

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組數學科

080413

屏東縣竹田鄉西勢國民小學

指導老師姓名

許惠華

郭希得

作者姓名

曾智暉

方正孝

方建蘋

楊舜雯

陳依一

曾睿璇

題目：紙洞乾坤

一、摘要：

這原本是一個科學遊戲，盡量讓紙張伸展開來，卻不會弄破紙，除了發現其中有許多強韌的支撐點外，還利用許多數學規則來解開影響紙張伸展的因素，並發展出估測長度的最佳方法。從遊戲中學習數學，生動有趣。

二、研究動機：

社團活動時，老師拿了一張 A4 影印紙，要我們剪個紙洞，然後將身體穿過，但紙張卻不破掉，我們起初認為這是一個「不可能的任務」，除非練就一身縮骨的「穿紙神功」。但是老師一揮神來之「剪」，裁了幾刀，就可讓兩、三位同學穿過，我們感到有趣和好奇，就找了幾位志同道合的夥伴，展開以下一連串的研究。

三、研究目的：

- (一) 了解「紙張穿洞」遊戲，在操作過程中隱藏的數學規則。
- (二) 探討裁減的長度（長方形大小、相對稱距離邊緣的裁減長度）對紙張伸展長度的影響。
- (三) 探討裁減的刀數對紙張伸展長度的影響。
- (四) 從遊戲中來學習數學，利用系統化方法來找尋規律性，培養解題能力與細心整理、分析資料的能力。

四、研究設備器材：

尺、剪刀、彩色筆、計算機、紀錄紙、A4 影印紙數張等。

五、研究問題：

根據上述的研究目的，我們將研究問題列為以下六大項：

- (一) 思考紙張穿洞的原理。
- (二) 探討裁減的長方形大小，是否會影響紙張伸展的長度。
- (三) 探討裁減的刀數，是否會影響紙張伸展的長度。
- (四) 探討裁減的刀數，是否必須都是奇數。
- (五) 探討相對稱的裁減長度，是否會影響紙張伸展的長度。
- (六) 發展估測長度的最佳方法。

圖(1) 沿著外框裁剪，並不能讓紙張伸展



六、研究過程與方式：

研究（一）思考紙張穿洞的原理。

做法 1、選取 A4 影印紙長 29 cm、寬 21 cm，要裁成紙洞，一般會沿著邊緣裁剪一個最大的長方形（如圖 1），形成一個長方形外框，但這無法讓身體穿過，因此此種方法是行不通的。

做法 2、若要將 A4 影印紙裁剪成長度可伸展的紙條，.可沿著直線來回裁剪，如「蛇」行般，但無法形成一個紙洞（如圖 2），因此也不符合遊戲的規則。

做法 3、觀察老師的裁剪方式，大致是結合做法 1、2 的原理，我們歸納為以下幾點：

(1) 將一張 A4 影印紙，沿著較短的兩邊等齊對摺，然後順著摺痕邊緣剪出一個長方形。

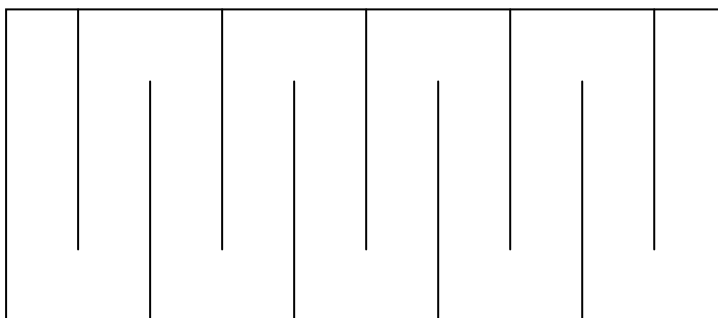
(2) 沿著長方形的邊，來回對稱的裁減數刀，但不可將紙張裁斷。

(3) 裁剪刀數不一，可依紙條寬度及設計紙洞的大小而定，但最後裁減的刀數是奇數（圖 3）。

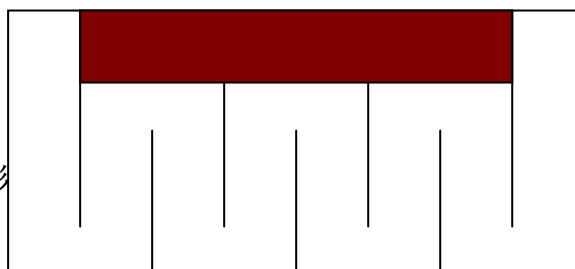
發現：1、把裁好的紙張伸展開來，仔細觀察：好似一連串「人」字型的紙條串在一起（圖 4）。

