中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組數學科

080415

桃園縣大溪鎮仁善國民小學

指導老師姓名

陳靜宜

倪玉梅

作者姓名

周彥廷

魯家齊

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科
組　　別：國小組
作品名稱：神奇驗算法再探
關 鍵 詞：＿驗算＿、＿餘數＿、＿轉化＿（最多三個）

編　　號：

神奇驗算法再探

壹、摘要

去年我們經過一連串的探索，解開了神奇驗算法驗算的謎底，原來是利用等式兩邊除以 9 會有相同的餘數的原理來進行簡易驗算的！我們很好奇是否還有比 9 還厲害的數字可以幫助驗算，原來不只是「9」可以用來快速驗算，其實每一個數字都可以，只是在轉化的過程有的比較方便有的複雜，而且不是所有的數都可以找到轉化的原則，就不是很方便計算。經過這些探索，我們發現「11」驗算的準確度比「9」高，能克服 9 不能檢驗出對位錯誤的困難，而且轉化也很方便，所以我們建議改用 11 的方式來進行「超級」神奇驗算。

貳、研究動機

上一屆的科展活動我們試著解開「神奇驗算法」的驗算原理，雖然我們可以用 9 的神奇驗算法來幫忙驗算，但這種驗算方式在對位錯誤時就沒有辦法檢查出來了，所以我們想試著找找看還有沒有別的數也可以用來幫助驗算，也想知道有沒有更快速的驗算方法。抱著這麼多的問題，我們繼續展開一連串的數字探索活動。

參、研究目的

一、尋 9 以外其他數字的驗算法。
二、尋找更精確的驗算方法。
三、尋找快速的驗算方法。

肆、研究設備及器材

白板、白板筆、電腦、Excell 軟體

伍、研究過程與結果：

一、名詞釋義

為了讓大家了解「神奇驗算法」，我們摘要去年參加科學展覽作品<解開神奇驗算法之謎>的主要發現：神奇驗算法是利用等號兩邊的式子除以 9 的餘數會相等的原理進行驗算，使用方法簡介如下：(詳細說明如附件)

(一)、加法的驗算：

1.在加法運算完成後，先分別把算式中的被加數、加數及和的各位值之數字相加，轉化成一位數。

2.將被加數與加數經轉化後的一位數相加，若其和大於二位數則經由相同的轉化

法，將各位值的數字相加，直至成為一位數。

3.上步驟 2 所得的一位數若與步驟 1 的和的數值相等，則判定計算為正確。

（二)、減法的驗算

1.先分別把算式中的被減數、減數及差的各位值之數字相加，轉化成一位數。

2.將差與減數經轉化後的一位數碼相加，若其和大於二位數則經由相同的轉化法，將各位值的數相加，直至成為一位數。

3.若步驟 2 所得的數值與被減數轉化後的值相等時則通過驗算。

（三)、乘法的驗算：

1. 先分別把算式中的被乘數、乘數及積的各位值之數字相加，轉化成一位數。
2. 將被乘數與乘數經轉化後的一位數相乘, 若其積大於二位數則經由相同的轉化法，將各位值的數相加，直至成為一位數。

3.若步驟 2 所得的數值與積轉化後的值相等時則通過驗算。

（四)、除法的驗算：

1. 先分別把算式中的被除數、除數、商、餘數的各位值之數字相加，轉化成一位數。
2. 用所化成的一位數依商乘以乘數加餘數，所得結果再轉化成一位數，若與被除數所化成的一位數相等，則通過驗算。

二、可以用 2 來驗算嗎？

利用神奇驗算法的經驗，因為式子兩邊除以九的餘數相等可以用來驗算，如果我們能證明式子兩邊除以 2 的餘數會相等，那就可以用 2 來驗算，我們用數字推算後，覺得用符號來代替才能解釋所有的計算，下面是我們的解題過程：

1.加法：(以下皆以< >表示餘數)

假如 A+B=C 的運算成功，則<(A+B)÷2>=<C÷2>

假設 A=2a+a’　B=2b+b’　C=2c+c’

(a、b、c 為任意數，a’、b’、c’分別是 2 的驗算法中 A、B、C 的轉化值)

A+B=(2a+a’)+(2b+b’)

　=2×(a+b)+ a’ +b’

若 a’ +b’＞1　則 a’ +b’還必須依照轉化規則轉化為另一數 m,

此時 a’ +b’=2n+m　(n 是 a’ +b’除以 2 的商)

A＋B=2×(a+b)+ a’ +b’

