1x8 矩形，不用再拼
		 可拼成 2x8 矩形
		 可拼成 2x8 矩形
		 可拼成 2x8 矩形
		 可拼成 4x4 矩形
		 可拼成 4x4 矩形
		 可拼成 4x4 的矩形
		 可拼成 4x4 的矩形
		爲 2x4 矩形，不用再拼
		 可拼成 4x4 矩形
	推論：長、寬交叉組合找 7 格方塊的 LCM 圖形的 寬＝[1 , 2 , 2 , 2 , 4 , 4 , 4 , 4 , 2 , 4]、 長＝[8 , 8 , 8 , 8 , 4 , 4 , 4 , 4 , 4 , 4]爲 4x8 矩形  ＝  × 4	

<table>
<tr>
<td>8 格方塊</td>
<td>
 ＝  × 4
 ＝  × 4
 ＝  × 4
 ＝  × 4
 ＝  × 4
 ＝  × 4
 ＝  × 4
 ＝  × 4
（1）8 格的 LCM 圖形為  4x8=32 矩形
（2）32 的因數有 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32。 因此因數圖形考慮 8、16 與 32 格的因數圖形。
（3） 的因數圖形有 
 (8 格) 

16 格)  …(見現場補充資料)
 其中 16 方格因數已經超出我們尋找單至 8 格因數範圍，且個數超過 40 個，限於篇幅，會在後面第柒章討論說明。
</td>
</tr>
</table>

（三）因數圖形的結構

根據找到的 LCM 圖形，觀察它們的因數圖形特徵，有下列的結論：

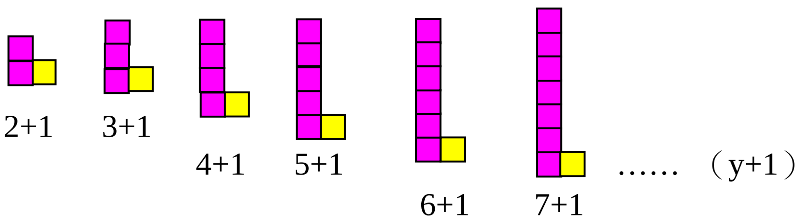
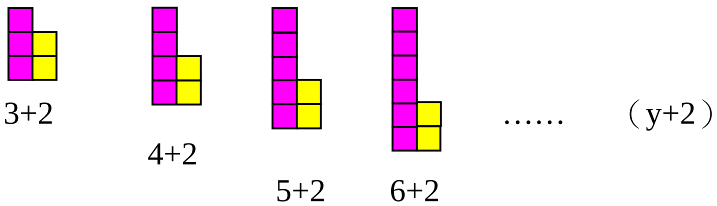
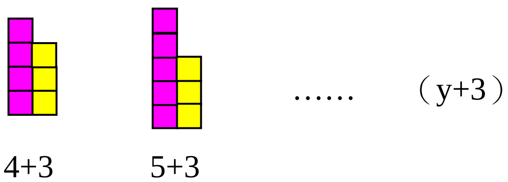
（1） 矩形：可拼 mxn 矩形，m、n 為自然數。

nx1	
nx2	

mxn 矩形的多方塊即為本身的因數圖形。

（2）P 字圖形

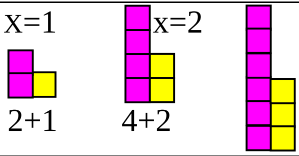
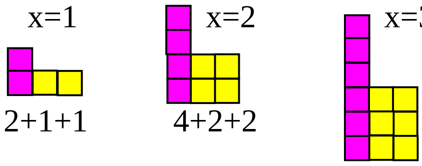
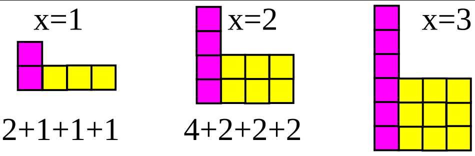
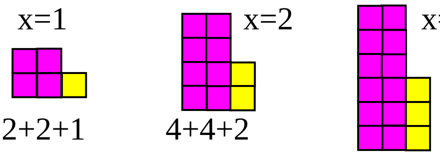
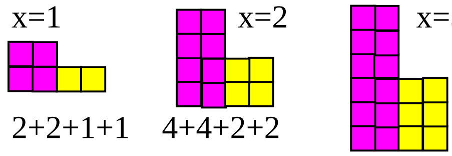
（A）是以（n-x）+ x = y + x 數字組合的圖形，形狀就像 P。

