

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組數學科

080414

臺中縣清水鎮清水國民小學

指導老師姓名

陳維民

黃士彥

作者姓名

蘇峻賢

陳柏蓉

周昀徵

楊鎮維

楊青樺

王馨慧

中華民國第四十四屆中小學科學展覽
作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：『繞』的徹底研究

關鍵詞：遊戲規則、公因（倍）數、統計

編 號：

壹、摘要

兩年前的一次下棋比賽，在討論下棋之餘，我們訂定了棋子進行的規則—「二一四二，逢陰補陽」，而有了『環遊世界一大圈』的作品。而這次的研究則是兩年前研究的加深加廣。「二一四二，逢陰補陽」這個規則是這樣的，「二一四二」說明第一步座標在(2,1)則下一步在(4,2)，(6,3)……此類推，「逢陰補陽」是因為棋盤沒那麼大，所以碰到棋盤的最右邊就跳回到第一排，碰到棋盤的最上邊就跳回到第一列。

二年前，我們找出了所有可能環遊一大圈的棋盤，以及該棋盤中每一步環遊一圈的步數；今年我們再研究不能環遊一大圈的情形，也把每一步環遊一圈的步數找出。最後，更進一步利用統計的方法，找出同一個格子數的所有棋盤，他們步數的相同點與相異處。

貳、研究動機

經歷了前年的『環繞世界一大圈』，伙伴們對(規則的尋找)都有了濃厚的興趣。這個學期，鎮維提出建議，為什麼我們不再繼續做更深入的探討呢？說得也是！何況我們現在是六年級了，一定可以有更好的作品出現。於是，我們擇日不如撞日，立刻相約去找老師了！

老師聽了我們的計畫，滿臉笑容，一口答應：『好！難得你們這麼有心，老師當然樂意再指導你們！但老師要看看，當初老師教你們的【降龍十八掌心法】“二一四二，逢陰補陽；融會貫通，神龍再現！”你們還能記得幾成！』

說完，老師畫了一個十二格的圖形，叫我們判斷是否能環繞一大圈。大家口說簡單，可是忙了十分鐘卻仍找不出解答。

老師搖頭，說：『可見你們還沒有復習，因為你們把老師教你們的【降龍十八掌】搞成【降鼠十八掌了】，威力盡失。你們回去吧！等你們把【降龍十八掌】練熟再來找老師吧！』說來慚愧，我們在毫無準備的情況下，就來找老師，實在太冒昧了。大家都很不好意思！只好回去先苦練一番了。

一個禮拜之後，我們再次造訪老師，有了一個禮拜的練功，果然將【降龍十八掌】舞得虎虎生風，輕鬆破解了老師所出的十五格和十六格的題目。老師龍心大悅，連聲叫好，老師終於答應要將我們收入門下了。

老師問說：『你們想再鑽研那些題目呢？』我們想，前年我們已經發現，(1) 只要可以環繞一大圈的圖形，它的長和寬的格子數目必然是呈現互質的關係。(2) 而且我們也知道，在能夠環繞一大圈的情況下，只要決定了第一步就能知道它最後會走幾步回到原點。

老師說：『你們上次找出的規則，只能用在環繞世界一大圈的情形，那其他的情形，你們能否找出規則呢？』這個嘛！倒是有點難？嗯~~~ 好吧！就讓我們就來挑戰這個規則吧！

參、研究目的

一開始我們把研究的重心放在擴展方格的限制，也就是說，在任意的方格圖中，任選一個點當作起點（第一格），則走幾步之後會走回原點呢？這就是我們的第一個問題。

〔問題一〕在方格圖中，任選一個點當作起點，則它經過幾步會走回原點呢？

如果有了這個規則之後，我們就可以進一步地找出，所有可能步數出現的次數。例如在 2×6 的方格中（見下圖），走兩步就走回去的情形有三種，走三步就走回去的情形有二種，而走六步才回去的情形有六種。如下表：