2、裁剪的紙洞大小，是由人字型紙條組成的數量及裁減長度而定。

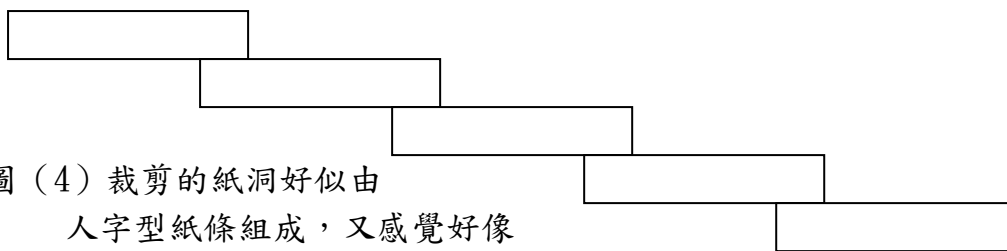
3、我們發現：剪好的紙張攤開來，並不會破裂，感覺好像在拉扯橡皮筋似的，有點彈性，會改變形狀，因此很容易讓一個人的身體穿過。



圖（2）紙張來回裁剪呈「蛇」形，雖可伸展，但無法穿洞



圖（3）結合
作法 1、2 的圖形



圖（4）裁剪的紙洞好似由人字型紙條組成，又感覺好像在拉扯橡皮筋似的

研究（二）裁減的長方形大小，是否會影響紙張伸展的長度。

做法 1：（1）準備 6 張 A4 影印紙，沿著較短的兩邊等齊對摺，順著摺痕邊緣剪出一個長方形，長方形的長固定為 16.8 公分，而寬分別為 0（切開一條線）、1 cm、2 cm、3 cm、4 cm、5 cm，

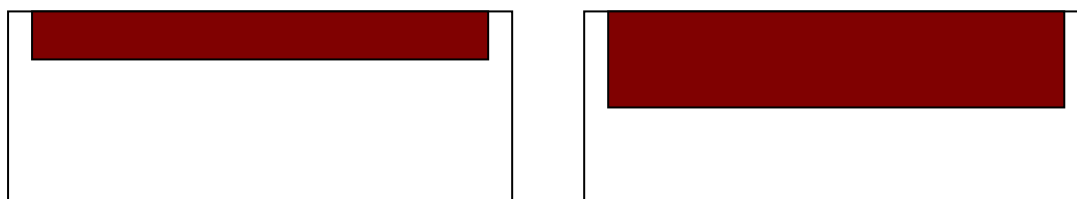
（2）6 張 A4 影印紙裁剪的刀數均為 9 刀，來回裁剪的長度固定距離邊緣 1 公分（如圖 5），統計結果如表（一）：

紙張 \ 裁剪方式	P1	P2	P3	P4	P5	P6
長 (cm)	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm
寬 (cm)	0 (切開一條線)	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
裁剪刀數	9 刀	9 刀	9 刀	9 刀	9 刀	9 刀
紙張伸展長度	262 cm	246 cm	230 cm	214 cm	198 cm	182 cm

表（一）裁減的長方形，寬度大小影響紙張伸展長度的變化情形

（註） $p1 : 13 \text{ cm} \times (9-1) \times 2 + 27 \text{ cm} \times 2 = 262 \text{ cm}$

$p2 : 12 \text{ cm} \times (9-1) \times 2 + 27 \text{ cm} \times 2 = 246 \text{ cm}$ （以下類推）