　=2×(a+b)+ 2n+m

　=2×[(a+b)+ n] +m

< (A＋B)÷2>=m

如果 A+B=C ，m=c’

因此，透過對照除以 2 的餘數是不是相等，可以檢查出加法運算過程是否正確。

2.減法:

如果 A－B=C 是正確時，　即 B+C= A

應用步驟 1.的原理，B、C 的轉化值的和再進行轉化之後應該 A 的轉化值相同，若不同則是計算錯誤。因此 2 的驗算方法可以用來檢驗減法運算的錯誤。

3.乘法:

計算，$A\times B=C$　$A=2a+a'$　$B=2b+b'$　$C=2c+c'$

(a、b、c 為任意數，a'、b'、c'分別是 2 的驗算法中 A、B、C 的轉化值)

$A\times B=(2a+a')\times(2b+b')$

$=2a\times 2b+2a\times b'+a'\times 2b+a'b'$

$=2\times(2ab+ab'+a'b)+a'b'$

若 $a'b'>1$ 則 $a'\times b'$還必須依照轉化規則轉化為另一數 q,

此時 $a'b'=2p+q$　(p 是 a' b'除以 2 的商，q 是餘數)

所以 $A\times B=2\times(2ab+ab'+a'b)+a'b'$

$=2\times(2ab+ab'+a'b)+2p+q$

$=2\times(2ab+ab'+a'b+p)+q$

$A\times B\div 2=[2\times(2ab+ab'+a'b+p)+q]\div 2$

$=(2ab+ab'+a'b+p)\ldots q$

$\langle A\times B\div 2\rangle=q$

又$\langle C\div 2\rangle=c'$

當 $A\times B=C$ 運算正確時

$\langle A\times B\div 2\rangle=\langle C\div 2\rangle$

q 應該等於 c'，所以如果 q 不等於 c'就表示計算錯誤。

因此 2 可以用來檢驗乘法運算的錯誤。

4.除法

若 $A\div B=C\ldots D$

$A=B\times C+D$

$=(2b+b')(2c+c')+(2d+d')$

$=2b\times 2c+2bc'+2cb'+c'b'+2d+d'$

$=2(2bc+bc'+cb'+d)+c'b'+d'$

$A\div 2=$【$2(2bc+bc'+cb'+d)+c'b'+d'$】$\div 2$

$\langle A\div 2\rangle=\langle[2(2bc+bc'+cb'+d)+(c'b'+d')]\div 2\rangle$

$\langle A\div 2\rangle=\langle[2(2bc+bc'+cb'+d)\div 2\rangle+\langle(c'b'+d')\div 2\rangle$

$\langle A\div 2\rangle=0+\langle(c'b'+d')\div 2\rangle$

$\langle A\div 2\rangle=\langle(c'b'+d')\div 2\rangle$

$\langle A\div 2\rangle=\langle c'b'\div 2\rangle+\langle d'\div 2\rangle$

即 $a'=c'b'+d'$

因此當 $A\div B=C\ldots D$ 的計算正確時,

A 的轉化值會等於 B、C 轉化值的積與 D 轉化值的和。

也就是被除數的轉化值會等於商與除數轉化值的積加上餘數的轉化值。

結果：加法、減法、乘法和除法的運算都可以利用數字除以 2 會有相同餘數的原理來驗算。

三、可以用「3」來驗算嗎？

1.加法：

假如 $A+B=C$ 的運算成功，則 $<(A+B)\div3>=<C\div3>$

(以下皆以< >表示餘數)

假設 $A=3a+a'$　$B=3b+b'$　$C=3c+c'$

(a、b、c 為任意數，a'、b'、c'分別是 3 的驗算法中 A、B、C 的轉化值)

$A+B=(3a+a')+(3b+b')$

$=3\times(a+b)+a'+b'$

若 $a'+b'>2$　則 $a'+b'$ 還必須依照轉化規則轉化為另一數 m,

此時 $a'+b'=3n+m$　(n 是 $a'+b'$ 除以 2 的商)

$A+B=3\times(a+b)+a'+b'$

$=3\times(a+b)+3n+m$

$=3\times[(a+b)+n]+m$

$<(A+B)\div3>=m$

如果 $A+B=C$ ，$m=c'$

因此，透過對照除以 3 的餘數是不是相等，可以檢查出加法運算過程是否正確。

2.減法:

如果 $A-B=C$ 是正確時，　即 $B+C=A$

應用步驟 1.的原理，B、C 的轉化值的和再進行轉化之後應該 A 的轉化值相同，若不同則是計算錯誤。因此 2 的驗算方法可以用來檢驗減法運算的錯誤。

3.乘法:

計算，$A\times B=C$　$A=3a+a'$　$B=3b+b'$　$C=3c+c'$

(a、b、c 為任意數，a'、b'、c'分別是 2 的驗算法中 A、B、C 的轉化值)

$A\times B=(3a+a')\times(3b+b')$

$=3a\times3b+3a\times b'+a'\times3b+a'b'$

$=3\times(3ab+ab'+a'b)+a'b'$

若 $a'b'>2$　則 $a'\times b'$ 還必須依照轉化規則轉化為另一數 q,

此時 $a'b'=3p+q$　(p 是 $a'b'$ 除以 2 的商)

所以 $A\times B=3\times(3ab+ab'+a'b)+a'b'$

$=3\times(3ab+ab'+a'b)+3p+q$

$=3\times(3ab+ab'+a'b+p)+q$

$A\times B\div3=[3\times(3ab+ab'+a'b+p)+q]\div3$

$=(3ab+ab'+a'b+p)\ldots q$

$<A\times B\div3>=q$

又 $<C\div3>=c'$

當 $A\times B=C$ 運算正確時

$<A\times B\div3>=<C\div3>$

q 應該等於 c'，所以如果 q 不等於 c'就表示計算錯誤。

因此 2 可以用來檢驗乘法運算的錯誤。

4.除法

若 $A \div B = C \ldots D$

$A = B \times C + D$

$= (3b+b')(3c+c')+(3d+d')$

$= 3b\times 3c + 3bc' + 3cb' + c'b' + 3d + d'$

$= 3(3bc + bc' + cb' + d) + c'b' + d'$

$A \div 3 = 【3(3bc + bc' + cb' + d) + c'b' + d'】 \div 3$

$<A\div 3> = <[3(3bc + bc' + cb' + d) + (c'b' + d')] \div 3>$

$<A\div 3> = <[3(3bc + bc' + cb' + d) \div 3> + <(c'b' + d') \div 3>$

$<A\div 3> = 0 + <(c'b' + d') \div 3>$

$<A\div 3> = <(c'b' + d') \div 3>$

$<A\div 3> = <c'b' \div 3> + <d' \div 3>$

即 $a' = c'b' + d'$

因此當 $A \div B = C \ldots D$ 的計算正確時,

A 的轉化值會等於 B、C 轉化值的積與 D 轉化值的和。

也就是被除數的轉化值會等於商與除數轉化值的積加上餘數的轉化值。

結果：加法、減法、乘法和除法的運算都可以利用數字除以 3 會有相同餘數的原理來驗算。

四、是不是所有的數都可以用來驗算？

1.加法：

假如 A+B=C 的運算成功，則 $<(A+B)\div n> = <C\div n>$

(以下皆以< >表示餘數)

假設 $A=na+a'$　$B=nb+b'$　$C=nc+c'$

(a、b、c 為任意數，a'、b'、c'分別是 3 的驗算法中 A、B、C 的轉化值)

$A+B=(na+a')+(nb+b')$

$=n\times(a+b)+a'+b'$

若 $a'+b' \geqq n$　則 $a'+b'$還必須依照轉化規則轉化為另一數 r,

此時 $a'+b'=ns+r$　(s 是 $a'+b'$除以 n 的商，r 是餘數)

$A+B=n\times(a+b)+a'+b'$

$=n\times(a+b)+ns+r$

$=n\times[(a+b)+s]+r$

$<(A+B)\div n>=r$

如果 A+B=C ，$r=c'$

因此，透過對照除以 n 的餘數是不是相等，可以檢查出加法運算過程是否正確。

2.減法:

如果 A－B=C 是正確時，　即 B+C= A

應用步驟 1.的原理，B、C 的轉化值的和再進行轉化之後應該 A 的轉化值相同，若不同則是計算錯誤。因此任意數的驗算方法可以用來檢驗減法運算的錯誤。

3.乘法:

計算，$A \times B = C$　$A=na+a'$　$B=nb+b'$　$C=nc+c'$

(a、b、c、n 為任意數，a'、b'、c'分別是 2 的驗算法中 A、B、C 的轉化值)

$A\times B=(na+a')\times(nb+b')$

$=na\times nb+na\times b'+a'\times nb+a'b'$

$=n\times(nab+ab'+a'b)+a'b'$

若 $a'b'\geqq n$　則 $a'\times b'$還必須依照轉化規則轉化為另一數 q,

此時 $a'b'=np+q$　(p 是 a' b'除以 2 的商)