2	6	6	2	6	6
起點	6	3	2	3	6

（附註：上表中的數字代表分別以各點為起點時，再度走回原點時所需經過的步數。）

將各種步數予以統計出來之後，我們想到一個問題，如果總格數相同，例如 4×6 和 3×8 或是 2×12 ，都是 24 格，那它們各種可能的步數的統計情形，會相同嗎？老師笑道，『問得好！這個問題的答案嘛！嗯～嗯～，不告訴你！』

『不告訴你！』又來這套！我看老師大概也不會吧！沒辦法，求人不如求己，就讓我們自己來研究吧！這就是我們的第二個問題！

〔問題二〕總格數相同的情形下，是否各種步數出現的情形也會相同呢？如果有的情形相同，有的不同，又是在什麼樣的條件下會相同呢？

肆、研究設備及器材

紙、筆、棋盤、電腦

伍、研究過程或方法

一、第一階段研究過程記錄及結果

〔問題一〕在方格圖中，任選一個點當作起點，則它經過幾步會走回原點呢？

因為前年的科展研究中，可以環繞世界一大圈的方格圖形中，其每一格的步數就是最左方行的步數乘以最下方列的步數，這個規則已經求出。因此，我們這次將重心放在不能環繞世界一大圈的方格圖形，希望透過歸納及整理，可以找出它的規則：

(一)不能環繞世界一圈的圖形研究

1.由於篇幅有限，我們只列出 2×2 ， 2×4 ， 2×6 ， 2×8 ， 3×3 ，

3×6 ， 3×9 ， 4×2 ， 4×4 ， 4×6 ， 4×8 等八種圖形步數。

2	2
◎	2

2×2

2	4	2	4
◎	2	2	4

2×4

2	6	6	2	6	6
◎	6	3	2	3	6

2×6

2	8	4	8	2	8	4	8
◎	8	4	8	2	8	4	8

2×8

3	3	3
3	3	3
◎	3	3

3×3

3	6	3	6	3	6
3	6	3	6	3	6
◎	6	3	2	3	6

3×6

3	9	9	3	9	9	3	9	9
3	9	9	3	9	9	3	9	9
◎	9	9	3	9	9	3	9	9

3x9

4	4
2	2
4	4
◎	2

4x2

4	4	4	4
2	4	2	4
4	4	4	4
◎	4	2	4

4x4

4	12	12	4	12	12
2	6	6	2	6	6
4	12	12	4	12	12
◎	6	3	2	3	6

4x6

2.在這個時候，我們突然發現，可以環繞世界一圈的圖形，例如2x1，2x3，3x4，3x5等，和不能環繞世界一圈的圖形有一個很大的差別，那就是**能環繞世界一圈的圖形**，它的長和寬一定是**“互質”的關係**。也就是說，長和寬的最大公因數等於一，這是我們在四年級時所不懂的。

有了這個重大的發現之後，老師告訴我們，爲了稱呼方便起見，我們就把能夠環繞世界一大圈的圖形，稱爲『**長和寬互質**』的圖形；而不能環繞世界一大圈的圖形，我們就稱之爲『**長和寬不互質**』的圖形。本文以下，均改用這個稱呼！

3. 我們在探討規則時，常常不知道其他人在看的是那一格，於是，爲了精確指出某一格的位置，我們引入了**座標**的觀念。以起點爲第一行、第一列的起頭，定之爲原點(0、0)，而原點右邊的那一格，乃是第二行，第一列，定之爲(1、0)，原點上方的那一格，位置在第一行，第二列，定之爲(0、1)，依此類推。以下，我們便試舉一個3 x 4的圖形來說明我們的座標定義。

(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)
(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)
(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)

(二)圖形歸納及整理

1. 歸納相同之步數

接著，我們發現，上述11個圖形中，雖然格子很多，但步數卻頗多重覆，步數只有出現2、3、4、6、8、9、12這七種情形。所以，我們更進一步把上述11個圖形中，相同步數的最左方行的步數和最下方列的步數記錄下來，以尋找其規則。其結果記錄如下：(附註：我們這邊的【長】定義爲最左方行的步數和最下方列步數的較大值，【寬】定義爲最左方行的步數和最下方列步數的較小值)

