

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組數學科

080405

臺南縣鹽水鎮鹽水國民小學

指導老師姓名

何鳳珠

廖文碩

作者姓名

林芳謹

李明娟

楊芷媛

賴韋辰

李柔

柯玠仔

摘要

一張紙四角截去小正方形即可組成一個紙盒，截去的正方形邊長要多長才能使紙盒的容積最大呢？數學課室的這麼一個問題足以讓我們班探討一節課，當一組同學找出一個答案後就會有另一組同學找出比他們更精準的答案，究竟要如何截取絕非胡亂拼湊即能得知的，因此，我們利用逼近法來尋求更接近的答案，同時也深入探究以長方形來折與以正方形來折又會有什麼不同？其中是否有規律存在。

再連結到生活上，我們發現一般常見的紙盒折法及紙箱折法也與此問題有相關，究竟我們平常折的餐桌紙盒容積是否最大呢？若不是，我們能否運用這次的研究所得折出最大容積的紙盒呢？而所用紙張的長寬比例是否影響著折出的容積大小？一連串的問題在我們這次的研究中都得到了滿意的答案，也從中察覺到一些規律，可算收獲不少。

關鍵字詞：容積、比例、逼近法

有“容”乃大 小小紙張立大功

一、研究動機

一條繩子要圍成一個面積最大的四邊形，就以邊長相等的正方形面積最大，今若以一張紙四角截去 4 個小正方形，然後折成一個紙盒，四個角要怎麼截所折成的紙盒容積會最大呢？同樣的一個題目在小學的數學課室中出現，但也同樣出現在高中的數學課本中，望著大姊熟練地操弄著代數 xy 及一些沒見過的符號，我是看得霧煞煞。正巧老師在課室中利用數學的逼近法來拆解平方數時，突然給我一個 idea，是否我們也可以巧用這種逼近法來將這個紙盒問題最大容積給“逼”出來，實力未必有，但是咄咄“逼”人我們是最拿手的，於是在老師的帶領下，我們開始深入思索這相關的問題，包括用正方形紙來折、用長方形紙來折會不會一樣？探究的結果會不會出現規律呢？還有這與我們平常折的紙盒、媽媽的化妝品盒以及平常的大紙箱是否又有相關呢？直的折與橫的折相同呢？哇！一連串的問題就這麼誕生了，等著我們一一去探索。

二、研究目的

1. 正方形紙張，四角要減去多大的正方形所折成的紙盒容積會最大？其與原邊長有何關係？
2. 長方形紙張，四角要減去多大的正方形所折出的容積會最大？其與原長寬有何關係？
3. 探究一般常見折紙盒方法所折出的紙盒容積有多大？其與原紙張邊長有何關係？
4. 長方形厚紙折成有蓋紙箱，如何折容積會最大？其與原長寬比例有何關係？
5. 正方形厚紙折成有蓋紙箱，如何折容積會最大？其與邊長有何關係？

三、實驗研究器材

電算器、電腦、數位相機、A4 影印紙、B4 影印紙、廣告紙、紙箱

四、研究歷程與方法

活動一：正方形紙張，四角要減去多大的正方形所折成的紙盒容積會最大？其與原邊長有何關係？

將一張正方形紙，截去四角（以截正方形為主），組成一個無蓋的盒子，所截的四角越小，所折成的盒子底面積越大，但相對高度就較矮；若截的四角越大，則所折成的盒子底面積越小，但相對高度也越高，那麼，究竟要截去多大的正方形，才能讓所折成的紙盒容積最大呢？

方 法：

1. 以正方形邊長為 10 的倍數(10cm、20cm、30cm、40cm)及非 10 的倍數(15cm、18cm)兩種類型來探討。
2. 採用逼近法來找出大約的最大值。
說明：先以每邊 1cm 倍增方式來剪，找到最大值後再縮小距離以每邊 0.5cm 的差距來剪來找最大值，再依序縮小差距為 0.25cm 及 0.125cm。
3. 觀察兩兩間容積的差距變化，並預測下次可能的落點。
4. 探討當容積最大時，其減去邊長與原正方形邊長有何關係？
5. 探討當容積最大時，其組成盒子的長寬高間的比例關係是否有規律？
6. 在容積最大的情況下，探究原正方形邊長加倍時，其剪去小正方形邊長是否也會隨之加倍？體積也會隨之加倍嗎？
7. 在容積最大的情況下，探究原正方形邊長加倍時，其體積也會隨之加倍嗎？

活動二：長方形紙張，四角要減去多大的正方形所折成的紙盒容積會最大？其與原長寬有何關係？

依照活動一的方式再次探究長方形紙張截四角折成紙盒的情況，看看其規律是否與正方形有相關，亦或是與原長方形的長寬比例有相關？

方 法：

1. 以長方形長寬比例 2 : 1(20*10、40*20、30*15、18*9)及 3 : 2(30*20、18*12)的情況來探討。
2. 採用逼近法來找出最大值。
說明：先以每邊 1cm 倍增方式來剪，找到最大值後再縮小距離以每邊 0.5cm 的差距來剪來找最大值，再依序縮小差距為 0.25cm 及 0.125cm。
3. 觀察兩兩間容積的差距變化，並預測下次可能的落點。
4. 探討當容積最大時，其減去邊長與原長方形的長與寬有何關係？
5. 探討當容積最大時，其組成盒子的長寬高間的比例關係是否有規律？
6. 在容積最大的情況下，探究原長方形長寬加倍時，其剪去小正方形邊長是否也會隨之加倍？
7. 在容積最大的情況下，探究原長方形邊長加倍時，其體積也會隨之加倍嗎？

活動三：探究一般常見折紙盒方法所折出的紙盒容積有多大？其與原紙張邊長有何關係？

當探究前兩個活動後，我們想到平時常常利用廣告紙折成紙盒做為放菜餚殘渣之用，其四角雖未剪去小正方形，但是所折出的盒子卻與我們先前活動所做出的紙盒大同小異，因此，再進一步探究我們一般折出的紙盒是不是最大容積的折法呢？同時思考是否與我們先前得的探討有相關？能否應用之？

方 法：

1. 探究一般紙盒的折法（最常見的）與其使用的紙張形體。
2. 長方形寬度固定，長度增長，其所折出來的無蓋紙盒容積變化如何？
3. 長方形長度固定，寬度增長，其所折出來的無蓋紙盒容積變化如何？
4. 如何折才能折出最大容積的無蓋紙盒呢？

活動四：長方形厚紙折成有蓋紙箱，如何折容積會最大？其與原長寬比例有何關係？

攤開平常的紙箱，我們發現其也不過是一張長方形瓦楞紙，因此，我們利用長方形紙張來模擬紙箱的折法與剪法，探究如何利用一張長方形紙做成一個最大容積的有蓋紙箱。

方 法：

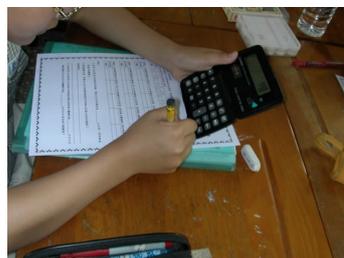
1. 剪開各種紙箱，觀察其平面形體及其折法和剪法。
2. 以長寬比例 2 : 1、3 : 1、4 : 1 的長方形紙來模擬紙箱折法，並採用逼近法調整模擬紙箱的長寬，以探討如何折才能折出最大容積的紙箱。
3. 探討當容積最大時，紙箱的長寬比例是否有規律，與原長方形紙的長寬是否有相關？
4. 縱向折與橫向折是否有差異？

活動五：正方形厚紙折成有蓋紙箱，如何折容積會最大？其與邊長有何關係？

紙箱攤開來的形體大部分是長方形的，那麼，正方形的紙張若折成紙箱又會是怎麼樣的情形呢？長寬比例要如何取決所折出的模擬紙箱容積會最大？是我們接下來所要探討的。

方 法：

1. 以邊長 40*40、60*60、80*80、100*100 的正方形紙來模擬紙箱折法，並採用逼近法調整模擬紙箱的長寬，以探討如何折才能折出最大容積的紙箱。
2. 探討當容積最大時，紙箱的長寬比例是否有規律，與原正方形紙的邊長是否有相關？