圖（5）裁剪長方形不同寬度的比較

做法 2：準備 3 張 A4 影印紙，來回裁剪的長度均與做法 1-（2）相同，順著摺痕邊緣剪出的長方形，寬固定為 1 公分，長分別為 4.2 公分、8.4 公分、12.6 公分、16.8 公分，裁剪的刀數依長方形的長，分別為 3 刀、5 刀、7 刀、9 刀（如圖 6），統計結果如表（二）

紙張	P1	P2	P3	P4
裁剪方式				
長 (cm)	4.2 cm	8.4 cm	12.6 cm	16.8 cm
寬 (cm)	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm
裁剪刀數	3 刀	5 刀	7 刀	9 刀
紙張伸展長度	102 cm	150 cm	198 cm	246 cm

表 (二) 裁減的長方形，長度大小影響紙張伸展長度的變化情形

(註) p1 : $12 \text{ cm} \times 4 + 27 \text{ cm} \times 2 = 102$; p2 : $12 \text{ cm} \times 8 + 27 \text{ cm} \times 2 = 150$

p3 : $12 \text{ cm} \times 12 + 27 \text{ cm} \times 2 = 198$; p4 : $12 \text{ cm} \times 16 + 27 \text{ cm} \times 2 = 246 \text{ cm}$

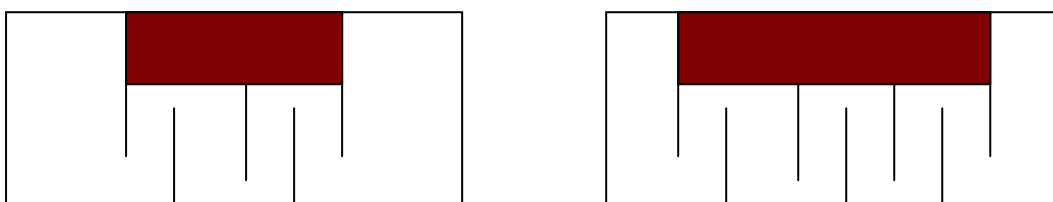


圖 (6) 裁剪長方形不同長度的比較

- 發現：**
- 由表 (一) 可知，長方形寬度每增加 1 cm，紙張伸展長度就縮減 16 cm。推斷：裁減的長方形，寬度愈大，裁剪纸條的長度就愈小，因此紙張伸展長度就變小。
 - 由表 (二) 可知，裁剪的長方形長度，會影響裁剪的刀數，長度越小，裁剪的刀數愈少；反之長度越大，裁剪的刀數愈多。
 - 由作法 2 可知：多裁剪 2 刀，紙條會多出 4 條，長度就多 48 cm ($12 \text{ cm} \times 4$)

研究 (三) 裁剪的刀數，是否會影響紙張伸展的長度。

做法：在研究 (二) 的過程中，我們發現裁剪的刀數，會影響紙張伸展的長度，因此我們進一步探討其中是否有規律可循。準備 6 張 A4 影印紙，操作過程如上述，裁剪長方形的長、寬固定為 16.8 公分 1 公分，裁剪的刀數分別為 3 刀、5 刀、7 刀、9 刀、11 刀、13 刀，來回裁剪的長度固定距離邊緣 1 公分 (如圖 7)，統計結果如表 (三)，

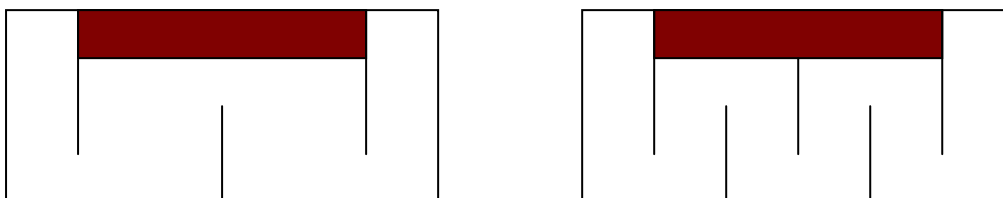
紙張	P1	P2	P3	P4	P5	P6
裁剪方式						
長 (cm)	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm
寬 (cm)	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm
裁剪刀數	3 刀	5 刀	7 刀	9 刀	11 刀	13 刀
紙張伸展長度	102 cm	150 cm	198 cm	246 cm	294 cm	342 cm