x = 1 數字組合 y+x	
x = 2 數字組合 y+x	
x = 3 數字組合 y+x	

以此類推，P 字圖形皆可拼成 2x(y+x)=2n 矩形。

（B）數字組合爲 2x +2x+…+2x+x+x+…+x，其中(2x , x)的個數(m , n)沒有限制。

（m 爲粉紅直行數，n 爲黃色直行數）

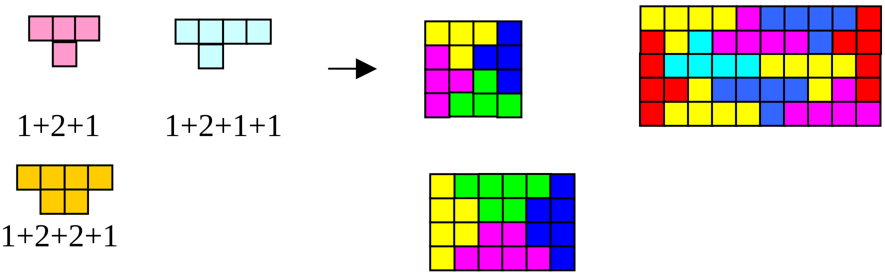
(m , n) =(1 , 1) 數字組合 2x+x	x=1 x=2 x=3  2+1 4+2 6+3 …………..(2x+x)
(m , n) =(1 , 2) 數字組合 2x+x+x	x=1 x=2 x=3  2+1+1 4+2+2 6+3+3 ………. (2x+x+x)
(m , n) =(1 , 3) 數字組合 2x+x+x	x=1 x=2 x=3 ……  2+1+1+1 4+2+2+2 6+3+3+3……(2x+x+x+x)
(m , n) =（2 , 1） 數字組合 2x+2x+x	x=1 x=2 x=3 …..  2+2+1 4+4+2 6+6+3 …….(2x+2x+x)
(m , n) =(2 , 2) 數字組合 2x+2x+x+x	x=1 x=2 x=3 …..  2+2+1+1 4+4+2+2 6+6+3+3 …. (2x+2x+x+x)

以此類推，上表歸類的多方塊可拼成 2×(m+n)矩形。

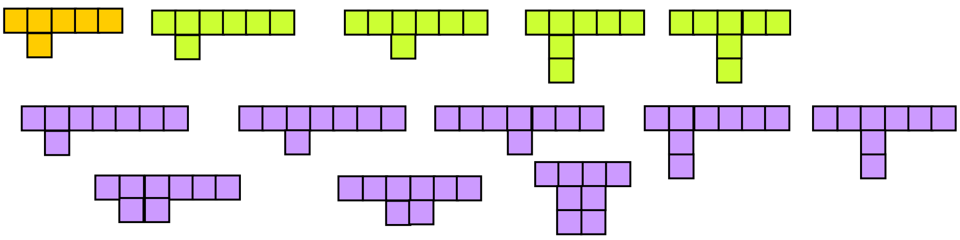
（3）T 形圖的結論：

特徵：樣子像 T 字母。

規律：由基本圖形 1+2+1 排成，如下：

1+2+1	

註：從單格到 8 格方塊圖形中，歸類 T 字型的方塊還有

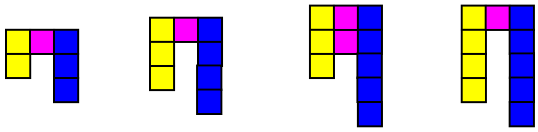
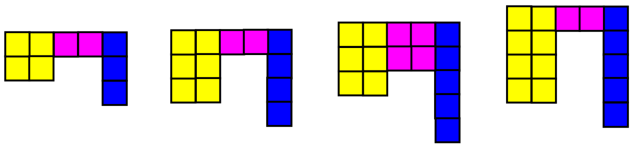
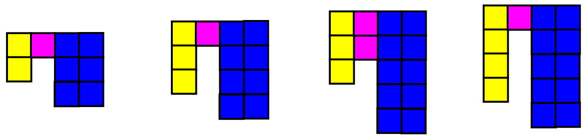
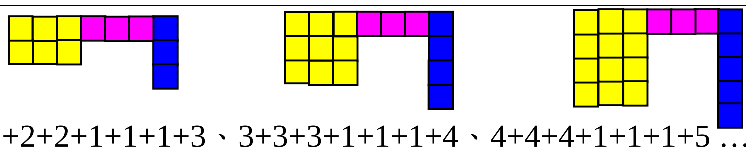