五、研究結果：

活動一實驗結果

(一)邊長為 10 的倍數的正方形紙裁剪四角所折出紙盒容積變化情形

<說明 1：【1cm 遞減】表示四角分別減去 1cm、2cm、3cm....以此類推的小正方形>

<說明 2：灰色區塊表示此階段容積最大值>

<說明 3：圈選出來的地方表示我們猜測下次較大值可能落在此範圍處>

原邊長	1cm 遞減	容積	0.5cm 遞減	容積	0.25cm 遞減	容積	0.125cm 遞減	容積
10*10	1	64	1	64	1	64	1.5	73.5
	2	72	1.5	73.5	1.25	70.31	1.625	74.04
	3	48	2	72	1.5	73.5	1.75	73.94
	4	16	2.5	62.5	1.75	73.94	1.875	73.24
			3	48	2	72	2	72
20*20	1	324	2	512	3	588	3	588
	2	512	2.5	562.5	3.25	592.31	3.125	590.82
	3	588	3	588	3.5	591.5	3.25	592.31
	4	572	3.5	591.5	3.75	585.94	3.375	592.52
	5	500	4	572	4	572	3.5	591.5
30*30	3	1728	4	1936	4.5	1984.5	4.75	1996.19
	4	1936	4.5	1984.5	4.75	1996.19	4.875	1999.15
	5	2000	5	2000	5	2000	5	2000
	6	1944	5.5	1985.5	5.25	1996.31	5.125	1999.07
	7	1792	6	1944	5.5	1985.5	5.25	1996.31
40*40	5	4500	6	4704	6	4704	6.5	4738.5
	6	4704	6.5	4738.5	6.25	4726.56	6.625	4740.6
	7	4732	7	4732	6.5	4738.5	6.75	4740.19
	8	4608	7.5	4687.5	6.75	4740.19	6.875	4737.3
	9	4356	8	4608	7	4732	7	4732

(二)邊長為非 10 的倍數的正方形紙裁剪四角所折出紙盒容積變化情形

	1cm 遞減	體積	0.5cm 遞減	體積	0.25cm 遞減	體積	0.125cm 遞減	體積
15*15	1	169	2	242	2	242	2.25	248.06
	2	242	2.5	250	2.25	248.06	2.375	249.52
	3	243	3	243	2.5	250	2.5	250
	4	196	3.5	224	2.75	248.19	2.625	249.54
	5	125	4	196	3	243	2.75	248.19
18*18	1	256	2	392	2.5	422.5	2.75	429.69
	2	392	2.5	422.5	2.75	429.69	2.875	431.43
	3	432	3	432	3	432	3	432
	4	400	3.5	423.5	3.25	429.81	3.125	431.45
	5	320	4	400	3.5	423.5	3.25	429.81

(三)我們以逼近法漸漸縮小差距來模擬裁剪小正方形折成紙盒，所算得的容積，皆符合我們猜測的落點，例如：10*10 的正方形紙，利用 1cm 遞減方式裁剪四角算出的容積，以裁剪 2cm 所折出的紙盒容積最大(72cm³)、裁剪 1cm 次之(64 cm³) 裁剪 3cm 排第三大(48cm³)，由於裁剪 2cm 與 1cm 所算出之容積差距(8cm³) 比 2cm 與 3cm 之差距(24cm³)小，因此我們猜測再以 0.5cm 繼續逼進算出的最大容積應該會落在 2cm 與 1cm 之間，經我們實際計算為裁剪 1.5cm 容積較大，果真符合我們的推測。

(四)由下表綜合列表中，我們發覺，當容積趨於最大時，其減去邊長與原正方形邊長的比例約為 1：6，也就是若剪去約原邊長的 $\frac{1}{6}$ 則所折出的紙盒容積最大。

容量最大的狀況下						
剪去小正方形邊長	1.625	3.375	5	6.625	2.5	3
原正方形邊長	10	20	30	40	15	18
剪去邊長與原邊長比(大約)	1：6.15	1：5.93	1：6	1：6.04	1：6	1：6

由上述的推論，我們反過來檢視原實驗記錄，此 $\frac{1}{6}$ 是否符合各種正方形紙呢？因為邊長 10cm 正方形我們推算出剪去 1.625cm 的小正方形所折出的紙盒容積最大，其比值並非是 $\frac{1}{6}$ (0.1666...)而是約 0.1626 呀，我們猜想也許是我們只裁剪到差距為 0.125cm 之故，因此我們想利用裁剪各組原邊長的 $\frac{1}{6}$ 來計算，看看所得的數值會不會比原先我們計算出來的數值更大，其結果如下表：

容積最大的狀況下						
原正方形邊長	10	20	30	40	15	18
剪去原邊長的 1/6(取小數 4 位)	1.6667	3.3333	5	6.6667	2.5	3
折成紙盒之容積	74.0741	592.5926	2000	4740.7407	250	432
原實際所求得的容積	74.04	592.52	2000	4740.6	250	432

由上表中我們可以發現，若以原正方形邊長的 $\frac{1}{6}$ 來裁剪，所折成的紙盒容積皆比原來所算出來的更大（邊長 30cm、15cm、18cm 的正方形因先前所算出的邊長即為原正方形邊長的 $\frac{1}{6}$ ，因此容積不變）。但是我們思考，確定是如此嗎？當初我們只細切到差距為 0.125cm，若我們再往下切更細（即 0.0625cm 的差距），會不會比裁剪原邊長的 $\frac{1}{6}$ 所成的容積更大呢？因此，我們依照前法再繼續往下探究，所得結果如下表：

容積最大的狀況下						
原正方形邊長	10	20	30	40	15	18
以 0.0625 差距往下裁剪之邊長	1.6875	3.3125	5	6.6875	2.5	3
折成紙盒之容積	74.07	592.5752	2000	4740.706	250	432
以原邊長之 1/6 來裁剪後的容積	74.0741	592.5926	2000	4740.7407	250	432

由上表中，我們即使再細切到 0.0625 所得的容積還是不會比原邊長的 $\frac{1}{6}$ 來得大，甚至，我們還嘗試不同大小的正方形紙，其結果（如下表）還是符合我們的發現：一張任何大小的正方形紙，裁剪其邊長的 $\frac{1}{6}$ ，所折成紙盒的容積為最大，這是一個很棒的發現。

< 下表以邊長的 $\frac{1}{6}$ 為主，分別遞增及遞減 0.125cm 來計算其體積 >

正方形邊長 22cm，其 1/6 約為 3.667cm	邊長減去的值	3.417	3.542	3.667	3.792	3.917
	所得容積	785.936	788.049	788.741	788.057	786.046
原正方形邊長 50cm，其 1/6 約為 8.333cm	邊長減去的值	8.083	8.208	8.333	8.458	8.583
	所得容積	9252.93	9257.68	9259.259	9257.712	9253.088
原正方形邊長 60cm，其 1/6 約為 10cm	邊長減去的值	9.75	9.875	10	10.125	10.25
	所得容積	15992.438	15998.117	16000	15998.133	15992.562

(五) 當組成紙盒容積最大時，其組成紙盒的長寬高間的比例約為 4 : 4 : 1。因為實驗推論出減去原正方形邊長的 $\frac{1}{6}$ 容積為最大，因此，當剪去四角的小正方形後，所組成紙盒的底亦是正方形，長度為原邊長的 $\frac{4}{6}$ ，其紙盒長寬高之間的比為 $\frac{4}{6} : \frac{4}{6} : \frac{1}{6}$ ，即為 4 : 4 : 1。

(六) 綜合上述實驗數據記錄成下表，可以看出當正方形邊長變為原來的 2 倍時，其減去的小正方形邊長也會變成 2 倍，若正方形邊長變為原來的 1.8 倍時，其減去的小正方形邊長也會變成 1.8 倍，所以我們得到一個結論：當原正方形紙邊長加倍時，其剪去小正方形邊長也會跟著加倍才會保持最大容量。

	1.5 倍	1.8 倍	2 倍	2.2 倍	3 倍	4 倍	5 倍	6 倍	
原正方形邊長	10	15	18	20	22	30	40	50	60
減去小正方形邊長	10/6	2.5	3	20/6	22/6	5	40/6	50/6	10

(七)表中我們再加入容積數值發現其也是有規律的，邊長變為 n 倍，則容積變為 n^3 倍，例如邊長為 15 的正方形其邊長是邊長 10 的正方形的 1.5 倍，則容積為 $1.5 \times 1.5 \times 1.5 = 3.375$ (倍)。但在下表的數值中發現有些許的誤差，其原因是在取正方形邊長的 $\frac{1}{6}$ 時已經過四捨五入之故。

	1.5 倍	1.8 倍	2 倍	2.2 倍	3 倍	4 倍	5 倍	6 倍	
原正方形邊長	10	15	18	20	22	30	40	50	60
減去小正方形邊長	10/6	2.5	3	20/6	22/6	5	40/6	50/6	10
容積	74.041	250	432	592.5926	788.741	2000	4740.706	9259.259	16000
	3.37 倍	5.83 倍	8 倍	10.65 倍	27.01 倍	64.03 倍	125.06 倍	216.1 倍	



活動二實驗結果

(一)長寬比例為 2 : 1 的長方形紙裁剪四角所折出紙盒容積變化情形

<說明 1 : 【1cm 遞減】表示四角分別減去 1cm、2cm、3cm....以此類推的小正方形>

<說明 2 : 灰色區塊表示此階段容積最大值>

<說明 3 : 圈選出來的地方表示我們猜測下次較大值可能落在此範圍處>

	1cm 遞減	容積	0.5cm 遞減	容積	0.25cm 遞減	容積	0.125cm 遞減	容積
20*10	1	144	1	144	1.5	178.5	1.75	187.688
	2	192	1.5	178.5	1.75	187.688	1.875	190.43
	3	168	2	192	2	192	2	192
	4	96	2.5	187.5	2.25	191.8125	2.125	192.445
40*20			3	96	2.5	187.5	2.25	191.8125
	1	684	3	1428	3.5	1501.5	4	1536
	2	1152	3.5	1501.5	3.75	1523.438	4.125	1538.883
	3	1428	4	1536	4	1536	4.25	1539.563