所以 $A\times B=n\times(nab+ab'+a'b)+a'b'$

$=n\times(nab+ab'+a'b)+np+q$

$=n\times(nab+ab'+a'b+p)+q$

$A\times B\div n=[n\times(nab+ab'+a'b+p)+q]\div n$

$=(nab+ab'+a'b+p)\ldots q$

$\langle A\times B\div n\rangle=q$

又$\langle C\div n\rangle=c'$

當 $A\times B=C$ 運算正確時

$\langle A\times B\div n\rangle=\langle C\div n\rangle$

q 應該等於 c'，所以如果 q 不等於 c'就表示計算錯誤。

因此任意數都可以用來檢驗乘法運算的錯誤。

4.除法

若 $A\div B=C\ldots D$

$A=B\times C+D$

$=(nb+b')(nc+c')+(nd+d')$

$=nb\times nc+nbc'+ncb'+c'b'+nd+d'$

$=n(nbc+bc'+cb'+d)+c'b'+d'$

$A\div n=【n(nbc+bc'+cb'+d)+c'b'+d'】\div n$

$\langle A\div n\rangle=\langle[n(nbc+bc'+cb'+d)+(c'b'+d')]\div n\rangle$

$\langle A\div n\rangle=\langle[n(nbc+bc'+cb'+d)\div n\rangle+\langle(c'b'+d')\div n\rangle$

$\langle A\div n\rangle=0+\langle(c'b'+d')\div n\rangle$

$\langle A\div n\rangle=\langle(c'b'+d')\div n\rangle$

$\langle A\div n\rangle=\langle c'b'\div n\rangle+\langle d'\div n\rangle$

即 $a'=c'b'+d'$

因此當 $A\div B=C\ldots D$ 的計算正確時,

A 除以 n 的餘數會等於 B 除以 n 的餘數和 C 除以 n 的餘數的積加上 D 除以 n 的餘數，也就是被除數的轉化值會等於商與除數轉化值的積加上餘數的轉化值。

結果：加法、減法、乘法和除法的運算都可以利用等號兩邊的數字除以相同數字會有相同餘數的原理來驗算。

五、如何快速計算出數字除以 2 的餘數找出 2 的轉化值？

1. 「神奇驗算法」中，把數字數除以 9 的餘數就是他的轉化值，我們把數值拆解成個位、十位、百位、千位…的數值進行分析，列出下表：

數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值
1	1	10	0	100	0	1000	0	10000	0	100000	0
2	0	20	0	200	0	2000	0	20000	0	200000	0
3	1	30	0	300	0	3000	0	30000	0	300000	0
4	0	40	0	400	0	4000	0	40000	0	400000	0
5	1	50	0	500	0	5000	0	50000	0	500000	0
6	0	60	0	600	0	6000	0	60000	0	600000	0
7	1	70	0	700	0	7000	0	70000	0	700000	0
8	0	80	0	800	0	8000	0	80000	0	800000	0
9	1	90	0	900	0	9000	0	90000	0	900000	0

2.從上表可以發現十位以後的數值除以 2 的餘數都是 0，只要個位數是偶數時，除以 2 的餘數是 0，轉化值也就是 0。如果個位數是奇數，除以 2 的餘數是 1，轉化值為 1。

3.「2」的驗算法，數字的轉化只要是奇數就轉化成 1，偶數就轉化成 0，如 785585 轉化值是 1，69994 轉化值是 0。

六、如何計算出數字除以 3 的餘數找出 3 的轉化值？

1.將各位值除以 3 的餘數列如下表：

數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值
1	1	10	1	100	1	1000	1	10000	1	100000	1	1000000	1
2	2	20	2	200	2	2000	2	20000	2	200000	2	2000000	2
3	0	30	0	300	0	3000	0	30000	0	300000	0	3000000	0
4	1	40	1	400	1	4000	1	40000	1	400000	1	4000000	1
5	2	50	2	500	2	5000	2	50000	2	500000	2	5000000	2
6	0	60	0	600	0	6000	0	60000	0	600000	0	6000000	0
7	1	70	1	700	1	7000	1	70000	1	700000	1	7000000	1
8	2	80	2	800	2	8000	2	80000	2	800000	2	8000000	2
9	0	90	0	900	0	9000	0	90000	0	900000	0	9000000	0