表（三）裁減的刀數，影響紙張伸展長度的變化情形

（註）P1：12 cm× (3-1) ×2+27 cm×2=102 cm；

p2：12 cm× (5-1) ×2+27 cm×2=150 cm

p3：12 cm× (7-1) ×2+27 cm×2=198 cm （以下類推）



圖（7）裁剪刀數不同的比較

發現：1、裁減的刀數愈多，裁剪的紙條就愈多，紙張伸展的長度就愈長。

2、由表（三）得知：裁剪刀數每增加 2 刀，紙條會多出 4 條，長度就增加 48 cm (12 cm×4)

3、由裁剪刀數 (a) 推算紙張伸展長度，可歸納公式為：

$$M (\text{紙條長度}) \times (a-1) \times 2 + m (\text{紙張側緣長度}) \times 2$$

研究（四）裁減的刀數，是否必須都是奇數。

做法：在上述研究過程中，我們發現裁剪刀數都是奇數，因此進一步實際操作，以了解其中原理。準備 6 張 A4 影印紙，操作過程如研究(二)，裁剪的長方形長、寬固定為 16.8 公分 1 公分，來回裁剪的長度距離邊緣為 1 公分、裁剪的刀數分別為 2 刀、3 刀、4 刀、5 刀、6 刀、7 刀，(如圖 8)，統計結果如表（四）

紙張 裁剪方式	P1	P2	P3	P4	P5	P6
長 (cm)	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm
寬 (cm)	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm
裁剪刀數	2 刀	3 刀	4 刀	5 刀	6 刀	7 刀
紙張伸展 長度	87.6 cm	102 cm	99 cm	150 cm	147 cm	198 cm
備註	紙洞無法 伸展		紙張側緣 長度無法 伸展		紙張側緣 長度無法 伸展	

表（四）裁減刀數分別為奇數及偶數，其影響紙張伸展長度的變化情形

（註）P1：16.8 cm×2+27 cm×2=87.6 cm；p2：12 cm×4+27 cm×2=102 cm；

p3：12 cm×6+27 cm×1=99 cm；P4：12 cm×8+27 cm×2=150 cm；

P5 : $12\text{ cm}\times 10+27\text{ cm}\times 1=147\text{ cm}$; P6 : $12\text{ cm}\times 12+27\text{ cm}\times 2=198\text{ cm}$;

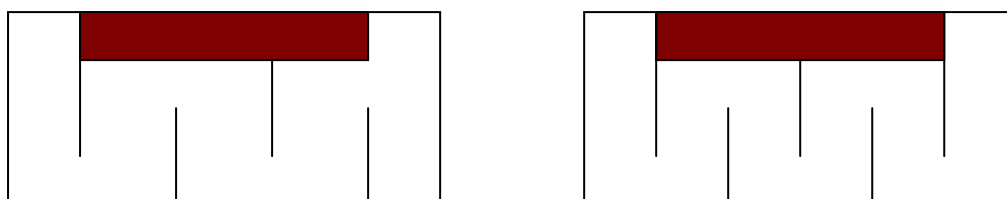


圖 (8) 裁剪刀數奇數與偶數的比較

- 發現：**
- 1、裁減刀數如果為奇數，每增加 2 刀，紙條會增加 4 條，紙張伸展長度就會增加 $4M$ (M 為紙條長度)。
 - 2、裁減刀數如果為偶數，紙張側緣長度就無法伸展，整個長度反而比前一奇數刀來的短。
 - 3、由表 (四) 得知，裁減刀數為奇數刀，至少要 3 刀 (含) 以上。