有“容”乃大 小小紙張立大功

	4	1536	4.5	1534.5	4.25	1539.563	4.375	1538.086
	5	1500	5	1500	4.5	1534.5	4.5	1534.5
	1	364	2	572	2.5	625	3	648
	2	572	2.5	625	2.75	640.0625	3.125	649.4141
30*15	3	648	3	648	3	648	3.25	649.1875
	4	616	3.5	644	3.25	649.1875	3.375	647.3672
	5	500	4	616	3.5	644	3.5	644
	1	112	1	112	1.5	135	1.75	139.5625
	2	140	1.5	135	1.75	139.5625	1.875	140.2734
18*9	3	108	2	140	2	140	2	140
	4	40	2.5	130	2.25	136.6875	2.125	138.7891
			3	108	2.5	130	2.25	136.6875

(二)長寬比例為 3 : 2 的長方形紙裁剪四角所折出紙盒容積變化情形

	1cm 遞減	容積	0.5cm 遞減	容積	0.25cm 遞減	容積	0.125cm 遞減	容積
	1	160	1	160	2	224	2	224
	2	224	1.5	202.5	2.25	227.8125	2.125	226.4453
18*12	3	216	2	224	2.5	227.5	2.25	227.8125
	4	160	2.5	227.5	2.75	223.4375	2.375	228.1484
	5	80	3	216	3	216	2.5	227.5
	1	504	3	1008	3.5	1046.5	3.75	1054.6875
	2	832	3.5	1046.5	3.75	1054.6875	3.875	1056.1797
30*20	3	1008	4	1056	4	1056	4	1056
	4	1056	4.5	1039.5	4.25	1050.8125	4.125	1054.1953
	5	1000	5	1000	4.5	1039.5	4.25	1050.8125

(三)我們同樣以逼近法漸漸縮小差距來裁剪掉四個角落小正方形折成紙盒，所算得的容積，皆符合我們猜測的落點(見各項圈選出來的區塊)。

(四)我們再將上述的數據資料做進一步的整理成為下表：

容量最大的狀況下

原長方形長與寬	20*10	40*20	30*15	18*9	30*20	18*12
剪去小正方形邊長	2.125	4.25	3.125	1.875	3.875	2.375
組成紙盒的長	15.75	31.5	23.75	14.25	22.25	13.25
組成紙盒的寬	5.75	11.5	8.75	5.25	12.25	7.25
組成紙盒的高	2.125	4.25	3.125	1.875	3.875	2.375
容積	192.445	1539.563	649.414	140.273	1056.18	228.148
剪去邊長與原長度比(大約)	0.106	0.106	0.104	0.104	0.129	0.132
剪去邊長與原寬度比(大約)	0.213	0.213	0.208	0.208	0.194	0.198

由上表中整理出來的數據資料，似乎還看不到較完整的規律性，只能初步看出長寬同比例的長方形紙，其剪去邊長與原長度的比大約相同，如原長寬比例為 2:1 的長方形紙(20*10、40*20)，算出剪去邊長的值與原長比值大約皆在 0.106 時，所得的容積最大。因此，我們想再深入做不同比例的探究，如長寬比例為 3:1、4:1、4:3、5:1、6:1 等，看看我們這樣的推論是否合理？甚至進一步再探究是否真可以找到如先前的正方形一樣有一個明確數值 $\frac{1}{6}$ 的規律。實驗記錄如下：

每一種比例我們都找兩種不同的長方形來實驗

	1cm 遞減	容積	0.5cm 遞減	容積	0.25cm 遞減	容積	0.125cm 遞減	容積
30*10	1	224	1	224	2	312	2	312
	2	312	1.5	283.5	2.25	315.563	2.125	314.633
	3	288	2	312	2.5	312.5	2.25	315.563
	4	176	2.5	312.5	2.75	303.188	2.375	314.836
	5		3	288	3	288	2.5	312.5
45*15	1	559	2	902	3	1053	3.25	1063.5625
	2	902	2.5	1000	3.25	1063.5625	3.375	1065.0234
	3	1053	3	1053	3.5	1064	3.5	1064
	4	1036	3.5	1064	3.75	1054.6875	3.625	1060.539
	5		4	1036	4	1036	3.75	1054.6875
40*10	1	304	1	304	2	432	2	432
	2	432	1.5	388.5	2.25	439.3125	2.125	436.8203
	3	408	2	432	2.5	437.5	2.25	439.3125
	4	256	2.5	437.5	2.75	426.9375	2.375	439.5234
	5		3	408	3	408	2.5	437.5
60*15	1	754	2	1232	3	1458	3.25	1477.938
	2	1232	2.5	1375	3.25	1477.938	3.375	1482.68
	3	1458	3	1458	3.5	1484	3.5	1484
	4	1456	3.5	1484	3.75	1476.563	3.625	1481.945
	5	1250	4	1456	4	1456	3.75	1476.563
60*45	5	8750	7	9982	8	10208	8.25	10227.937
	6	9504	7.5	10125	8.25	10227.937	8.375	10232.679
	7	9982	8	10208	8.5	10234	8.5	10234
	8	10208	8.5	10234	8.75	10226.562	8.625	10231.945
	9	10206	9	10206	9	10206	8.75	10226.562
80*60	8	22528	10	24000	11	24244	11	24244
	9	23436	10.5	24160.5	11.25	24257.812	11.125	24253.195
	10	24000	11	24244	11.5	24253.5	11.25	24257.812
	11	24244	11.5	24253.5	11.75	24231.437	11.375	24257.898
	12	24192	12	24192	12	24192	11.5	24253.5
50*10	1	384	1	384	2	552	2	552
	2	552	1.5	493.5	2.25	563.063	2.125	559.008
	3	528	2	552	2.5	562.5	2.5	563.063
	4	336	2.5	562.5	2.75	550.688	2.375	564.211
100*20			3	528	3	528	2.5	562.5
	1	1764	4	4416	4	4416	4.5	4504.5
	2	3072	4.5	4504.5	4.25	4472.063	4.625	4511.977
	3	3948	5	4500	4.5	4504.5	4.75	4513.688
		4	4416	5.5	4405.5	4.75	4513.688	

有“容”乃大 小小紙張立大功

	5	4500	6	4224	5	4500	5	4500
	6	4224						
	1	464	1	464	2	672	2.25	686.813
	2	672	1.5	598.5	2.25	686.813	2.375	688.898
60*10	3	648	2	672	2.5	687.5	2.5	687.5
	4	416	2.5	687.5	2.75	674.438	2.625	682.66
			3	648	3	648	2.75	674.438
	3	4788	4	5376	4.5	5494.5	4.5	5494.5
	4	5376	4.5	5494.5	4.75	5511.188	4.625	5506.352
120*20	5	5500	5	5500	5	5500	4.75	5511.188
	6	5184	5.5	5395.5	5.25	5461.313	4.875	5509.055
	7	4452	6	5184	5.5	5395.5	5	5500

再一次歸納合併上表如下：

原長寬比例	長方形規格	剪去邊長	紙盒長	紙盒寬	紙盒高	容積	剪去/原長	剪去/原寬
2 : 1	20*10	2.125	15.75	5.75	2.125	192.445	0.106	0.213
2 : 1	40*20	4.25	31.5	11.5	4.25	1539.563	0.106	0.213
2 : 1	30*15	3.125	23.75	8.75	3.125	649.4141	0.104	0.208
2 : 1	18*9	1.875	14.25	5.25	1.875	140.2734	0.104	0.208
3 : 2	18*12	2.375	13.25	7.25	2.375	228.1484	0.132	0.198
3 : 2	30*20	3.875	22.25	12.25	3.875	1056.1797	0.129	0.194
4 : 3	60*45	8.5	43	28	8.5	10234	0.142	0.189
4 : 3	80*60	11.375	57.25	37.25	11.375	24257.898	0.142	0.19
3 : 1	30*10	2.25	25.25	5.25	2.25	315.563	0.075	0.225
3 : 1	45*15	3.375	37.75	7.75	3.375	1065.0234	0.075	0.225
4 : 1	40*10	2.375	35.25	5.25	2.375	439.5234	0.059	0.238
4 : 1	60*15	3.5	53	8	3.5	1484	0.058	0.233
5 : 1	50*10	2.375	45.25	5.25	2.375	564.211	0.048	0.238
5 : 1	100*20	4.75	90.5	10.5	4.75	4513.688	0.048	0.238
6 : 1	60*10	2.375	55.25	5.25	2.375	688.898	0.04	0.238
6 : 1	120*20	4.75	110.5	10.5	4.75	5511.188	0.04	0.238