長	2
寬	2
步數	2

長	3
寬	3
步數	3

長	4	4
寬	2	4
步數	4	

長	6	3	6
寬	2	2	3
步數	6		

長	8	8
寬	2	4
步數	8	

長	9	
寬	3	
步數	9	

長	6	4
寬	4	3
步數	12	

2. 列舉各種可能因素

上述表格中，步數 2、3、9 的只有一種可能的長、寬比，我們先不討論。我們嚐試由不同的長、寬卻有相同步數的情形來做比較，以找出它們規則性。我們並假設步數應該會和長乘寬、或是長寬的最大公因數、長寬的最小公倍數等性質有相關性。所以我們把這些表格的各種性質都計算出來，結果彙整如下：

長	8	8
寬	4	2
長 x 寬	1 6	3 2
最大公因數	2	4
最小公倍數	8	8
步數	8	

長	6	3
寬	4	4
長 x 寬	2 4	1 2
最大公因數	2	1
最小公倍數	1 2	1 2
步數	1 2	

	4	4
寬	2	4
長 x 寬	8	1 6
最大公因數	2	4
最小公倍數	4	4
步數	4	

長	6	3	6
寬	2	2	3
長 x 寬	1 2	6	1 8
最大公因數	2	1	3
最小公倍數	6	6	6
步數	6		

3. 規則之發現

由以上幾個情形，我們可以發現，在全部的情形中，**步數都等於長、寬的最小公倍數**。請不要忘了，我們這裡所定義的長、寬分別代表最左方行的步數和最下方列的步數。也就是說，任何一格所走的步數，就是（最左方行的步數）和（最下方列步數）的**最小公倍數**。

4. 互質情形之再驗證

找到這個規則之後，再回過來檢視是否能用在長、寬、互質的圖形上。我們抽出長、寬互質的圖形來檢視這個規則。經過驗證（結果如下），**確定這個規則也可以適用在長、寬互質的圖形上**。所以，我們有相當的把握可以確認，方格圖中**任一格所走的步數，就是最下方列的步數和最左邊行步數最小公倍數**。

長	4
寬	3
長 x 寬	12
最大公因數	1
最小公倍數	12
步數	12

長	5
寬	3
長 x 寬	15
最大公因數	1
最小公倍數	15
步數	15

長	7
寬	3
長 x 寬	21
最大公因數	1
最小公倍數	21
步數	21

長	5
寬	2
長 x 寬	10
最大公因數	1
最小公倍數	10
步數	10

長	6
寬	3
長 x 寬	18
最大公因數	3
最小公倍數	6
步數	6

長	9
寬	2
長 x 寬	18
最大公因數	1
最小公倍數	18
步數	18

互質情形的驗證

5. 萬流歸宗

我們又發現，以前我們所求出的規則：長、寬互質的情形下，每一格的步數等於最下方列的步數和最左方行的步數相乘。這個規則就是因為長、寬格數互質，所以最下方列和最左方行的步數也互質，所以最下方列和最左方行步數的最小公倍數就是二者相乘。我們以前所求得的規則，事實上就是基於長、寬格數互質而推出來的關係。

6. 第一個問題結果彙整

當我們已知長、寬的格數之後，如果要求出任一格當起點所走回原點的步數，可依照以下三個步驟完成：

- (1) 先求出最下方列的步數；（方法已於前年科展作品環遊世界一『大』圈中提過【詳見附件】，這裡不再覆述）
- (2) 再求出最左方行的步數；（同上述情形）
- (3) 再求出每一格的最下方列和最左方行步數的最小公倍數，即是所求。

7. FLASH 之製作

我們花了很多的時間去計算各種表格中各起始點的步數，雖然知道規則，但還是很浪費時間。因為我們所探討的範圍，表格的長與寬都不能太大，否則的話，例如 20 x15 的表格，就必須要進行 300 次的計算。必須縮短計算表格的時間，我們才有辦法去驗證大一點的表格。