2.從上表可以看出十位數以上的數字的轉化值（也就是除以 3 的餘數）會等於該位數數字除以 3 的餘數，如 80、800、8000、80000…等除以 3 的餘數會跟 8 除以 3 的餘數。所以任意數除以 3 的餘數可以用每一個位數除以 3 的餘數相加再除以 3 的餘數。也可以先把每一個位數的數字先相加再除以 3，算出餘數。

3 列出 1~50 轉化的方式如下：

數字	餘數	轉化方式	數字	轉化值	轉化方式	數字	轉化值	轉化方式	數字	轉化值	轉化方式	數字	轉化值	轉化方式
1	1		11	2	1+1	21	0	2+1=3→0	31	1	3+1=4→1	41	2	4+1=5→2
2	2		12	0	1+2=3→0	22	1	2+2→4→1	32	2	3+2=5→2	42	0	4+2=6→0
3	0		13	1	1+3=4→1	23	2	2+3→5→2	33	0	3+3=6→0	43	1	4+3=7→1
4	1		14	2	1+4=5→2	24	0	2+4=6→0	34	1	3+4=7→1	44	2	4+4=8→2
5	2		15	0	1+5=6→0	25	1	2+5=7→1	35	2	3+5=8→2	45	0	4+5=9→3
6	0		16	1	1+6=7→1	26	2	2+6=8→2	36	0	3+6=9→0	46	1	4+6=10→1
7	1		17	2	1+7=8→2	27	0	2+7=9→0	37	1	3+7=10→1	47	2	4+7=11→2
8	2		18	0	1+8=9→0	28	1	2+8=10→1	38	2	3+8=11→2	48	0	4+8=12→0
9	0		19	1	1+9=10→1	29	2	2+9=11→1	39	0	3+9=12→0	49	1	4+9=13→1
10	1	1+0	20	2	2+0	30	0	3+0=3→0	40	1	0+4	50	2	5+0=5→2

從上表可以發現任何數除以三的餘數會等於它的每一位值的數字相加除以三的餘數,

以 37 為例：

37÷3=13….1

3+7=10　　10÷3=3….1

4.所以「3」的驗算法數字轉換有兩種方式，可以先把每一位的數字相加後再除以 3 算出餘數或是先算出各個位數除以 3 的餘數再相加。

七、如何快速計算出數字除以 4 的餘數找出 4 的轉化值？

1. 用 Excell 列出各位值除以 4 的餘數作為轉化值，如下表：

數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值
1	1	10	2	100	0	1000	0	10000	0	100000	0
2	2	20	0	200	0	2000	0	20000	0	200000	0
3	3	30	2	300	0	3000	0	30000	0	300000	0
4	0	40	0	400	0	4000	0	40000	0	400000	0
5	1	50	2	500	0	5000	0	50000	0	500000	0
6	2	60	0	600	0	6000	0	60000	0	600000	0
7	3	70	2	700	0	7000	0	70000	0	700000	0
8	0	80	0	800	0	8000	0	80000	0	800000	0
9	1	90	2	900	0	9000	0	90000	0	900000	0

2.從上列的數字來看，可以發現當十位數的數字是偶數時就轉成 0，奇數時就轉成 2，個位數則直接以除以 4 的餘數來表示。如 78，7 是偶數，所以十位數轉成 2，8 除以

2 餘數是 0，所以 78 的轉化值為「2」。

3.不管百位數以上各位的數是多少除以 4 餘數都是 0，所以不會影響到這個數除以 4 的餘數，所以數字轉化只需要考慮十位數及個位數。

4.例如：數字 3905029 ，轉化時僅需考慮 29，十位數的 2 是偶數，所以轉化為 0，9 除以 4 的餘數是 1，所以 3905021 的轉化值是 1。

八、如何快速計算出數字除以 5 的餘數找出 5 的轉化值？

1. 用 Excell 列出 1 到 100 除以 5 的餘數作為轉化值，透過各位值數字的拆解分析出數字的轉化計算方式，如下表：

數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值
1	1	10	0	100	0	1000	0	10000	0	100000	0
2	2	20	0	200	0	2000	0	20000	0	200000	0
3	3	30	0	300	0	3000	0	30000	0	300000	0
4	4	40	0	400	0	4000	0	40000	0	400000	0
5	0	50	0	500	0	5000	0	50000	0	500000	0
6	1	60	0	600	0	6000	0	60000	0	600000	0
7	2	70	0	700	0	7000	0	70000	0	700000	0
8	3	80	0	800	0	8000	0	80000	0	800000	0
9	4	90	0	900	0	9000	0	90000	0	900000	0