由上表中我們發現符合我們先前的猜測：長寬同比例的長方形紙，其剪去邊長與原長度的比值大約相同。

同時，我們也檢驗了長寬同比例的長方形紙其所折出的紙盒容積會不會和正方形做出來的結果一樣有關係呢？檢驗結果發現：若長寬皆變為原來的 n 倍，在保持最大容積的狀況下，剪去邊長也會變為原來的 n 倍，且體積也會變為 n^3 倍。例如：長寬比例為 2 : 1 的這四組 20*10、40*20、30*15、18*9，以 20*10 為參照組的話，40*20 長寬皆為 2 倍，剪去小正方形邊長也會變為 2 倍 ($4.25 \div 2.125 = 2$)，且體積變為 $1539.563 \div 192.445 = 8$ (倍)，同 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (倍)；30*15 長寬皆為 1.5 倍，剪去小正方形邊長也會變為 1.5 倍 ($3.125 \div 2.125 = 1.5$) 則體積為 $649.4141 \div 192.445 = 3.375$ (倍)，同 $1.5 \times 1.5 \times 1.5 = 3.375$ (倍)；18*9 長寬

皆為 0.9 倍，則體積為 $140.2734 \div 192.445 \approx 0.729$ (倍)，同 $0.9 \times 0.9 \times 0.9 = 0.729$ (倍)。 < 註：因為我們尚未逼近到真正的最大值，所以數據有一些誤差，無法剛好在 n 倍及 n^3 倍，但是可以看出是很接近的，且可以由活動一正方形所做出的結論來印證 >

但是在原長方形紙長寬比例不同的情況下，我們無法推出一個固定比值來符合各種比例的長方形，只能粗淺的看出：當原長方形長寬比例愈接近 1：1 的正方形時（如比例為 4：3 較比例為 3：2 及 2：1 更接近正方形），則其剪去四角邊長和原長度的比值愈接近 $\frac{1}{6}$ (1.6666)；反之，當原長方形長寬比例差距越大時，其剪去四角邊長和原長度的比值趨於更小了（以長寬比為 6：1 為例，其求出的剪去四角邊長和原長度的比值是 0.04 左右，接近原長度的 $\frac{1}{20}$ ）。

再則，我們所求出的比值是經過四捨五入的，多少都有些許誤差，因此我們想：既然長寬同比例的長方形紙，其剪去邊長與原長度的比值大約相同。那麼，我們是否就可以精確地求出各種比例的紙張其四角各剪去多少邊長的正方形所組成的容積會最大，然後再由這精確的值去推估其它等比例而不同大小的長方形，然而，我們應該先找大尺寸的精確值來推估小尺寸紙張，還是先找小尺寸的精確值來推估大尺寸紙張呢？或是兩種推法無差異？因此，我們在此活動中延伸了一個問題：



【延伸問題】

在等比例但不同大小的紙張中，我們應由大紙張所推得的精確值來推得小紙張該剪去多長？還是由小紙張所推得的精確值來推得大紙張該剪去多長？

方法：< 以長寬比例為 2：1 的長方形來實驗之 >

- (1) 由長 18cm 寬 9cm 的長方形紙利用逼近法遞減至 0.0625cm，找到較精準的數值，再依此數值來推其它同比例較大的長方形。
- (2) 由長 100cm 寬 50cm 的長方形紙利用逼近法遞減至 0.0625cm，找到較精準的數值，再依此數值來推其它同比例較小的長方形。
- (3) 比較兩種方法之差異

實驗結果：

(1)長 18cm*寬 9cm 的長方形，四角剪去多少其容積會最大？

1cm 遞減	容積	0.5cm 遞減	容積	0.25cm 遞減	容積	0.125cm 遞減	容積	0.0625cm 遞減	容積
1	112	1	112	1.5	135	1.75	139.5625	1.75	139.5625
2	140	1.5	135	1.75	139.5625	1.875	140.2734	1.8125	140.0439
3	108	2	140	2	140	2	140	1.875	140.2734
4	40	2.5	130	2.25	136.6875	2.125	138.7891	1.9375	140.257
		3	108	2.5	30	2.25	136.6875	2	140

由實驗中所推得的數據是剪去邊長 1.875cm 的小正方形，其所折成的紙盒容積最大，接著再以此數據做為參照值，依邊長的倍數關係來推得同比例的長方形所應剪去的邊長大小，結果如下：

【以 18*9 的長方形紙，四角剪去 1.875cm 的小正方形為參照值】

長寬規格	擴大倍數	推得剪去邊長	所得容積	原實驗推得的值	原推得容積
20*10	1.111 倍	2.083	192.4183	2.125	192.4453
30*15	1.667 倍	3.126	649.4187	3.125	649.4141
40*20	2.222 倍	4.167	1539.3545	4.25	1539.5625
100*50	5.556 倍	10.417	24052.389	10.625	24055.664

(2)長 100cm*寬 50cm 的長方形，四角剪去多少其容積會最大？

1cm 遞減	容積	0.5cm 遞減	容積	0.25cm 遞減	容積	0.125cm 遞減	容積	0.0625cm 遞減	容積
10	24000	10	24000	10	24000	10.25	24038.813	10.5	24055.5
11	24024	10.5	24055.5	10.25	24038.813	10.375	24049.898	10.5625	24056.258
12	23712	11	24024	10.5	24055.5	10.5	24055.5	10.625	24055.664
13	23088	11.5	23908.5	10.75	24050.438	10.625	24055.664	10.6875	24053.721
14	22176	2	23712	11	23908.5	10.75	24050.438	10.75	24050.438

由實驗中所推得的數據是剪去邊長 10.5625cm 的小正方形，其所折成的紙盒容積最大，接著再以此數據做為參照值，再依邊長的倍數關係來推得同比例的長方形所應剪去的邊長大小。

【以 100*50 的長方形紙，四角剪去 10.5625cm 的小正方形為參照值】

長寬規格	縮小倍數	推得剪去邊長	所得容積	原實驗推得的值	原推得容積
18*9	0.18 倍	1.9013	140.2961	1.875	140.2734
20*10	0.2 倍	2.1125	192.4501	2.125	192.4453
30*15	0.3 倍	3.1688	649.519	3.125	649.4141
40*20	0.4 倍	4.225	1539.6005	4.25	1539.5625

(3)由上述實驗結果(1)(2)中可以看出,由大紙張所推得的精確值來推估等比例的小紙張該剪去多長?所得的容積比由小紙張所推得的精確值來推得大紙張所得的容積還大,而且比原先我們推得的容積數據資料又更大了,因此我們得到結論:等比例的紙張中,由大紙張所推得的數據來推估小紙張所得的值會更精準。

基於此結論,我們將活動二的資料重新整理,以各比例中較大邊長紙張來求得較精確的“剪去邊長值”(再多往下逼進一次),再利用此剪去邊長值依各紙張與參照紙張的倍數關係來求得其它等比例的小紙張之“剪去邊長值”,並求出容積比較之,結果如下:

長寬比例	長寬規格	0.25cm 遞減	容積	0.125cm 遞減	容積	0.0625cm 遞減	容積
3 : 1	45*15	3	1053	3.25	1063.5625	3.25	1063.5625
		3.25	1063.5625	3.375	1065.0234	3.3125	1064.6064
		3.5	1064	3.5	1064	3.375	1065.0234
		3.75	1054.6875	3.625	1060.539	3.4375	1064.8193
		4	1036	3.75	1054.6875	3.5	1064
4 : 1	60*15	3	1458	3.25	1477.938	3.375	1482.6796
		3.25	1477.938	3.375	1482.68	3.4375	1483.7646
		3.5	1484	3.5	1484	3.5	1484
		3.75	1476.563	3.625	1481.945	3.5625	1483.3915
		4	1456	3.75	1476.563	3.625	1481.945
3 : 2	30*20	3.5	1046.5	3.75	1054.6875	3.75	1054.6875
		3.75	1054.6875	3.875	1056.1797	3.8125	1055.6454
		4	1056	4	1056	3.875	1056.1797
		4.25	1050.8125	4.125	1054.1953	3.9375	1056.2958
		4.5	1039.5	4.25	1050.8125	4	1056
4 : 3	80*60	11	24244	11	24244	11.25	24257.812
		11.25	24257.812	11.125	24253.195	11.3125	24258.418
		11.5	24253.5	11.25	24257.812	11.375	24257.898
		11.75	24231.437	11.375	24257.898	11.4375	24256.256
		12	24192	11.5	24253.5	11.5	24253.5
5 : 1	100*20	4	4416	4.5	4504.5	4.625	4504.5
		4.25	4472.063	4.625	4511.977	4.6875	4513.5497
		4.5	4504.5	4.75	4513.688	4.75	4513.688
		4.75	4513.688	4.875	4509.68	4.8125	4512.3954
		5	4500	5	4500	4.875	4509.68
6 : 1	120*20	4.5	5494.5	4.5	5494.5	4.625	5506.352
		4.75	5511.188	4.625	5506.352	4.6875	5509.6434
		5	5500	4.75	5511.188	4.75	5511.188
		5.25	5461.313	4.875	5509.055	4.8125	5510.9891
		5.5	5395.5	5	5500	4.875	5509.055