說也奇怪，我們老師最近一天到晚常常對著筆記型電腦微笑，令人懷疑他是不是忘了吃藥了。基於對老師的關心，我們鼓起勇氣去詢問老師的身心狀況，老師說：『小子有所不知，老師目前在研究的乃是威力強大的軟體【FLASH】，這個玩意用處可大了！』

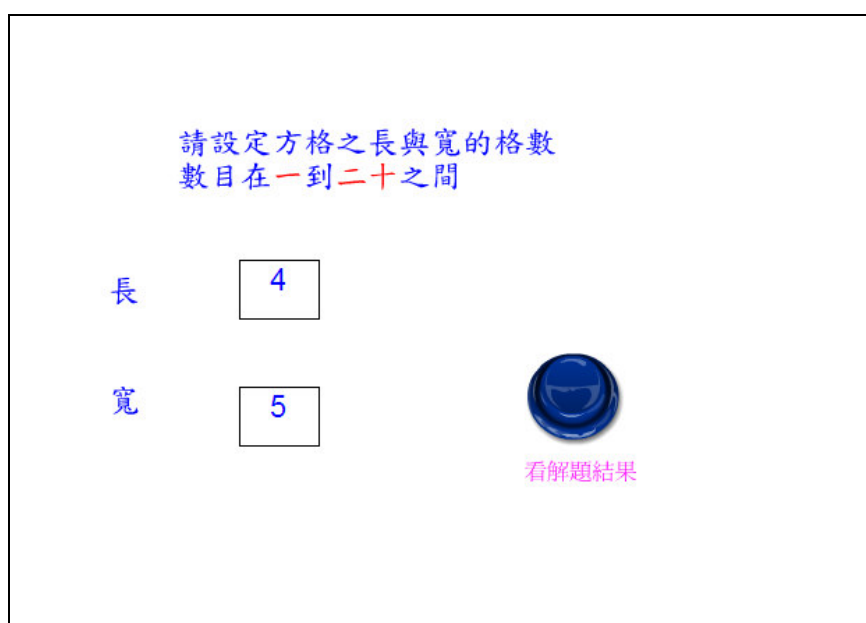
說完老師秀了一些他的作品，有分數的教學，有整數的乘除法、有分數的畫格線程式。沒想到老師的程式設計能力還這麼強，真是有眼不識泰山，失敬、失敬！

鬼靈精的柏蒼忽然冒出一句，：『老師，你程式設計這麼強，有沒有辦法幫我們寫一個程式可以計算表格的步數呢？』大家眼睛一亮，對啊！如果可以用電腦替我們計算，這可不是太方便了嗎？

老師的臉上露出猶豫的表情，『可以是可以啦。不過老師最近很忙，要趕一些作品，沒什麼時間。再加上家裡小孩還小需要照顧，恐怕.....』

一看老師又出現這種推卸責任的神情，大家連忙七嘴八舌，或者阿諛奉承，或者百般諂媚，我們說了一堆飯後聽到一定會吐出來的違心之論，例如『老師您好帥哦！』、『老師我們好喜歡您哦！』、『老師您是我們的偶像！』終於，老師在一片飄飄然的情況下，答應為我們寫一個計算表格的程式。


寫出來的程式，它的操作介面如下：



請設定方格之長與寬的格數
數目在一到二十之間

長

寬

 看解題結果

5	5	20	10	20
4	5	20	10	20
3	5	20	10	20
2	5	20	10	20
1	0	4	2	4
	1	2	3	4



結果匯整

二、第二階段研究過程記錄及結果

有了這個 FLASH 程式的協助，我們的研究速度加快許多，以前花費許多的時間在計算表格，有了這個程式之後，表格的計算只需要只秒鐘便可以完成了！所以對規則的假設，更加是天馬行空，五花八門了！反正只要程式一跑，規則的對錯立刻揭曉！科技使用得宜，真是對學習有很大的幫助。不過，這也多虧了老師的辛勞，看他的白頭髮又多了好幾根，真是令人不忍！因此，我們一定更要以最好的表現來回報老師的白髮了！