我們曾多次嘗試，最後仍無法拼湊矩形。因爲可以拼成矩形的 T 字群不多，故無法對其特徵下明確的定論。

（4）ㄇ字圖形：數字組合爲 x+…+x+y+…+y+z…z，

其中 x+y=z , z＜x＜y 且(x，y，z)的個數(m，m，n)。

（m 爲黃色、粉紅直行數，n 爲藍色直行數）

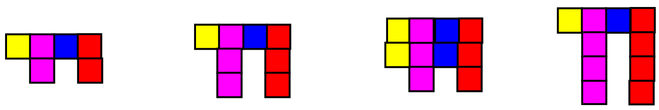
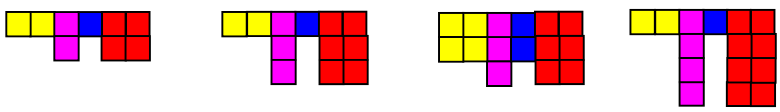
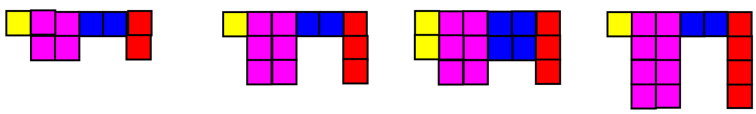
(m , n) =(1 , 1) 數字組合 x+y+z	 2+1+3 3+1+4 3+2+5 4+1+5 ……… (2+1=3) (3+1=4) (3+2=5) (4+1=5) (x+y=z)
(m , n) =(2 , 1) 數字組合 x+x+y+y+z	 2+2+1+1+3、3+3+1+1+4、3+3+2+2+5、4+4+1+1+5……x+x+y+y+z (2+1=3) (3+1=4) (3+2=5) (4+1=5) ……. (x+y=z)
(m , n) =(1 , 2) 數字組合 x+y+z+z	 2+1+3+3 3+1+4+4 3+2+5+5 4+1+5+5 ………x+y+z+z (2+1=3) (3+1=4) (3+2=5) (4+1=5) (x+y=z)
(m , n) =(3 , 1) 數字組合 x+x+x+y+y+y+z	 2+2+2+1+1+1+3 、3+3+3+1+1+1+4 、4+4+4+1+1+1+5 … (2+1=3) (3+1=4) (4+1=5) (x+y=z)

以此類推，上表歸類的多方塊可拼成 2(m+n)xz 矩形。

（5）F 字圖形：數字組合爲 x+…+x+y+…+y+z…z+w…w，

其中，x=z 且 y=w， x 與 w 的個數爲 m，y 與 z 的個數 n。

(m 爲黃色、紅色直行數，n 爲粉紅色、藍色直行數)

(m , n) =(1 , 1) 數字組合 x+y+z+w	 1+2+1+2 1+3+1+3 2+3+2+3 1+4+1+4…
(m , n) =(1 , 2) 數字組合 x+x+y+z+w+w	 1+1+2+1+2+2、1+1+3+1+3+3、2+2+3+2+3+3、1+1+4+1+4+4、….
(m , n) =(2 , 1) 數字組合 x+y+y+z+z+w	 1+2+2+1+1+2、1+3+3+1+1+3、2+3+3+2+2+3、1+4+4+1+1+4、……

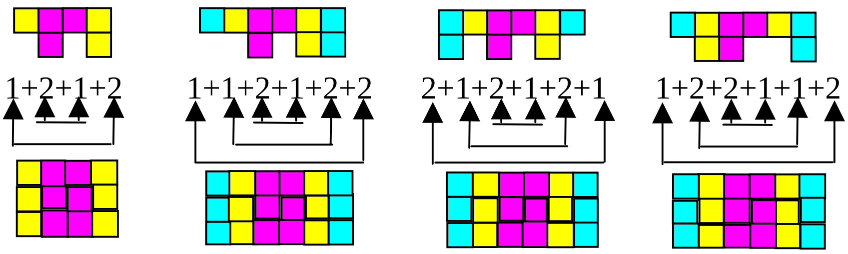
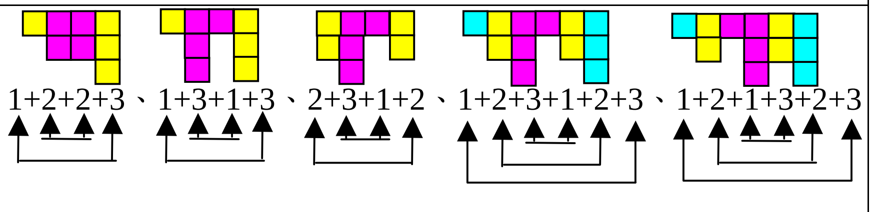
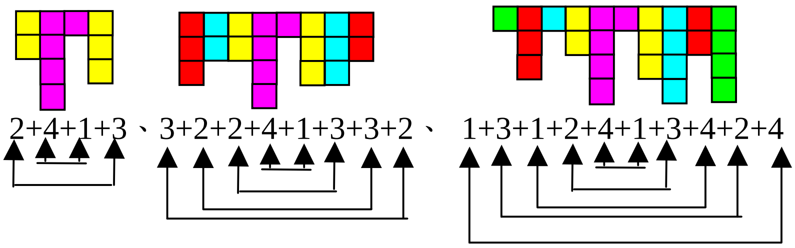
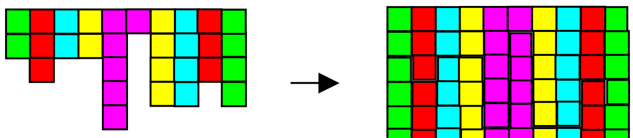
以此類推，上表所歸類的多方塊可拼成 2(m+n)x(x+y)矩形。