2. 從上表可以發現，要計算任何數除以 5 的餘數，只要計算個位數除以 5 求得的餘數即可。

九、如何快速計算出數字除以 6 的餘數找出 6 的轉化值？

1. 將各位值的數值除以 6 的餘數整理如下表。

數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值
1	1	10	4	100	4	1000	4	10000	4	100000	4	1000000	4
2	2	20	2	200	2	2000	2	20000	2	200000	2	2000000	2
3	3	30	0	300	0	3000	0	30000	0	300000	0	3000000	0
4	4	40	4	400	4	4000	4	40000	4	400000	4	4000000	4
5	5	50	2	500	2	5000	2	50000	2	500000	2	5000000	2
6	0	60	0	600	0	6000	0	60000	0	600000	0	6000000	0
7	1	70	4	700	4	7000	4	70000	4	700000	4	7000000	4
8	2	80	2	800	2	8000	2	80000	2	800000	2	8000000	2
9	3	90	0	900	0	9000	0	90000	0	900000	0	9000000	0

2. 從上表可以發現十位數以上各位的數字除以 6 餘 1 時轉化值為 4，除以 6 餘 2 時轉化值為 2，除以 6 餘 0 時轉化值為 0。
3. 數字轉化也可以直接對表找出。

4. 例如：2789422 的轉化值即為 2+4+2+0+4+2+2=16→4+0= 4

與 2789422÷4… 4 相吻合。

十、如何快速計算出數字除以 7 的餘數找出 7 的轉化值？

1.將各位值的數值除以 7 的餘數整理如下表。

數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值
1	1	10	3	100	2	1000	6	10000	4	100000	5	1000000	1	10000000	3
2	2	20	6	200	4	2000	5	20000	1	200000	3	2000000	2	20000000	6
3	3	30	2	300	6	3000	4	30000	5	300000	1	3000000	3	30000000	2
4	4	40	5	400	1	4000	3	40000	2	400000	6	4000000	4	40000000	5
5	5	50	1	500	3	5000	2	50000	6	500000	4	5000000	5	50000000	1
6	6	60	4	600	5	6000	1	60000	3	600000	2	6000000	6	60000000	4
7	0	70	0	700	0	7000	0	70000	0	700000	0	7000000	0	70000000	0
8	1	80	3	800	2	8000	6	80000	4	800000	5	8000000	1	80000000	3
9	2	90	6	900	4	9000	5	90000	1	900000	3	9000000	2	90000000	6

2.從上表可以看出轉化值從 1、10、100…一直到 1000000 才出現重複的現象，所以 7 的轉化較難找出共同性，數字轉化可以用對表的方式較方便。

3.如 99999999 的轉化為 6+2+3+1+5+4+6+2=29

29 再轉化成 6+2=8

8 再轉化成 1

與 99999999÷7….1 相等。

十一、如何快速計算出數字除以 8 的餘數找出 8 的轉化值？

1.將各位值的數值除以 8 餘數整理如下表。

數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值
1	1	10	2	100	4	1000	0	10000	0	100000	0
2	2	20	4	200	0	2000	0	20000	0	200000	0
3	3	30	6	300	4	3000	0	30000	0	300000	0
4	4	40	0	400	0	4000	0	40000	0	400000	0
5	5	50	2	500	4	5000	0	50000	0	500000	0
6	6	60	4	600	0	6000	0	60000	0	600000	0
7	7	70	6	700	4	7000	0	70000	0	700000	0
8	0	80	0	800	0	8000	0	80000	0	800000	0
9	1	90	2	900	4	9000	0	90000	0	900000	0

2.從上表可以看出千位數以上的部分除以 8 的餘數皆為零。

3.個、十、百位可用對表的方式進行轉化。

4.以 9999999 的轉化為例：

9999999=0+4+2+1=7

與 9999999 ÷8…..7 的餘數相等。

十二、如何快速計算出數字除以 11 的餘數找出 11 的轉化值？

1.將各位值的數值除以 11 的餘數整理如下表。

數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值	數字	轉化值
1	1	10	10	100	1	1000	10	10000	1	100000	10
2	2	20	9	200	2	2000	9	20000	2	200000	9
3	3	30	8	300	3	3000	8	30000	3	300000	8
4	4	40	7	400	4	4000	7	40000	4	400000	7
5	5	50	6	500	5	5000	6	50000	5	500000	6
6	6	60	5	600	6	6000	5	60000	6	600000	5
7	7	70	4	700	7	7000	4	70000	7	700000	4
8	8	80	3	800	8	8000	3	80000	8	800000	3
9	9	90	2	900	9	9000	2	90000	9	900000	2