好吧！廢話不多說，開始來進行我們的研究吧！

〔問題二〕總格數相同的情形下，是否各種步數出現的情形也會相同呢？如果有的情形相同，有的不同，又是在什麼樣的條件下會相同呢？

(一)利用因數分解法，找出總格數相同的不同方格組合

首先我們找一個可以分解的數當作總格數。這樣限制是因為它必須可以有不同的分解方法，所以必須是可以做因數分解的。我們先定 24 當作總格數。設定總格數之後再將 24 作因數分解，我們可以發現，24 分解之後有四種可能，這也就代表總格數 24 格的方格圖有四種可能情形。(因為我們將 $a \times b$ 和 $b \times a$ 視作相同的情形)

$$24 = 1 \times 24$$

$$= 2 \times 12$$

$$= 3 \times 8$$

$$= 4 \times 6$$

所以我們知道，我們要討論的方格圖就是以上四種情形。

(二)利用電腦程式，將每一個方格圖所出現的各種步數加以彙整，下面就是四種情形的步數統計表：

表格	1x24
步數	出現次數
2	1
3	2
4	2
6	2
8	4
12	4
24	8

表格	3x8
步數	出現次數
2	1
3	2
4	2
6	2
8	4
12	4
24	8

表格	2x12
步數	出現次數
2	3
3	2
4	4
6	6
12	8

表格	4x6
步數	出現次數
2	3
3	2
4	4
6	6
12	8

(三)發現

我們可以由上表看出，這四個統計表共有二種情形。分別是 1×24 的表格和 3×8 的表格的統計表相同，而 2×12 的表格則又和 4×6 的表格結果相同。

(四)假設

如果要把 1×24 和 3×8 分做第一類， 2×12 和 4×6 分做第二類，我們討論之後，覺得最有可能的分類方法就是第一類的長和寬是互質的，而第二類的長、寬則沒有互質。

由第一類的結果，我們下了第一個假設。

假設一：總格數相同且長、寬互質的圖形，它們的統計結果是相同的。

我們再由第二類的情形，下了第二個假設。

假設二：總格數相同且長、寬不互質的圖形，它們的統計結果是相同的。

(五)假設一的驗證

假設一的條件是長與寬互質。以下，我們用了許多組總格數相同且長與寬互質的方格圖來做驗證。結果如下：

第一組情形： 3×5 的方格 1×15 的方格

表格	3×5
步數	出現次數
3	2
5	4
15	8

表格	1×15
步數	出現次數
3	2
5	4
15	8

結果：完全相同，假設一成立。

第二組情形：4x5 的方格 1x20 的方格

表格	4x5
步數	出現次數
2	1
4	2
5	4
10	4
20	8

表格	1x20
步數	出現次數
2	1
4	2
5	4
10	4
20	8

結果：完全相同，假設一成立。

第三組情形：3x4 的方格 1x12 的方格

表格	3x4
步數	出現次數
2	1
3	2
4	2
6	2
12	4

表格	1x12
步數	出現次數
2	1
3	2
4	2
6	2
12	4

結果：完全相同，假設一成立。

第四組情形：2x9 的方格 1x18 的方格

表格	2x9
步數	出現次數
2	1
3	2
6	2
9	6
18	6

表格	1x18
步數	出現次數
2	1
3	2
6	2
9	6
18	6

結果：完全相同，假設一成立。

第五組情形：2x5 的方格 1x10 的方格

表格	2x5
步數	出現次數
2	1
5	4
10	4

表格	1x10
步數	出現次數
2	1
5	4
10	4

結果：完全相同，假設一成立。

第六組情形：3x7 的方格 1x21 的方格

表格	3x7
步數	出現次數
3	2
7	6
21	12

表格	1x21
步數	出現次數
3	2
7	6
21	12

結果：完全相同，假設一成立。

除了以上的六種情形之外，我們又做了 2x11 與 1x22；4x7 與 1x28；5x7 與 1x35；7x10 與 2x35 等方格的比較，結果仍然支持假設一的論點。但由於篇幅有限，我們不再贅述！綜合以上的論點，我們可以有很強的信心支持假設一的論點是正確的！