（6）F 的聯想：我們由 F 字圖形推想出一個超出 8 格多方塊的因數圖形

數字組合：$a_1+ b_1+ c_1+ \ldots +y_1+ z_1+ z_2+ y_2+\ldots+c_2+ b_2+ a_2$

其中$a_1+ a_2= b_1+ b_2= c_1 + c_2=\ldots= y_1+ y_2= z_1+ z_2=m$

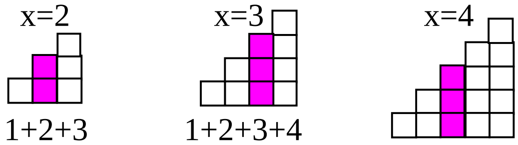
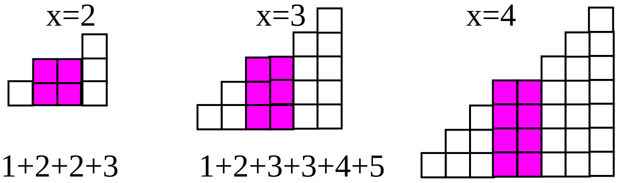
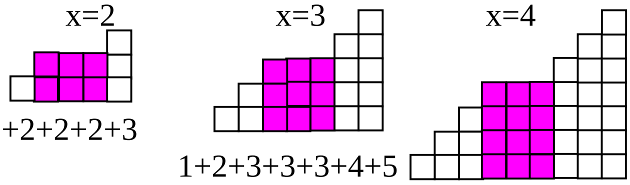
(相同的英文數字如a_1、 a_2用相同顏色表示，拼湊時爲互相銜接標示)

m = 3=1+2 數字組合	 1+2+1+2　1+1+2+1+2+2　2+1+2+1+2+1　1+2+2+1+1+2
m = 4 =1+3 =2+2 數字組合	 1+2+2+3、1+3+1+3、2+3+1+2、1+2+3+1+2+3、1+2+1+3+2+3
m = 5 =1+4 =2+3 數字組合	 2+4+1+3、3+2+2+4+1+3+3+2、 1+3+1+2+4+1+3+4+2+4
m = 6 =1+5 =2+4 =3+3 數字組合	 2+3+2+2+5+1+4+4+3+4

這類成對稱數字組合的多方塊，只要兩塊就可拼成矩形。

（7）樓梯形圖：圖形像樓梯形

數字組合爲…$(x – 2)+(x – 1)+x\ldots x+(x+ 1)+(x + 2)\ldots$，中間項爲 x，並向左右兩邊以等差對稱延伸（n=1 不須對稱），n 代表 x 的個數

n=1	 x=2　x=3　x=4　… 1+2+3　1+2+3+4　1+2+3+4+5
n=2	 x=2　x=3　x=4　… 1+2+2+3　1+2+3+3+4+5　1+2+3+4+4+5+6+7
n=3	 x=2　x=3　x=4　… 1+2+2+2+3　1+2+3+3+3+4+5　1+2+3+4+4+4+5+6+7

以此類推，上表歸類的多方塊，只要兩塊可拼成矩形。

柒、討論

一、尋找多方塊

(一)拼湊多方塊：原先是將圖形移動來拼湊，大家相互比對，經旋轉或翻轉為相同圖形就刪除。拼四、五方塊圖形時，塊數不多，重複也不多，所以不需花時間。但拼六方塊時，塊數增加，重複也越來越多，大家找得頭昏眼花，為了紀錄拼湊的多方塊，我們討論的結果，最後想出數字拆解法。就是將塊數依數字拆解，以直行計算擺放。很高興我們找到一個有規則的方式。老師說：我們的方法裡面有組合、排列的觀念，可以利用高中排列組合公式。因為只找到八方塊，可以慢慢將數字組合完成，且拼湊還必須考慮移動，所以不需要學很困難的公式。要我們有耐心。但很困擾的是，不確定是否已將六格多方塊全部找到。在拼七方塊時，七方塊似乎多得無窮盡似的，總覺得光是同學之間互相比對是不夠的。

(二)那如何確定 5~8 多方塊的數量以及所有的圖形呢？當依數字組合找多方塊圖形時，發現會有重複且成對的圖形，散落在不同的數字組合的圖形裡。因此可以先直行排列，再以橫列數字組合交叉比對檢驗。可直橫交叉比對確定圖形是否重複或遺漏這真是普天同慶、舉國歡騰的發現。同時，除了發現大部分的圖形都有重複外，也有少量無成對的圖形，如：

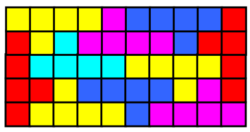
…

直行與橫列塊數組合相同，就不會找到成對的圖形。

但有一個擔心的問題：如果直行拼湊時成對圖形前後恰巧都有遺漏，則在橫列比對時，結果就會少一組。所以我們花費許多時間在組合排列、交叉比對，來確定找出所有的數量和圖形。