再由上表中較精確的值來推估其它等比例的數據，記錄如下：

長寬比例	長寬規格	縮小倍數	推得剪去邊長	剪去邊長/原長	所得容積	原實驗推得值	原推得容積	對照的精確值
2 : 1	20*10	0.2	2.1125	0.106	192.4501	2.125	192.445	100*50(剪 10.5625)
3 : 1	30*10	0.667	2.251	0.075	315.5632	2.25	315.5625	45*15(剪 3.375)
4 : 1	40*10	0.667	2.3345	0.058	439.702	2.375	439.523	60*15(剪 3.5)
5 : 1	50*10	0.5	2.375	0.0475	564.2109	2.375	564.2109	100*20(剪 4.75)
6 : 1	60*10	0.5	2.375	0.0396	688.8984	2.625	682.664	120*20(剪 4.75)
3 : 2	18*12	0.6	2.3625	0.131	228.1599	2.375	228.1484	30*20(剪 3.9375)
4 : 3	60*45	0.75	8.484	0.141	10234.02	8.5	10234	80*60(剪 11.3125)

由上述表中如何剪才能得到最大容積，我們得到以下幾點結論：

1. 同比例尺寸不同大小的長方形紙只要算出其中一個來當參照值，其餘的就可以依其邊長是此參照值的多少倍直接求得需剪去的邊長值。
2. 由尺寸較大的來推得尺寸較小的，所得的數據會更接近最大容積。
3. 當參照值的數值最好能取精確些，以減少放大縮小後的誤差。
4. 綜觀長方形的剪法與正方形剪法作比較，正方形是剪其邊長的 $\frac{1}{6}$ (約 0.6667 倍)，而長方形剪的邊長皆會小於原長度的 $\frac{1}{6}$ 。
5. 長方形剪法大致分成 2 種：
 - 1 長與寬的比值介在 1 ~ 2 之間者：大約取原長度的 0.1~0.15 倍即可
 - 2 長與寬的比值超過 2 倍者：取的長度大約比原長度的 0.1 小即可，且長寬差距愈大，取的倍數值愈小。

活動三實驗結果

(一)一般常見的紙盒折法如下圖，所折出的紙盒形體底部皆為正方形，且大多使用長方形紙張來折，因為當長寬比例為 1 : 1 時(即為正方形)，在折的過程中無法扣住高度形成一個紙盒；當長寬比例為 2 : 1 時，內折扣住的部分過長也是無法塞入夾縫中，也是很恰當，仔細觀察內折扣住的部分相當於是長方形紙中長邊比寬邊多出來的部分，長度各(指內折扣住的部分)約以不超過寬的 $\frac{1}{4}$ 為原則，因此，推測適合折紙盒的長方形紙長寬比例需大於 1 : 1，但以不超過 6 : 4 為原則。



一般紙盒
折法示範

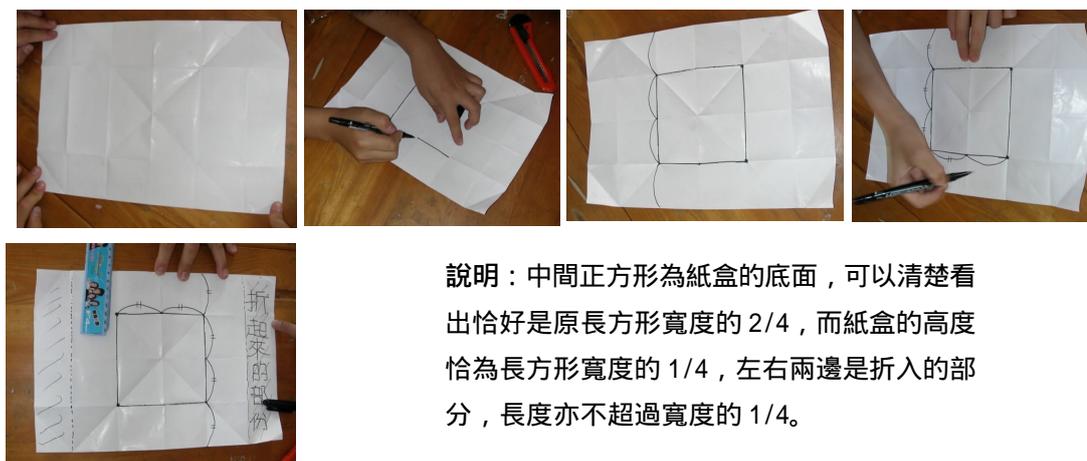


此部分若過長，則無法塞入夾縫中，若過短甚至沒有此多餘的部分，則無法扣住四邊，導致盒子無法成形。



當我們將折好的紙盒攤開來看發覺，所折出的紙盒其高度剛好是原長方形紙寬度的 $\frac{1}{4}$ ，而紙盒底面積的邊長為長方形寬度的 $\frac{1}{2}$ 。

紙盒的展開圖



說明：中間正方形為紙盒的底面，可以清楚看出恰好是原長方形寬度的 $\frac{2}{4}$ ，而紙盒的高度恰為長方形寬度的 $\frac{1}{4}$ ，左右兩邊是折入的部分，長度亦不超過寬度的 $\frac{1}{4}$ 。

因此，若我們知道此長方形紙張的長與寬時，我們不難算出依其折法所折出來的紙盒之容積。例如：

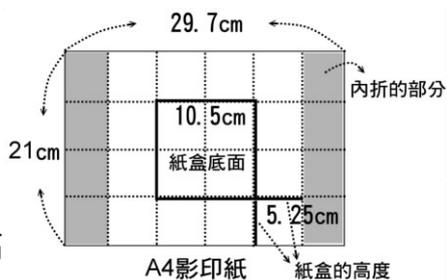
1. A4 影印紙折成紙盒。

規格：29.7cm(長)×21cm(寬)

寬的 $\frac{1}{2}$ 為 $21 \times \frac{1}{2} = 10.5$底面邊長

寬的 $\frac{1}{4}$ 為 $21 \times \frac{1}{4} = 5.25$紙盒的高

折成紙盒容積為 $10.5 \times 10.5 \times 5.25 = 578.8125$



有“容”乃大 小小紙張立大功

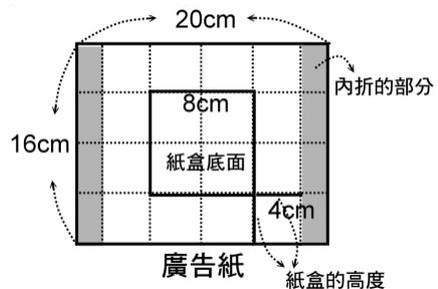
2. 廣告紙折成紙盒。

規格：20cm(長) × 16cm(寬)

寬的 $\frac{1}{2}$ 為 $16 \times \frac{1}{2} = 8$底面邊長

寬的 $\frac{1}{4}$ 為 $16 \times \frac{1}{4} = 4$紙盒的高

折成紙盒容積為 $8 \times 8 \times 4 = 256$



綜合上述結果，我們將求紙盒容積之算式做歸納整理可以得到：

紙盒容積 = 底面邊長 × 底面邊長 × 高

$$= (\text{寬} \times \frac{1}{2}) \times (\text{寬} \times \frac{1}{2}) \times (\text{寬} \times \frac{1}{4})$$

$$= \text{寬} \times \text{寬} \times \text{寬} \times \frac{1}{16}$$

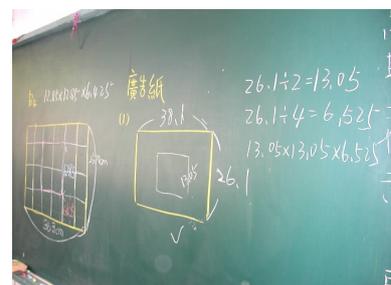
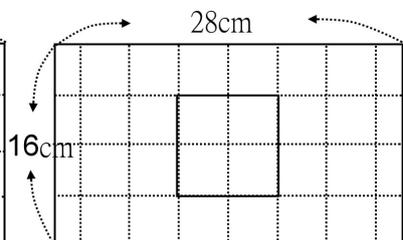
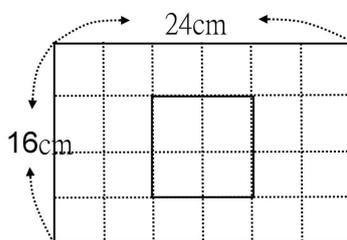
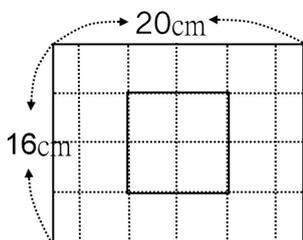
代入上面所舉的兩個例子，所求得的容積與我們先前推算的完全符合。