2.從上表可以發現底色藍色的部分是奇數位數的轉化值，跟同數字相同；而底色紅色的部分的轉化值與該數位數字的和為 11。如數字 10，十位數為 1，轉化值為 10，1+10=11；50 的十位數是 5，轉化值是 6，5+6=11，所以偶數為的轉化值為 11 減掉該該位的數字。

3.以 837021 的轉化為例：

837021　加底線的是偶數位，8→3　　7 →4　　2→9

837021　的轉化值是 3+3+4+0+9+1=20　→9+0=9

與 837021 ÷11=76092….9　的餘數相同

陸、討論：

一、　從研究過程的一、二、三可以知道利用等號兩邊除以任何數會有相同餘數的原理來進行驗算，神奇驗算法就不止有 9 可以用來幫助檢查計算的錯誤。研究過程四到十一再探討各個數字轉化成餘數的快速計算方式，只要透過同一套轉化規則將數字轉化成個位數即可應用一般驗算的原則進行驗算。

以　「3899+4776=8675」為例：列出轉化過程如下：

	被加數的轉化值	加數的轉化值	和的轉化值	被加數與加數轉化值的和
驗算數	3899	4776	8675	
2	1	0	1	1
3	3+8+9+9=29→2	4+7+7+6=24→0	8+6+7+5=26→2	2+0=2
4	2+1=3	2+2=4→0	2+1=3	3+0=3
5	4	1	0	4+1=5→0
6	0+2+0+3=5	4+4+4+0=12 4+2=6→0	2+0+4+5=11→5	5+0=2
7	4+2+6+2=14→0	3+0+0+6=9→2	6+5+0+5=16→2	0+2=2
8	0+2+1=3	4+6+6=16→0	0+6+5=11→3	2+0=3
11	8+8+2+9=27→5	7+7+4+6=24→2	3+6+4+5=18→7	5+2=7

從上表可以看出各種個數字加法驗算的過程，雖然 2 到 11 都可以套用神奇驗算法從餘數相同的規則去檢驗計算是否正確，有些需要對表的，如 6、7、8 比較麻煩。而 2、3、5 雖然不用對表可以較快的完成轉化，但由於出現相同轉化值的機會很高，所以精確度較差。

二、<神奇驗算法之謎>有關於九的驗算雖然可以快速的檢驗，但遇到沒有把位置對好的計算時還是有無法檢驗錯誤的限制。從 2 的驗算轉化值的表可以看出，所有的奇數轉化值都是 1，偶數的轉化值都是 0，在第一步的轉化過程就有很多重複的數，以 765+234=999 來說，765→1，234→0，999→1，1+0=1 所以檢驗為正確。若計算時進位錯誤將 999 算成 1099 時，因為 1099→1，所以這項錯誤仍然無法檢驗出來。也就是用除以 2 的餘數來驗算時只能做最簡略的檢驗，還是有很大的機會出錯。

三、數字轉化的重複性質來看，從 2~11 中，驗算最準確的數字是 11。而當數字進行運算時，如果有對為錯誤的情形一樣可以檢驗出來，因為奇數為偶數位的轉化是不同的方式，因此除非對位的錯誤是發生在錯位兩位或四位等偶數位時。

柒、結論

一、除了 9 之外，任何數字都可以應用等式兩邊餘數相等的原理進行驗算。

二、數字越大檢驗的精確性越高，但數字越大轉化的方式就越複雜越不易使用。

三、「11」的驗算方式精確度比「9」好，轉化方式雖然不像 9 那麼方便，但是也有簡易的規則，所以是個不錯的驗算數字。

四、「2」是最快的檢驗方式，但精確度不是很高，僅能作最初步的檢驗。

捌、參考資料

1. 第 41 屆科展優勝作品專輯　　國立台灣科學教育館
2. 解開神奇驗算法之謎　　中華民國第四十三屆科學展覽作品
3. 乘與除　　翰林版數學教科書五上第二單元

玖、附件：

一、神奇驗算法如何使用？

神奇驗算法與一般驗算法的計算法則相同，最大的不同點在於驗算時，先將計算中所有的數轉化成「一位數」，完成轉化後依照加法、減法、乘法及除法的驗算規則進行驗算，因為進行驗算時多以一位數進行，所以可以簡易快速的檢查出計算結果是否正確，是一種很簡便的驗算方式。

(一)加法的驗算：

1. 在加法運算完成後，先分別把算式中的被加數、加數及和的各位值之數碼相加，轉化成一位數。
2. 將被加數與加數經轉化後的一位數相加，若其和大於二位數則經由相同的轉化法，將各位值的數相加，直至成為一位數。
3. 上步驟 2 所得的一位數若與步驟 1 的和的數值相等，則判定計算為正確。
4. 舉例說明如下：

算式：134+233=347

驗算步驟 1.