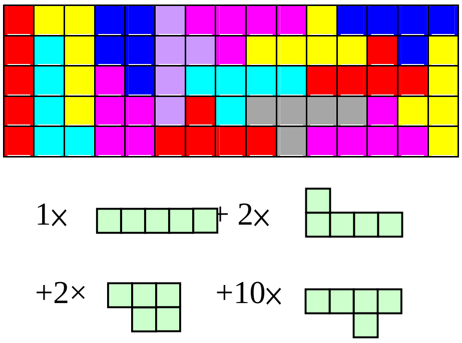
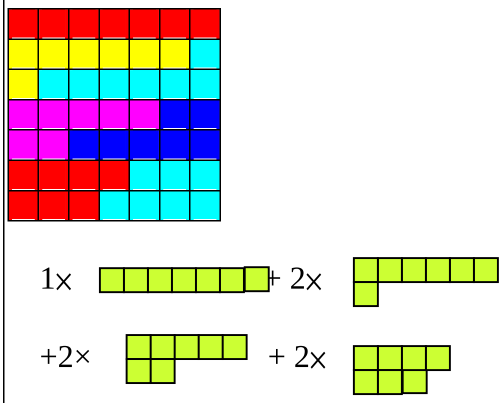
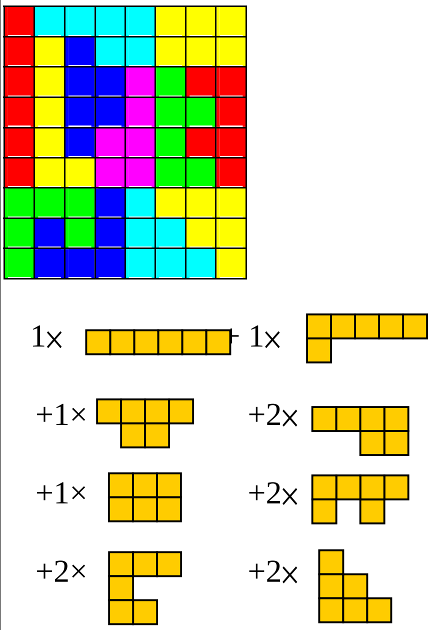
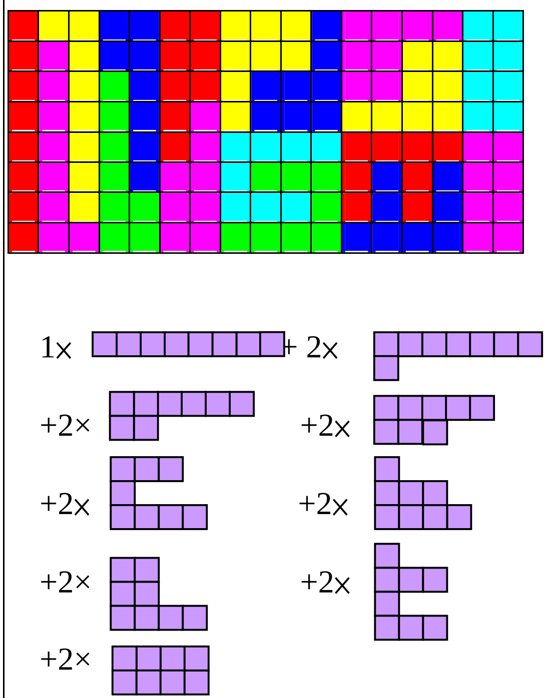
二、找出 LCM 圖形