1. A4 影印紙折成的紙盒容積： $21 \times 21 \times 21 \times \frac{1}{16} = 578.8125$

2. 廣告紙折成的紙盒容積： $16 \times 16 \times 16 \times \frac{1}{16} = 256$

(二) 當長方形紙張的寬度固定，變化其長度，則所折出來的無蓋紙盒容積都相同，因為折出的紙盒容積只會與寬度有關係。

長方形紙規格	20cm × 16cm	24cm × 16cm	28cm × 16cm
折成的紙盒長寬高	8cm × 8cm × 4cm	8cm × 8cm × 4cm	8cm × 8cm × 4cm
容積	256cm ³	256cm ³	256cm ³

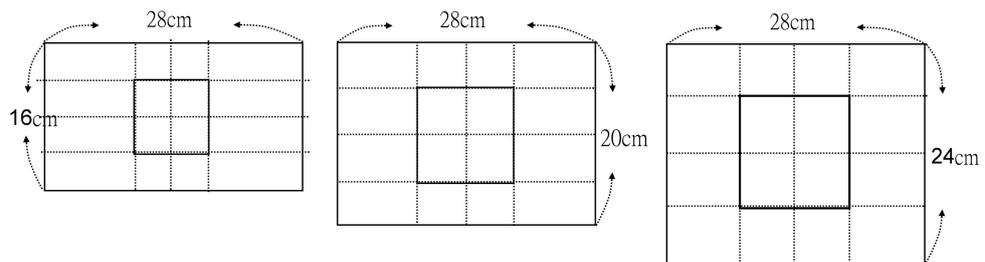


(三)當長方形紙張的長度固定，變化其寬度，則所折出來的無蓋紙盒容積就不會相同了，因為折出的紙盒容積與寬度有關係，同時，由下表我們也發現：當紙張的寬度變 n 倍時，則所折出紙盒的容積將會變成 n^3 倍。

長方形紙種類	甲	乙	丙
長方形紙規格	28cm × 16cm	28cm × 20cm	28cm × 24cm
折成的紙盒長寬高	8cm × 8cm × 4cm	10cm × 10cm × 5cm	12cm × 12cm × 6cm
容積	256cm ³	500cm ³	864cm ³

乙的寬度是甲的 $20 \div 16 = \frac{5}{4}$ 倍

乙的容積是甲的 $500 \div 256 = \frac{500}{256} = \frac{125}{64} = \frac{5 \times 5 \times 5}{4 \times 4 \times 4} = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4}$ 倍



(四)若運用活動一及活動二得到的結果，我們發現，若想要將一張長方形紙在不剪去四角的情況下折成容積為最大的紙盒，也是不難做到的，因為其折成紙盒後的高度相當於是活動一四角剪去的小正方形邊長，若要讓折出來的紙盒容積為最大，那麼高度則以寬度的 $\frac{1}{6}$ 為主即可（因為折出來的紙盒其底面是呈正方形的，所以與活動一是相同原理的）。如以下例子。

紙張種類	A4	B4	廣告宣傳單
紙張規格	29.7cm × 21cm	36.4cm × 25.7cm	20cm × 16cm
寬度的 $\frac{1}{6}$	3.5cm	4.2833cm	2.6667cm
紙盒底面邊長(高 × 4)	3.5cm × 4	4.2833cm × 4	2.6667cm × 4
容積	686cm ³	1257.3478cm ³	303.4188cm ³

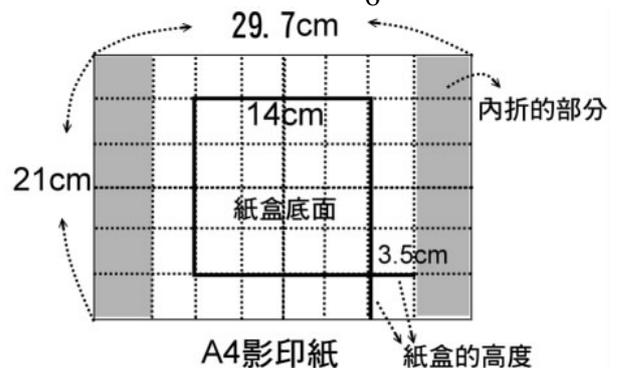
我們比較前面活動三-(1)中，可以發現，我們一般折紙盒的方法所折出的紙盒是取寬度的 $\frac{1}{4}$ 來折，所算出的容積還是無法比得上以寬度的 $\frac{1}{6}$ 來折所得的容積來得大。

規格：29.7cm(長)×21cm(寬)

寬的 $\frac{1}{2}$ 為 $21 \times \frac{1}{2} = 10.5$底面邊長

寬的 $\frac{1}{4}$ 為 $21 \times \frac{1}{4} = 5.25$紙盒的高

折成紙盒容積為 $10.5 \times 10.5 \times 5.25 = 578.8125$



(五)當用長方紙以一般折紙盒的方式折出的紙盒容積，我們也可以歸納出以下公式來運算：

$$\begin{aligned}\text{紙盒容積} &= \text{底面邊長} \times \text{底面邊長} \times \text{高} \\ &= \left(\text{寬} \times \frac{4}{6}\right) \times \left(\text{寬} \times \frac{4}{6}\right) \times \left(\text{寬} \times \frac{1}{6}\right) \\ &= \text{寬} \times \text{寬} \times \text{寬} \times \frac{4 \times 4 \times 1}{6 \times 6 \times 6} \\ &= \text{寬} \times \text{寬} \times \text{寬} \times \frac{2}{3 \times 3 \times 3} \\ &= \text{寬} \times \text{寬} \times \text{寬} \times \frac{2}{27}\end{aligned}$$

代入上面所舉的兩個例子，所求得的容積與我們先前推算的大致符合，但在 B4 影印紙及廣告宣傳單有 0.01 ~ 0.03 些許的差距是因為我們取寬度的 $\frac{1}{6}$ 時，已經過四捨五入之故。

1. A4 影印紙折成的紙盒容積：(我們的推算的最大容積是 686)

$$21 \times 21 \times 21 \times \frac{2}{27} = 686$$

2. B4 影印紙折成的紙盒容積：(我們的推算的最大容積是 1257.3478)

$$25.7 \times 25.7 \times 25.7 \times \frac{2}{27} = 1257.3772$$

3. 廣告宣傳單折成的紙盒容積：(我們的推算的最大容積是 303.4188)

$$16 \times 16 \times 16 \times \frac{2}{27} = 303.4074$$

活動四實驗結果

(一)將紙箱攤開，可以發現其形體是一個長方形，長寬比例差距挺大的，其和一般課室中的長方體展開圖有些不同(如圖)，紙箱的設計很簡單，只要將長方形瓦楞紙劃開六處即可折成一個紙箱，所特別的地方是，在折疊的地方只要有一組平行面接觸到就行了，另一組平行面不需接觸到，而且劃開的長度以組成後形體寬度的一半即可。

因此，我們開始思考，拿一張長方形紙模擬紙箱折法與剪法，折出的長寬比例大概多少所得的容積會最大呢？

有“容”乃大 小小紙張立大功

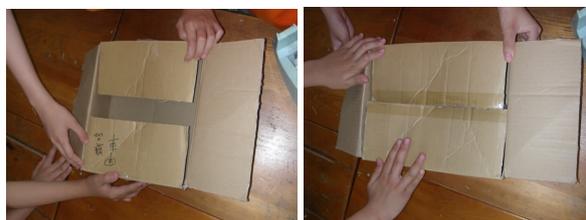
紙箱展開圖



劃開的長度取決於能否有效蓋住紙箱。

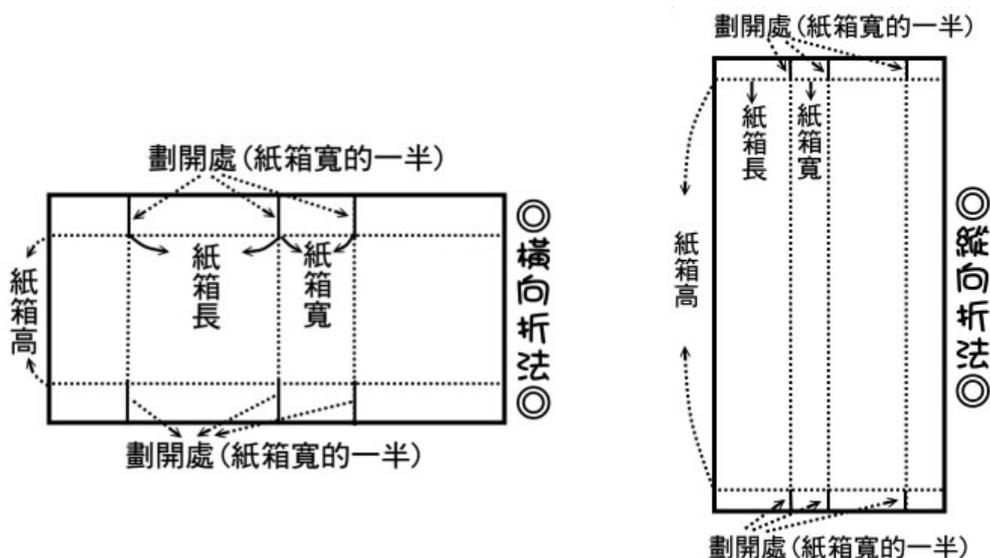


劃開的長度剛好是紙箱寬度的一半即可。



劃開的長度剛好是紙箱寬度的一半即可。

(二)以長寬比例 2 : 1(40cm*20cm)、3 : 1(60cm*20cm)、4 : 1(80cm*20cm)的長方形紙，利用逼近法調整模擬紙箱的長寬，找出最大容積的折法，同時利用橫向折法(以短邊做為紙箱的高)與縱向折法(以長邊做為紙箱的高)分別記錄如下：