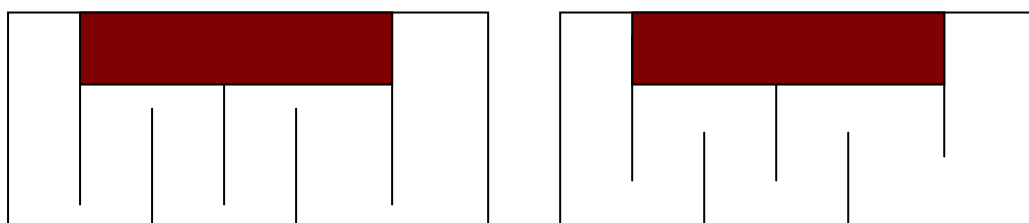
研究 (五) 相對稱的裁減長度，是否會影響紙張伸展的長度。

做法：準備 5 張 A4 影印紙，操作過程如研究 (二)，裁剪的長方形長、寬固定為 16.8 公分 1 公分，裁剪的刀數均為 9 刀，來回裁剪的長度分別距離邊緣 1 公分、2 公分、3 公分、4 公分、5 公分、(如圖 9)，統計結果如表 (五)

紙張	P1	P2	P3	P4	P5
裁剪方式					
長 (cm)	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm	16.8 cm
寬 (cm)	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm	1 cm
裁剪長度 距離邊緣	1 公分	2 公分	3 公分	4 公分	5 公分
紙張伸展 長度	246 cm	214 cm	182 cm	150 cm	118 cm

表 (五) 相對稱的裁減長度，其影響紙張伸展長度的變化情形

(註) $p1 : 12\text{ cm}\times 16+27\text{ cm}\times 2=246\text{ cm}$; $p2 : 10\text{ cm}\times 16+27\text{ cm}\times 2=214\text{ cm}$;
 $p3 : 8\text{ cm}\times 16+27\text{ cm}\times 2=182\text{ cm}$ (以下類推)



(圖 9) 相對稱的裁減長度不同的比較

- 發現：**1、由表（五）可知：距離邊緣多 1 cm，紙條的長度就少 2 cm，如果裁剪 9 刀可剪出 8 段紙條（摺疊即有 16 條），因此整個紙洞就縮短為 32 cm（ $2\text{ cm}\times 16=32\text{ cm}$ ）
- 2、相對稱的裁減長度，如果距離邊緣太長，而無法交會形成「蛇」形，會造成紙洞伸展不開來的現象。

研究（六）發展估測長度的最佳方法。

從上述的研究問題，我們歸納出裁剪紙洞，讓紙張伸展的長度受到裁減的長方形大小、裁減刀數、相對稱的裁減長度等因素的影響。因此要預估長度，我們選擇的最佳策略，即是操縱裁減刀數的變因。

- 步驟：**1、準備 1 張紙（大小不限，但以長方形為宜），沿著較短的兩邊等齊對摺，順著摺痕邊緣剪一個適當長方形（以不裁斷紙張為原則）。
- 2、測量來回對稱裁剪的長度（長度以相等為宜，而且不裁斷紙張），劃上 a （ a 為奇數）刀，會分成 $a-1$ 等份。
- 3、預估所需紙張長度，以裁剪的長度 $(m)\times(a-1)\times 2$ 等份 + 紙張上下邊緣的長度，即可算出紙張伸展的長度。

例如：一張 A4 影印紙，應該裁剪幾刀，才能裁剪出長度 5 公尺的紙洞，而紙張不裁斷？

- 做法：**1、準備 1 張 A4 影印紙（長 29 cm、寬 21 cm），沿著較短的兩邊等齊對摺，順著摺痕邊緣剪出一個長方形，長方形的長、寬固定為 16.8 cm、1 cm，來回裁剪的長度固定距離邊緣 1 公分。
- 2、假設裁剪 n 刀（ n 為奇數），裁剪的紙條為 $(n-1)\times 2$ 段，每一段紙條為 12 cm，上下邊緣為 27 cm，計算過程如下：
- $$12\text{ cm}\times(n-1)\times 2+27\text{ cm}\times 2=500\text{ cm};$$
- $$24n-24+54=500; 24n=470;$$
- $$n=19.6;$$
- 因此裁剪 19 刀，約可得出一個長度 5 公尺的紙洞。