(一) 在找完 5~8 多方塊的圖形後，找出能拼成矩形的因數多方塊時，本來以為



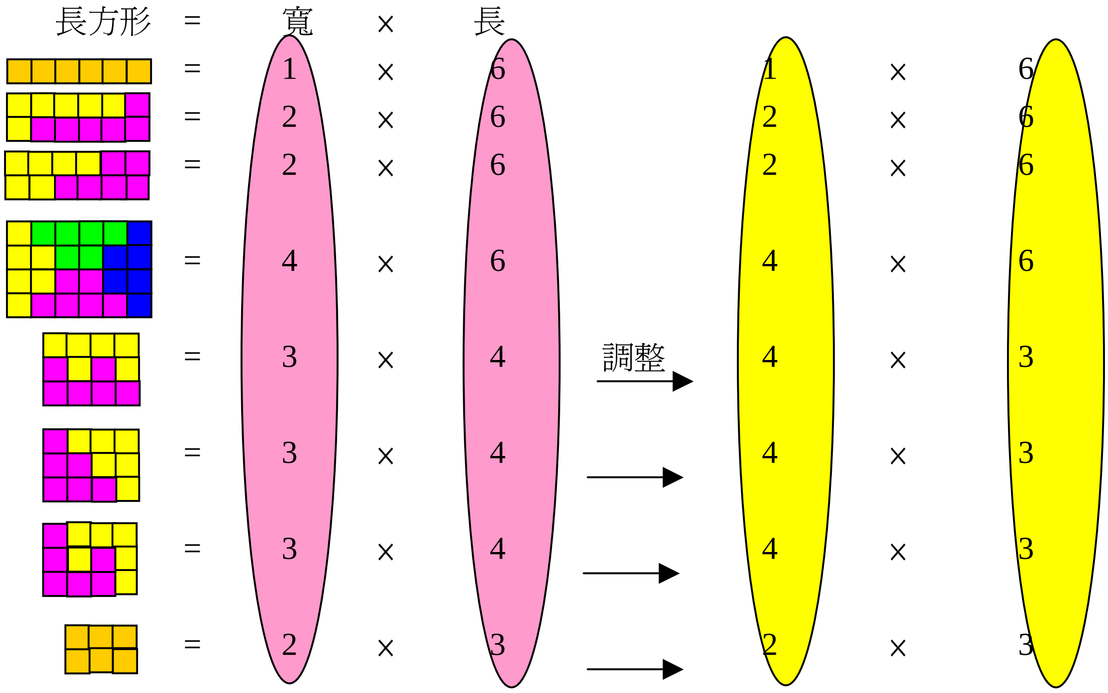
無法拼成矩形，但在大家同力合作下完成不可能的任務，尤其當拼成 5 x10 的矩形時，讓我們有人定勝天的豪氣，快樂好多天。因此開始對類似的圖案有企圖心，但經過長時間嘗試，仍然沒有令人滿意的結果。我們認為有可能是拼的塊數不夠多，需要大量的多方塊單獨重複拼湊才有辦法，也或許是因為我們人手、時間不足，導致沒有拼出更多、更大的矩形…這值得我們探索努力的地方。

(二) 開始找 LCM 圖形時，我們把能拼成矩形的多方塊全部放在一起，求 LCM 圖形，如下：

五方塊	 拼成 15 ×5 矩形	七方塊	 拼成 7 ×7 矩形
六方塊	 拼成 9 ×8 矩形	八方塊	 拼成 8 ×17 矩形

我們把結果給老師，老師說上面圖形只是方塊的組合式，並不符合公倍數爲因數連成積的定義。比如：3×2+5×2=16，不能說 3 和 5 的公倍數爲 16，經老師一番解釋後，才恍然大悟，原來上面拼成的矩形和 LCM 圖形是不一樣的觀念，讓我們對倍數有更清楚的了解。

(三) 當初找 LCM 圖形時，我們認爲只要找出所拼成的矩形各取長與寬的 LCM，就是 LCM 圖形的長與寬了。但在六格方塊發現當初的想法必須調整，以下是以六格方塊所找到的矩形

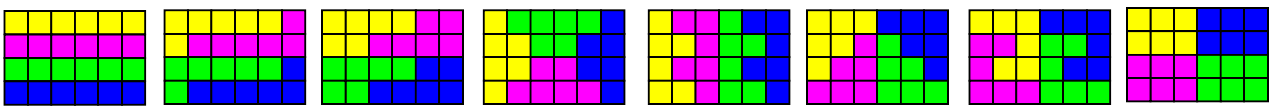


按照原先的推論，LCM 矩形的寬與長是找六格所拼湊的矩形的所有寬與長各取 LCM

寬的 LCM = [1 , 2 , 2 , 4 , 3 , 3 , 3 , 2] = 12

長的 LCM = [6 , 6 , 6 , 6 , 4 , 4 , 4 , 3] = 12

所以六方格 LCM 圖形爲 12 ×12 矩形



但我們卻發現更小 4 ×6 矩形就可將所有六格因數圖形放入

12×12 矩形不是六格方塊的 LCM 圖形，因此找 LCM 圖形長與寬的方法要修正，

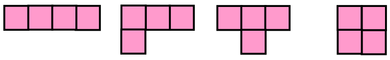
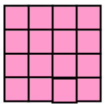
寬＝[1 , 2 , 2 , 2 , 4 , 4 , 4 , 4] = 4，長＝[6 , 6 , 6 , 6 , 3 , 3 , 3 , 3] = 6，爲 4×6 矩形，

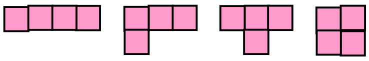
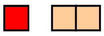
LCM 圖形寬與長是用交叉組合求出。

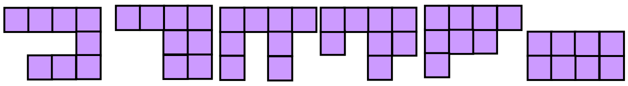
三、因數圖形

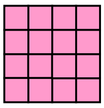
爲了歸納因數圖形的特徵，我們將因數多方塊的格數設定到八，希望能充實研究內容。有趣的是，先尋找因數圖形，再歸納其特徵，又利用特徵再回頭尋找可能遺漏的因數圖形。

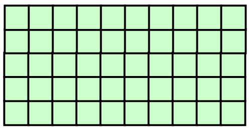
（一）LCM 的因數圖形

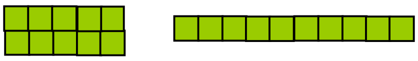
(1) 開始以爲 LCM 的因數圖形只有拼出矩形的多方塊，比如由四格方塊中可以拼成矩形的圖形有  ，所找到的 LCM 圖形爲 