(六) 假設二的驗證

假設二認為總格數相同的情形下，只要長與寬不互質，它們的統計結果應該是相同的。以下，我們使用了總格數都是 16 格的 2x8 和 4x4 方格圖來做驗證。結果如下：

表格	2x8
步數	出現次數
2	3
4	4
8	8

表格	4x4
步數	出現次數
2	3
4	12

結果：完全不同，假設二槓龜。

唉！出師不利！第一個例子便打破了假設二的說法。實在太不幸了！因此，接下來我們必須思考，第二個假設那裡有錯？是根本不存在相等的關係，還是除了不互質的長寬關係外，另外還有其他的限制。

(七) 假設二的修正

4 x 6 和 2 x 12 的統計結果是相同的，但 1x16 和 4x4 這組的統計結果卻是不相同的！因此，我們相信在這兩組範例之中，必然存在有我們所沒有考慮到的因素，接下來，我們把重心放在找出這兩組情形的差異上。

經過一番比對，我們看出這兩組有一個顯然的差異點！那就是 4 x 6 和 2 x 12 這一組範例，兩個方格圖的長與寬有著共同的最大公因數 2；而 2 x 8 和 4 x 4 這兩組情形，長與寬的最大公因數分別為 2 和 4，並不相同。假如結果是因為這個因素所造成的，那麼，我們可以將假設二做如下之修正。

假設二：總格數相同且長、寬之最大公因數相同的方格圖形，它們的統計結果會相同。

我們將原先結果相同的條件由長與寬不互質，縮小到長與寬必須有相同之最大公因數，這個假設是否正確，我們迫不及待地想去驗證看看！

(八) 假設二的再驗證

我們用以下之例子來驗證

第一組情形：6x9 的方格 3x18 的方格（長與寬的最大公因數都是 3）

表格	6x9
步數	出現次數
2	1
3	8
6	8
9	18
18	18

表格	3x18
步數	出現次數
2	1
3	8
6	8
9	18
18	18

結果：完全相同，假設二成立。

第二組情形：12x9 的方格 3x36 的方格（長與寬的最大公因數都是 3）

表格	12x9
步數	出現次數
2	1
3	8
4	2
6	8
9	18
12	16
18	18
36	36

表格	3x36
步數	出現次數
2	1
3	8
4	2
6	8
9	18
12	16
18	18
36	36

結果：完全相同，假設二成立。

第三組情形：2x20 的方格 4x10 的方格（長與寬的最大公因數都是 2）

表格	2x20
步數	出現次數
2	3
4	4
5	4
10	12
20	16

表格	4x10
步數	出現次數
2	3
4	4
5	4
10	12
20	16

結果：完全相同，假設二成立。

第四組情形：9x15 的方格 3x45 的方格（長與寬的最大公因數都是 3）

表格	9x15
步數	出現次數
3	8
5	4
9	18
15	32
45	72

表格	3x45
步數	出現次數
3	8
5	4
9	18
15	32
45	72

結果：完全相同，假設二成立。

除了以上的四種情形之外，我們又做了 6x36 與 12x18；8x80 與 16x40；7x84 與 21x28；10x60 與 20x30 等等許多方格的比較，結果仍然支持假設二的論點。同樣由於篇幅有限，我們不再贅述！綜合以上的結果，我們認為假設二的論點是正確的！