< 先以長寬比 1 : 1 開始，再將寬邊逐一遞減 >

長方形規格	1cm 遞減		0.5cm 遞減		0.25cm 遞減		
	長*寬*高	體積	長*寬*高	體積	長*寬*高	體積	
橫向折法	10*10*10	1000	12*8*12	1152	13*7*13	1183	
	11*9*11	1089	12.5*7.5*12.5	1171.875	13.25*6.75*13.25	1185.047	
	40*20	12*8*12	1152	13*7*13	1183	13.5*6.5*13.5	1184.625
		13*7*13	1183	13.5*6.5*13.5	1184.625	13.75*6.25*13.75	1181.6406
		14*6*14	1176	14*6*14	1176	14*6*14	1176
		40*20	5*5*35	875	5*5*35	875	5*5*35

有“容”乃大 小小紙張立大功

縱向折法		5*5*35	875	5*5*35	875	5*5*35	875	
		6*3*36	864	5.5*4.5*35.5	878.625	5.25*4.75*35.25	879.625	
		8*2*38	608			5.75*4.25*36.75	873.641	
		9*1*39	351			6*4*36	864	
		15*15*5	1125	21*9*11	2079	21.5*8.5*11.5	2101.625	
		16*14*6	1344	21.5*8.5*11.5	2101.625	21.75*8.25*11.75	2108.391	
		17*13*7	1547	22*8*12	2112	22*8*12	2112	
		18*12*8	1728	22.5*7.5*12.5	2109.375	22.25*7.75*12.25	2112.3593	
	橫向折法	60*20	19*11*9	1881	23*7*13	2093	22.5*7.5*12.5	2109.375
			20*10*10	2000				
		21*9*11	2079					
		22*8*12	2112					
		23*7*13	2093					
縱向折法	60*20	5*5*55	1375	5*5*55	1375	5*5*55	1375	
		6*4*56	1344	5.5*4.5*55.5	1373.625	5.25*4.75*55.25	1377.797	
		7*3*57	1197	6*4*56	1344	5.5*4.5*55.5	1373.625	
		8*2*58	928					
		9*1*59	531					
橫向折法	80*20	30*10*10	3000	31*9*11	3069	31*9*11	3069	
		31*9*11	3069	31.5*8.5*11.5	3079.125	31.25*8.75*11.25	3076.172	
		32*8*12	3072	32*8*12	3072	31.5*8.5*11.5	3079.125	
		33*7*13	3003	32.5*7.5*12.5	3046.875	31.75*8.25*11.75	3077.766	
		34*6*14	2856	33*7*13	3003	32*8*12	3072	
縱向折法	80*20	5*5*75	1875	5*5*75	1875	5*5*75	1875	
		6*4*76	1824	5.5*4.5*75.5	1868.675	5.25*4.75*75.25	1876.547	
		7*3*77	1617	6*4*76	1824	5.5*4.5*75.5	1868.675	
		8*2*78	1248					
		9*1*79	711					

將上述表格再次綜合整理形成下表：

紙張規格	折成有蓋紙箱後最大容積				紙箱之 長寬比值	原長方形長 寬比值
	長	寬	高	容積		
40×20	13.25	6.75	13.25	1185.047	1.963	2
60×20	22.25	7.75	12.25	2112.3593	2.871	3
80×20	31.5	8.5	11.5	3079.125	3.704	4
40×20	5.25	4.75	35.25	879.047	1.105	2
60×20	5.25	4.75	55.25	1377.797	1.105	3
80×20	5.5	4.5	75.5	1868.625	1.222	4

(三)由上表我們可以清楚看到，採用橫向折法所得的容積遠較縱向折法大，而縱向折法（以原長方形紙的長邊為高）則以長寬比例接近 1：1 的方式來折，所得的容積會較大，但橫向折法（即以原長方形紙的寬邊為高）若以長寬比例 1：1 的方式來折（即折成上下底面皆為正方形），所得的容積並不大，因此橫向折法

與縱向折法是有所不同的。另外從上表紙箱長寬比值中我們可以看出，所折成的紙箱長寬比值與原長方形長寬比值相當接近（比原長方形長寬比值小一些些），也就是說，若一張長方形紙要折成紙箱，則先算出長寬比值，再以接近此值的數據作為取紙箱長度與寬度的標準，為了驗證我們的推論是否合理，因此我們再利用幾組不同長寬比例的紙張來實驗：

< 以下我們將以橫向折法來探究，因為縱向折法容積較小所以不再探究 >

1. 長方形紙 200 × 20，長寬比值為 10

橫向折法 採長寬比值 9.5（估測值）實驗之

	$100 \div (1+9.5) \times 9.5$ 90.48.....長	$100 \div (1+9.5)$ 9.52.....寬			
	長 × 寬 × 高	容積	長寬比值	原長方形長寬比值	
由推論組長度遞增 0.25	90.23*9.77*10.23	9018.227	9.24	10	
由推論組長度遞減 0.125	90.355*9.645*10.355	9024.113	9.37	10	
推論組(長寬比值採 9.5)	90.48*9.52*10.48	9027.153	9.5	10	
由推論組長度遞增 0.125	90.605*9.395*10.605	9027.336	9.64	10	
由推論組長度遞增 0.25	90.73*9.27*10.73	9024.65	9.79	10	

2. 長方形紙 200 × 40，長寬比值為 5

橫向折法 採長寬比值 4.7（估測值）實驗之

	$100 \div (1+4.7) \times 4.7$ 82.46.....長	$100 \div (1+4.7)$ 17.54.....寬			
	長 × 寬 × 高	容積	長寬比值	原長方形長寬比值	
由推論組長度遞增 0.25	82.21*17.79*22.21	32482.478	4.62	5	
由推論組長度遞減 0.125	82.335*17.665*22.335	32485.091	4.66	5	
推論組(長寬比值採 4.7)	82.46*17.54*22.46	32484.985	4.7	5	
由推論組長度遞增 0.125	82.585*17.415*22.585	32482.148	4.74	5	
由推論組長度遞增 0.25	82.71*17.29*22.71	32476.569	4.78	5	

3. 長方形紙 160 × 64，長寬比值為 2.5

橫向折法 採長寬比值 2.4（估測值）實驗之

	$80 \div (1+2.4) \times 2.3$ 56.47.....長	$80 \div (1+2.4)$ 23.53.....寬			
	長 × 寬 × 高	容積	長寬比值	原長方形長寬比值	
由推論組長度遞增 0.25	56.22*23.78*40.22	53770.584	2.36	2.5	
由推論組長度遞減 0.125	56.345*23.655*40.345	53773.469	2.38	2.5	
推論組(長寬比值採 2.3)	56.47*23.53*40.47	53774.071	2.4	2.5	
由推論組長度遞增 0.125	56.595*23.405*40.595	53772.8	2.42	2.5	
由推論組長度遞增 0.25	56.72*23.28*40.72	53768.382	2.44	2.5	

由上述長方形紙(200*20、200*40、160*64)來驗證我們先前的推論，發現我們的推論是合理的，也就是將一張長方形紙折成紙箱的形體，紙箱的長寬比

值以原長方形紙的長寬比值小一點點（約比原比值小 10%以內的範圍）來設定即可。例如：長方形紙 200*40，其長寬比值為 5(其 10%大約是 0.5)，所以紙箱的長寬比值取大約 4.5 ~ 5 之間所得的容積較大；長方形紙 150*50，其長寬比值為 3，所以紙箱的長寬比值取約 2.7 ~ 3 之間。

以下是將活動四-(三)所得數據做整理，並且檢驗其紙箱長寬比值是否落在比原長方形長寬比值小 10%的範圍內。檢驗結果皆符合推論。

紙張規格	折成有蓋紙箱後最大容積				原長方形長	紙箱之	比值 10%範圍	
	長	寬	高	容積	寬比值	長寬比值		
橫 向 折	40×20	13.25	6.75	13.25	1185.047	2	1.963	1.8 ~ 2
	60×20	22.25	7.75	12.25	2112.3593	3	2.871	2.7 ~ 3
	80×20	31.5	8.5	11.5	3079.125	4	3.704	3.6 ~ 4
	200*20	90.605	9.395	10.605	9027.336	10	9.64	9 ~ 10
	200*40	82.335	17.665	22.335	32485.091	5	4.66	4.5 ~ 5
	160*64	56.47	23.53	40.47	53774.071	2.5	2.4	2.25 ~ 2.5