它的因數圖形就只有  。但我們很容易就觀察到  也是它的因數圖形，我們擔心是否會遺漏，有同學提議檢查 16 的因數，16 因數有 1,2,4,8,16，因此還要考慮 8 格、16 格的因數圖形：

八格因數圖形有 

十六格因數圖形有  ，自己爲本身最大因數。

(2)但是我們在找五方塊所找到的 LCM 圖形  的因數圖形時遇到困難，5x10 = 50 的因數有 1,2,5,10.25,50，因此還要考慮 10 格、25 格、50 格的因數多方塊，但在研究假設，只找單格至 8 格多方塊，所以沒有拼湊 10 格、25 格的因數圖形群（因爲實在太多了）。我們將希望放在第陸章歸納的因數圖形結構，從因數圖形特徵去推演出 10 格、25 格因數圖形：5x10 = 50 矩形的

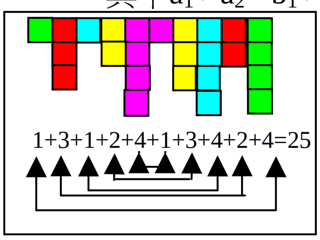
10 格因數圖形有 

25 格的因數圖形呢？我們從第陸章（三）--（６）F 的聯想裡，聯想到多到畫不完的 25 格因數多方塊。

（二）25 格因數多方塊--F 的聯想

數字組合爲：$a_1+b_1+c_1+d_1+e_1+e_2+d_2+c_2+b_2+a_2=25$

其中$a_1+a_2=b_1+b_2=c_1+c_2=d_1+d_2=e_1+e_2=m=5=1+4=2+3$

比如 

這類對稱位置數字和相等的因數圖形多方塊，只要兩塊拼湊就可以拼成 5x10= 50 的矩形。觀察圖形的規則，我們只要討論（a_1、b_1、c_1、d_1、e_1）老師建議我們參考高中第四冊排列組合的可重複選取的直線排列。

可重複的直線排列：從 n 件相異物中任選 r 件排成一列，若可重複選取，排法數爲n^r（n，r爲整數，n≧1 , r≧0）

我們整理估算應有 512 個因數圖形，更詳細的討論見附錄 C。

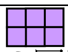
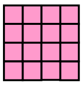
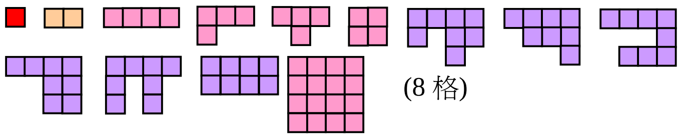
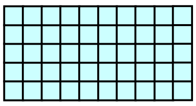
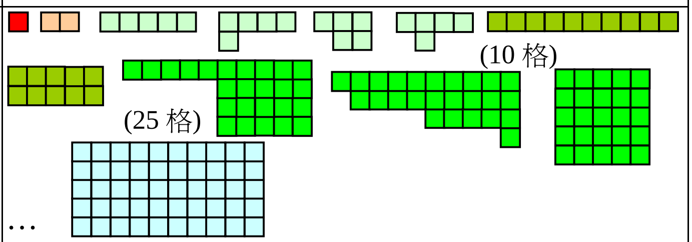
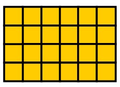
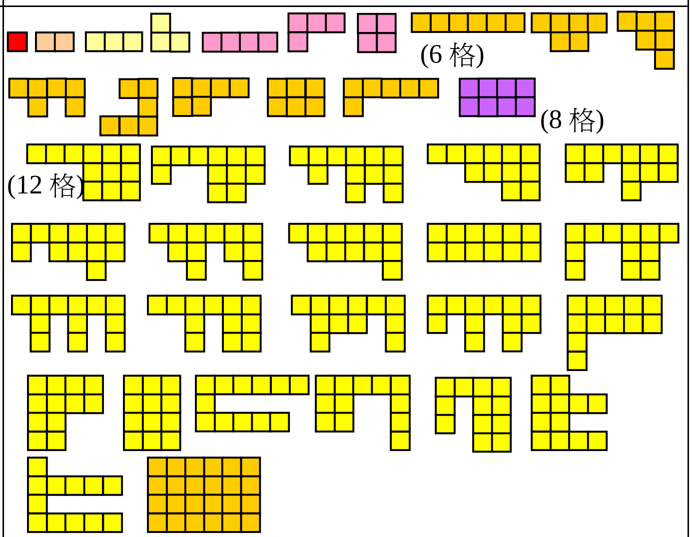
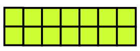
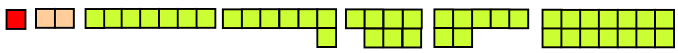
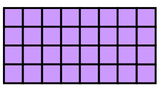
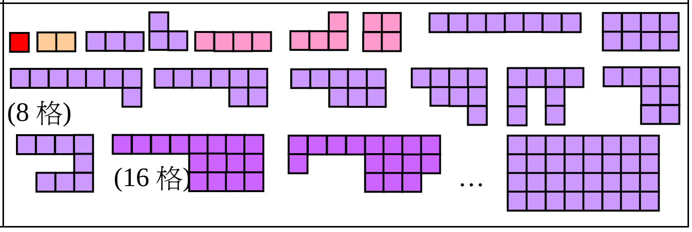
（三）我們利用 F 聯想的方法尋找 6、8 格多方塊 LCM 圖形 4x6=24、4x8=32 矩形十二格因數圖形有 14 個（見結論）、16 格因數圖形有 41 個。（見附錄 D）