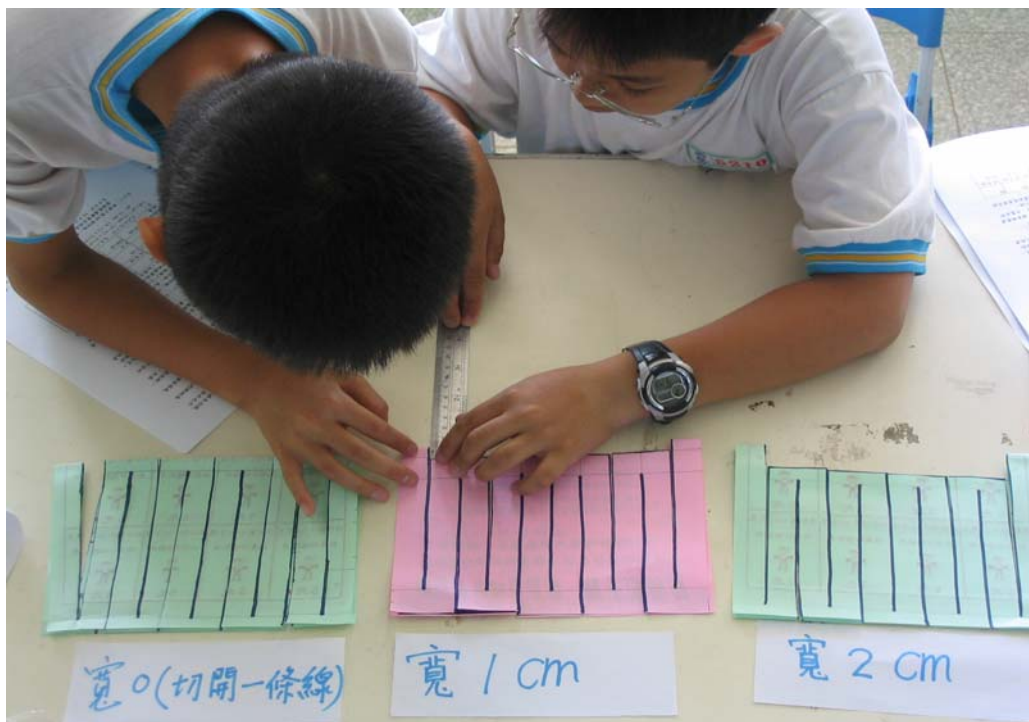
七、結果與討論：

- 1、讓紙洞神奇的無限伸展，並不是幻術，而是利用科學原理，在紙張中間先穿洞，再將周圍紙條切割成蛇行，如此就可發揮穿紙神功的奧妙。
- 2、紙張中間穿洞，可裁剪一個長方形，但會因長方形長度越小，限制了裁剪刀數，紙張伸展的長度就會縮減；而長方形的寬度會影響裁剪紙條的長度就愈小，寬度愈大，紙條長度愈短，紙張伸展長度就變小。
- 3、由研究（三）可得知：裁減刀數愈多，裁剪的紙條就愈多，紙張伸展長度就愈長；並從中歸納出原則：可由裁剪刀數推算紙張伸展長度。
- 4、裁剪刀數必須為奇數，如果是偶數刀，紙張側緣長度就無法伸展，整個長度反而比前一奇數刀來的短。