(九) 假設二之反面驗證

假設二已經知道總格數相同且長與寬的最大公因數相同的方格一定會有相同的結果。那我們不禁要反問，假如長與寬的最大公因數不同的情況下，結果是否一定不相同呢？試試看吧！

第一組情形：1x12 的方格 2x6 的方格

表格	1x12
步數	出現次數
2	1
3	2
4	2
6	2
12	4

表格	2x6
步數	出現次數
2	3
3	2
6	6

結果：最大公因數不同的情形，結果也不一樣。

第二組情形：4x8 的方格 2x16 的方格

表格	4x8
步數	出現次數
2	3
4	12
8	16

表格	2x16
步數	出現次數
2	3
4	4
8	8
16	16

結果：最大公因數不同的情形，結果也不一樣。

第三組情形：6x6 的方格 2x18 的方格

表格	6x6
步數	出現次數
2	3
3	8
6	24

表格	2x18
步數	出現次數
2	3
3	2
6	6
9	6
18	18

結果：最大公因數不同的情形，結果也不一樣。

由以上情形我們可以知道，總格數相同的圖形，如果最大公因數相同的話，它們的結果一定相同；反之，如果最大公因數不同的情形，它們的結果也必然不同！

陸、研究結果

經過不斷的驗證，我們得到了以下的一些結果：

- 一、能環繞世界一圈的圖形，它的長和寬一定是“互質”的關係。
- 二、方格圖中任一格所走的步數，就是最下方列的步數和最左邊行步數的最小公倍數。
- 三、總格數相同且長、寬互質的圖形，它們的統計結果是相同的。
- 四、總格數相同且長、寬之最大公因數相同的方格圖形，它們的統計結果也會相同。

柒、討論

研究結果的第二項，方格圖中任一格所走的步數，就是最下方列的步數和最左邊行步數的最小公倍數。那爲什麼這個結果會剛好等於最小公倍數呢？

經過一番討論，我們終於了解最小公倍數的意義何在，我們用以下的例子來說明：

2		a			
◎	6	3	2	3	6

上圖是一個 2×6 的方格，假如我們第一點選擇 a 點，則經過幾步會走回原點呢？

我們看到 a 點的左方行，所標示的數字是 2，代表以相同之規則，垂直方向每隔 2 步就會走回原點一次，而下方列的數字是 3，代表水平方向每隔 3 步就會走回原點一次。

因爲我們所求的步數，就是再次回到原點所需要的步數。我們如果依座標軸的觀念來看，回到原點必須同時滿足兩個條件，那就是垂直方向回到原點，而水平方向也同時回到原點。假如我們走了 s 步第一次回到原點，我們可以知道， s 必然是 2 的倍數，這樣垂直方向才能再次走回原點；我們也可以知道， s 必然是 3 的倍數，這樣水平方向也才能再次走回原點。

綜合這兩項條件， s 既是 2 的倍數，又同時是 3 的倍數， s 不就是 2 和 3 的公倍數嗎！那第一次走回去的步數，當然就是 2 和 3 的最小公倍數了！

捌、結論

從當初去找老師要開始研究環繞世界一大圈的規則，到現在已經過了好幾個月的時間！在這段歷程當中，除了得到上面所述的一些研究結果之外，最重要的收穫是對數學研究方法的體驗。在第一階段中，爲了尋找步數的規則，我們先用列舉法，舉出一些合乎條件的例子，再逐步歸納，縮小研究範圍，縮小研究變因的範圍，最後再藉由假設、驗證及反證的數學方法獲得最後的結論。

另外，這次的研究配合資訊科技的使用，讓電腦程式替我們進行繁瑣的計算，而我們則將所有的精力放在規則之假設及驗證上，實在是方便太多了！

希望下一次大家還能有機會共同來討論研究，我們會永遠記得在畢業前夕，和這麼多夥伴一同努力、共同集思廣益，腦力激盪的這段美好回憶。感謝在過程中指導我們的老師們，謝謝您們！

玖、參考資料及其它

- 一、蘇俊賢、周昀徵、陳柏蓉、蔡明憲、邱桂英、陸庭萱。(民 91)。環遊世界一大圈。《台中縣第四十二屆國民中小學科學展覽會得獎作品》。
([http://science.boe.tcc.edu.tw/menu/42/台中縣第 42 屆科展作品成績一覽表.htm](http://science.boe.tcc.edu.tw/menu/42/台中縣第42屆科展作品成績一覽表.htm))
- 二、國小數學課本(五上)第九冊：康軒文教事業，2002。
- 三、國小數學課本(五下)第十冊：康軒文教事業，2002。

評語

080414 國小組數學科

「繞」的徹底研究

研究者承襲其先前的研究繼續分析推廣，團隊合作精神尚佳，唯報告之呈現說明未能將基本原則說明清楚，若能就先前規則明確敘述，使讀者能明白遊戲規則，則更佳。