134 經 $\boxed{1+3+4=8}$ 轉化成 8

213 經 $\boxed{2+1+3=6}$ 轉化成 6

347 經 $\boxed{3+4+7=14 \quad 1+4=5}$ 轉化成 5

步驟 2.

8+6=14 14 經 $\boxed{1+4=5}$ 轉化成 5

通過驗算！

5. 在數字的「轉化」過程中，遇有數字「9」即將 9 轉化為「0」。

例如：數字：234 經 $\boxed{2+3+4=9}$ 轉化成 9，9 又轉化成 0

數字：2349 經 $\boxed{2+3+4+0=9}$ 轉化成 9，9 再轉化成 0

數字：1233 經 $\boxed{1+2+3+3=9\rightarrow 0}$ 轉化成 0

數字：931 經 $\boxed{0+3+1=4}$ 或 $\boxed{9+3+1=13 \quad 1+3=4}$ 轉化成 4

算式：9999+9999=19998

利用神奇驗算法進行的方式為：0+0 ＝ 0 **驗算成功！**

（二）減法的驗算

1. 先分別把算式中的被減數、減數及差的各位值之數碼相加，轉化成一位數。
2. 將差與減數經轉化後的一位數碼相加，若其和大於二位數則經由相同的轉化法，將各位值的數相加，直至成為一位數。
3. 若步驟 2 所得的數值與被減數轉化後的值相等時則通過驗算。
4. 舉例說明如下：

算式：876－421=455

驗算步驟 1.

876 經 $\boxed{8+7+6=21 \quad 2+1=3}$ 轉化為 3

421　經 $\boxed{4+2+1=7}$ 轉化為 7

455　經 $\boxed{4+5+5=14 \quad 1+4=5}$ 轉化為 5

通過驗算！

步驟 2.　5+7=12　再經 1＋2＝3

5. 若計算錯誤，如：876－421= 457

457 經 $\boxed{4+5+7=16 \quad 1+6=7}$ 轉化為　7

7+7=14　14 經 $\boxed{1+4=5}$ 轉化為 5，　5≠3，不通過驗算！

（三）乘法的驗算：

1. 先分別把算式中的被乘數、乘數及積的各位值之數字相加，轉化成一位數。
2. 將被乘數與乘數經轉化後的一位數相乘，若其積大於二位數則經由相同的轉化法，將各位值的數相加，直至成為一位數。
3. 若步驟 2 所得的數值與積轉化後的值相等時則通過驗算。
4. 舉例說明如下：

算式：876 ｘ 543=475668

驗算步驟 1.

876　經 $\boxed{8+7+6=21 \quad 2+1=3}$ 轉化成 3

543　經 $\boxed{5+4+3=12 \quad 1+2=3}$ 轉化成 3

475668 經 $\boxed{4+7+5+6+6+8=36 \quad 3+6=9 \quad 9\to 0}$ 轉化成 0

步驟 2.

3 ｘ 3 = 9　→ 0

通過驗算！

（四）除法的驗算：

1. 先分別把算式中的被除數、除數、商、餘數的各位值之數字相加，轉化成一位數。
2. 用所化成的一位數依商乘以乘數加餘數，所得結果再轉化成一位數，若與被除數所化成的一位數相等，則通過驗算。
3. 舉例說明如下：

算式：654 ÷ 23 = 28…..10

驗算步驟 1.

654 經 $\boxed{6+5+4 = 15 \quad 1+5=6}$ 轉化成 6

23　經 $\boxed{2+3=5}$ 轉化成　5

28　經 $\boxed{2+8 = 10 \quad 1+0=1}$ 轉化成 1

10　經 $\boxed{1+0=1}$ 轉化成　1

通過驗算！

1 ｘ 5 + 1=6

評　語

080415 國小組數學科

神奇驗算法再探

原理分析及數值轉化表列清楚。口頭說明詳細明晰。唯此原理乃過去研究過之資料，在先前研究之要領的銜接之敘述欠詳，代號之意義說明欠明確。本研究結果的實用價值並不高。