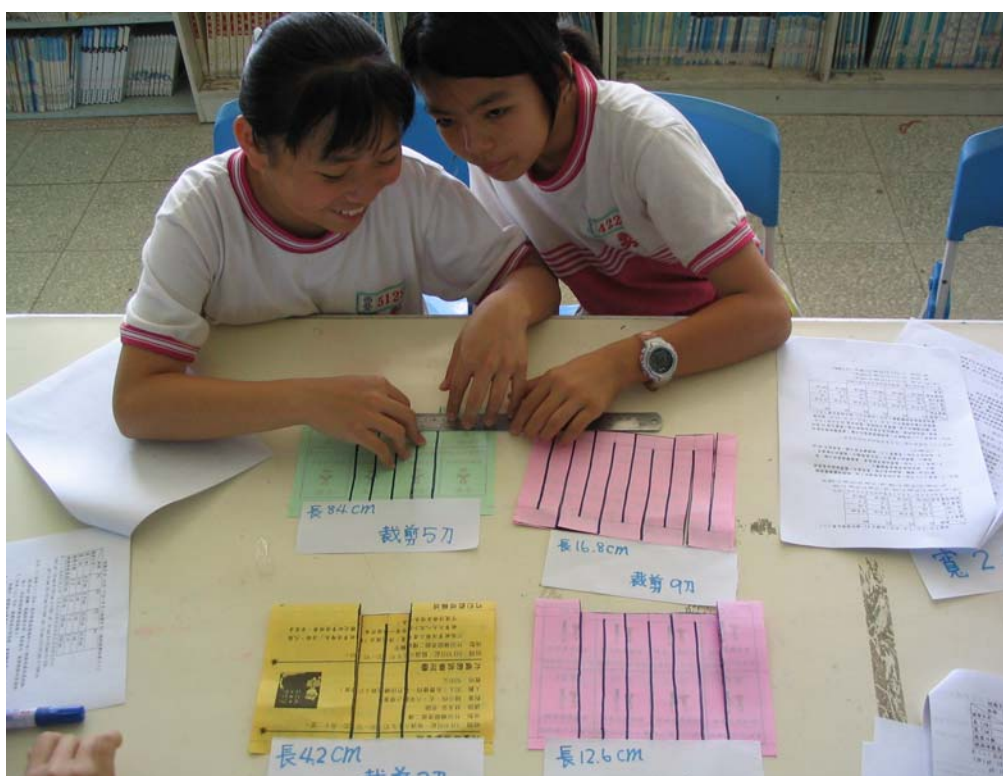
- 5、相對稱裁剪長度，也是影響紙張伸展長度的重要因素。長度距離邊緣愈遠，紙張伸展長度就愈短，但強度愈強不易斷裂，但如果過長無法交會形成「蛇」形，會造成紙洞伸展不開來的現象。
- 6、綜合上述研究，如果要預估紙張伸展長度，可操縱裁減刀數。我們從中歸納出原則，在示範時，可隨時發揮「穿紙神功」，剪剪剪，紙洞大小全在掌握中。
- 7、本研究透過裁剪的長方形大小、裁剪刀數及相對稱裁剪長度的探討，發現紙洞伸展內藏玄機。過程雖然辛苦，但我們從實際操作中找尋預測紙洞長度的規則，是這次學習最主要的收穫。