捌、結論

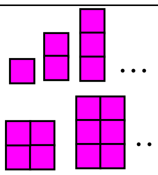
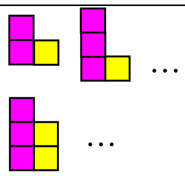
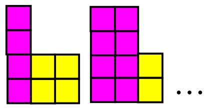
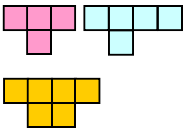
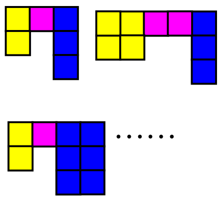
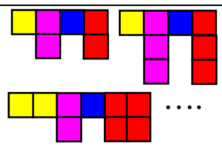
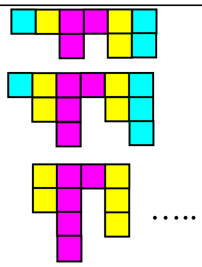
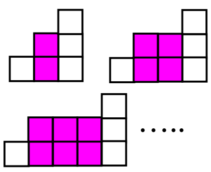
一、尋找多方塊

n 格方塊	n　格　方　塊　圖　形　的　種　類
5	成對 10 種 ＋ 不成對 2 種=12 種（現場補充資料）
6	成對 33 種 ＋ 不成對 2 種=35 種（第伍章）
7	成對 100 種 ＋ 不成對 7 種=107 種（現場補充資料）
8	成對 354 種 ＋ 不成對 9 種=363 種（現場補充資料）

二、找 LCM 圖形與其因數圖形

n 格方塊	LCM 的圖形	因數圖形
3	 2×3=6 6 因數：1，2，3，6	
4	 4×4=16 16 因數：1，2，4，8，16	
5	 5×10=50 50 因數：1，2，5，10，25，50	
6	 4×6=24 24 因數：1，2，3，4，6，8，12，24	
7	 2×7=14 14 因數：1，2，7，14	
8	 4×8=32 32 因數：1，2，4，8，16，32	

三、根據所找到的 LCM 圖形，觀察它們的因數圖形特徵，有下列結論

分 類	因 數 圖 形	特 徵	結 論
矩形		可拼成 m×n 矩形， m、n 為自然數	m×n 矩形即為本身的因數圖形
P 字圖		以(n-x)+ x = y + x 數字組合的圖形	可拼成 2×(y+x)矩形
ㄇ字圖		數字組合為 2x+2x+…+2x+x+x+…+x 的圖形 （2x 個數 m，x 個數 n）	可拼成 2×(m+n)矩形
T 形圖		樣子像 T 字母	無法對其特徵下明確的定論
ㄇ字圖		數字組合為 x+…+x+y+…+y+z…z 其中 x+y=z , y＜z＜x 且 x 與 y 的個數 m，z 的個數 n	可拼成 2(m+n)×z 矩形
F 字圖形		數字組合為 x+…+x+y+…+y+z…z+w…w 其中，x=z 且 y=w， x 與 w 的個數為 m，y 與 z 的個數 n	可拼成 2(m+n)×(x+y)矩形
F 的聯想		數字組合 $a_1+b_1+c_1+\ldots+y_1+z_1+z_2+y_2+\ldots+c_2+b_2+a_2$ 其中$a_1+a_2=b_1+b_2=c_1+c_2=\ldots=y_1+y_2=z_1+z_2=m$	兩塊拼湊就可拼成矩形
樓梯形圖		數字組合 …(x–2)+(x–1)+x…x+(x+1)+(x+2)… 中間項 x，向左右以等差對稱延伸。	兩塊可拼成矩形

玖、參考資料及其他

一、陳冒海主編，國中數學，南一第一冊，最大公因數與最小公倍數。
二、陳冒海主編，國中數學，南一第一冊，圖形的樣式與規律。
三、柳賢、左太政主編，高中數學，翰林第四冊，排列組合。
四、孫文先主編，多方塊，九章出社版社。

評　語

030405 國中組數學科　第三名

方塊的因數與倍數

針對〝方格的因數與倍數〞主題作深入的探索，過程中鍥而不捨，觸角多元，以致研究結果豐富可觀。