八、參考資料：

- 1、「遠哲科學教育基金會」編譯（民 86）—Ontario Science Centre 著「科學魔法書：高爾夫球的酒窩（上）」（初版）第 52 頁



照片（一）裁剪長方形不同寬度的比較



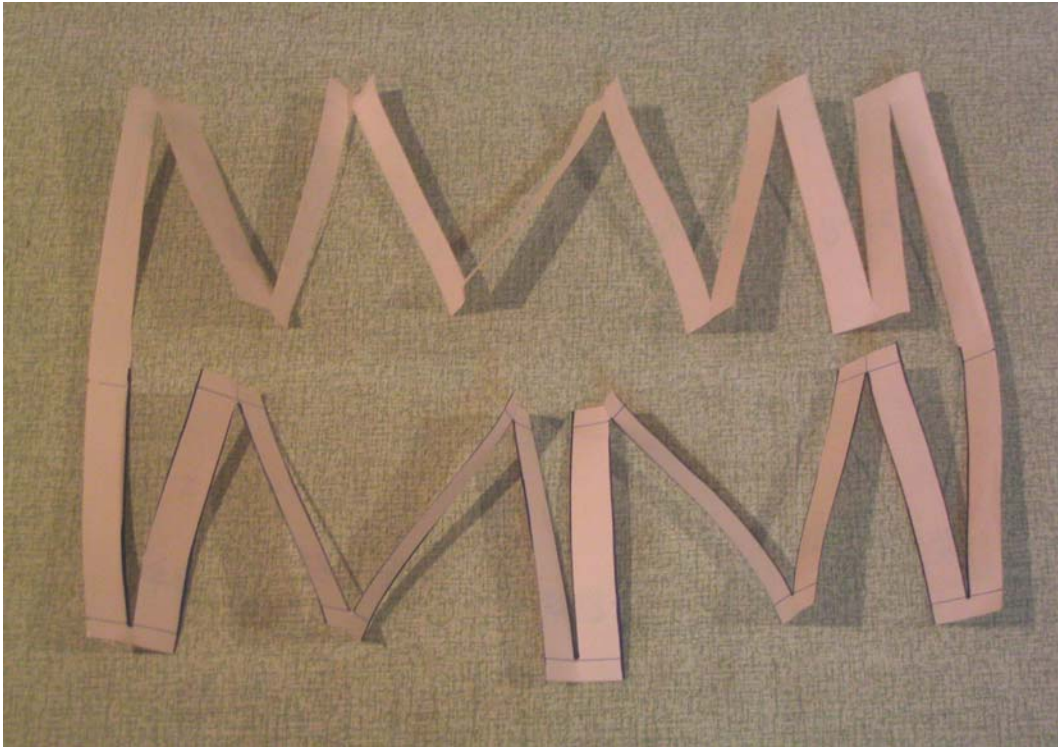
照片（二）裁剪長方形不同長度的比較



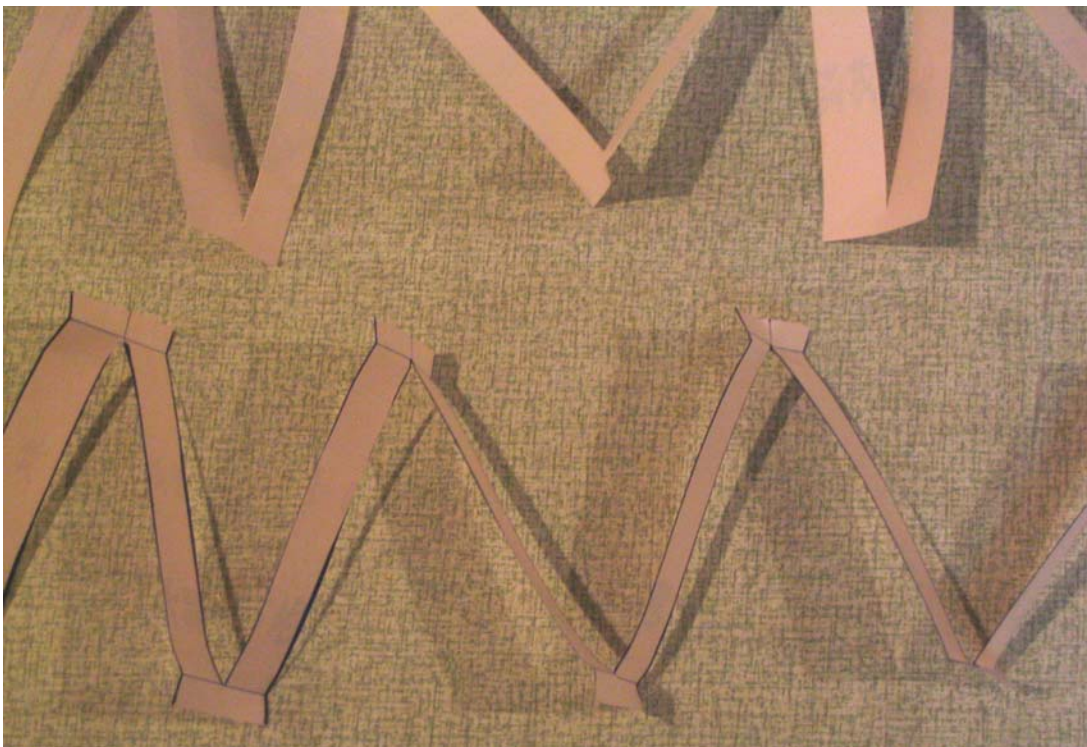
照片（三）裁剪刀數多寡的比較



照片（四）裁剪刀數奇數與偶數的比較



照片（五）裁剪完成的紙條可伸展成一個大紙洞



照片（六）裁剪的紙洞，是由人字型紙條組成，有點彈性，又不
輕易撕裂

評語

080413 國小組數學科 最佳團隊合作獎

紙洞乾坤

題目有趣，概念交待清楚，全體表現合作無間，是一場成功的演出。