活動進行至此，我們又突然想到一個問題，在活動二時，我們得到一個結論 同比例尺寸不同大小的長方形紙只要算出其中一個來當參照值，其餘的就可以依其邊長是此參照值的多少倍而直接求得，那麼，此活動要折成紙箱，其長寬也是出現一個比值，我們是否也可比照辦理，利用此比值解決長寬同比例不同大小的長方形紙折紙箱的問題來折出最大容積呢？

【延伸問題】

在等比例但不同大小的厚紙折成紙箱中，利用其中一個算出的數值當參照值來推得其它等比例不同大小的厚紙折成紙箱的長與寬，如此形成的容積是否依舊保持最大？

方 法：<以長寬比值為 2.5 及 5 的長方形(橫向折法)來實驗之>

- (1) 由長 160cm 寬 64cm 的長方形紙(長寬比值為 2.5)利用逼近法遞減至 0.0625cm，找到較精準的數值，再依此數值來推其它同比例較小的長方形紙(如 100*40、75*30)。
- (2) 由長 200cm 寬 40cm 的長方形紙(長寬比值為 5)利用逼近法遞減至 0.0625cm，找到較精準的數值，再依此數值來推其它同比例較小的長方形紙(如 150*30、80*16)。
- (3) 討論其推算結果

實驗結果：

(1)我們利用活動四-(3)所求出的數據再 ± 0.0625 ，求其更精確的值。

紙張規格	折成有蓋紙箱後最大容積				原長方形長寬比值	紙箱之長寬比值
	長	寬	高	容積		
	56.4075	23.5925	40.4075	53774.056		
160*64	56.47	23.53	40.47	53774.071	2.5	2.3999
	56.5325	23.4675	40.5325	53773.512		
	82.2725	17.7275	22.2725	32484.122		
200*40	82.335	17.665	22.335	32485.091		
	82.3975	17.6025	22.3975	32485.376	5	4.681

上表為用先前推算出來的值再 ± 0.0625 做逼進

(2)再以所求得值做為參照值，依照其縮小的比例來推估其它等比例但不同大小的長方形，再將所取得的長上下 ± 0.125 來比較我們所推估出來的值是否為最大容積。

紙張規格	縮小倍數	折成有蓋紙箱後最大容積				原長方形長寬比值	紙箱之長寬比值	參照值
		長	寬	高	容積			
		35.169	14.831	25.169	13127.934			
100*40	0.625	35.294	14.706	25.294	13128.434	2.5	2.3999	
		35.419	14.581	25.419	13127.5			160*64
		26.359	11.141	18.859	5538.2396			長 56.47
75*30	0.469	26.484	11.016	18.984	5538.539	2.5	2.404	
		26.609	10.891	19.109	5537.762			
		61.673	13.327	16.673	13703.806			
150*30	0.75	61.798	13.202	16.798	13704.768	5	4.681	
		61.923	13.077	16.923	13703.688			200*40
		32.834	7.166	8.834	2078.538			長 82.3975
80*16	0.4	32.959	7.041	8.959	2079.0642	5	4.681	
		33.084	6.916	9.084	2078.5004			

(3)由上述結果(1)(2)可以推得，我們的推論是合理的，也就是找出同比例中的一組較大數據當參照值，再利用原長方形的縮放倍數來推算出折成紙箱的長與寬，如此算出的容積依舊保持最大。

活動五實驗結果

(一) 以邊長 40*40、60*60、80*80、100*100 的正方形紙，利用逼近法調整模擬紙箱的長寬，找出最大容積的折法，分別記錄如下：

長方形規格	1cm 遞減 長*寬*高	體積	0.5cm 遞減 長*寬*高	體積	0.25cm 遞減 長*寬*高	體積
40*40	10*10*30	3000	11*9*31	3069	11*9*31	3069
	11*9*31	3069	11.5*8.5*31.5	3079.125	11.25*8.75*31.25	3076.172
	12*8*32	3072	12*8*32	3072	11.5*8.5*31.5	3079.125
	13*7*33	3003	12.5*7.5*32.5	3046.875	11.75*8.25*31.75	3077.766
	14*6*34	2856	13*7*33	3003	12*8*32	3072
60*60	15*15*45	10125	16*14*46	10304	17*13*47	10387
	16*14*46	10304	16.5*13.5*46.5	10357.875	17.25*12.75*47.25	10392.046
	17*13*47	10387	17*13*47	10387	17.5*12.5*47.5	10390.625
	18*12*48	10368	17.5*12.5*47.5	10390.625	17.75*12.25*47.75	10382.641
	19*11*49	10241	18*12*48	10368	18*12*48	10368
80*80	20*20*60	24000	22*18*62	24552	22.5*17.5*62.5	24609.375
	21*19*61	24339	22.5*17.5*62.5	24609.375	22.75*17.25*62.75	24625.453
	22*18*62	24552	23*17*63	24633	23*17*63	24633
	23*17*63	24633	23.5*16.5*63.5	24622.125	23.25*16.75*63.25	24631.922
	24*16*64	24576	24*16*64	24576	23.5*16.5*63.5	24622.125
100*100	25*25*75	46875	28*22*78	48048	28.5*21.5*78.5	48100.875
	26*24*76	47424	28.5*21.5*78.5	48100.875	28.75*21.25*78.75	48111.328
	27*23*77	47817	29*21*79	48111	29*21*79	48111
	28*22*78	48048	29.5*20.5*79.5	48077.625	29.25*20.75*79.25	48099.796
	29*21*79	48111	30*20*80	48000	29.5*20.5*79.5	48077.625
	30*20*80	48000				

將上述表格再次綜合整理形成下表：

紙張規格	折成有蓋紙箱後最大容積				紙箱之 長寬比值	紙箱之 長寬比值
	長	寬	高	容積		
40×40	11.5	8.5	31.5	3079.125	1.35	1
60×60	17.25	12.75	47.25	10392.046	1.35	1
80×80	23	17	63	24633	1.35	1
100×100	28.75	21.25	78.75	48111.328	1.35	1

(二)由上表中我們可以知道，以一張正方形紙要折成紙箱的形體，取其長寬比值約為 1.35 時其容積最大。

【以 50cm×50cm 的正方形厚紙為例】

$$25 \div (1+1.35) = 10.64 \dots \text{寬}$$

$$25 - 10.64 = 14.36 \dots \text{長}$$

$$50 - 10.64 = 39.36 \dots \text{高}$$

$$10.64 \times 14.36 \times 39.36 = 6013.8301 \dots \text{所得容積}$$

六、討論建議

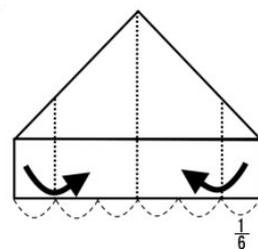
- (1) 我們利用逼近法逐漸縮小差距找到，正方形紙張其四角剪去原邊長的 $\frac{1}{6}$ 後，所折出的紙盒容積最大，且折出紙盒後的長寬高比例為 4 : 4 : 1。
- (2) 當正方形紙邊長變為 n 倍，則四角所剪去的小正方形邊長也會隨變為 n 倍。體積為變為 n^3 倍，同比例的長方形紙亦是如此。
- (3) 長方形因為長寬比例不同，無法像正方形一樣有一個固定的比例數值能讓所折出的紙盒容積皆為最大，但可以確定的是長方形四角剪去的數值會小於原長度的 $\frac{1}{6}$ 。
- (4) 從實驗的數據中我們可以推得：當長寬比值介在 2 以內時(即長未達寬的 2 倍)，四角大約剪去原長度的 0.1 至 0.15 倍所折出的容積會最大；當長寬比值超過 2 時(即長為寬的 2 倍以上)，則四角須剪去比原長度的 0.1 倍小才能折出最大容積的紙盒，而且當長寬差距愈大時，取的倍數值愈小。
- (5) 在折成紙盒容積最大的情況下，長寬比例相同的各種長方形其四角剪去的長度與原長度的比值皆相同。
- (6) 在折成紙盒容積最大的情況下，長寬比例相同的各種長方形，以大尺寸的長方形所推得的“剪去邊長值”來推得小尺寸所需剪去的邊長值，所得的數據會更精準，也更接近最大容積。
- (7) 利用一般折紙盒的方法所折出的紙盒其長寬高只與原紙張的寬度有關，且紙盒高度皆為原長方形紙寬度的 $\frac{1}{4}$ ，底面積為正方形，其邊長是長方形寬度的 $\frac{1}{2}$ ，

只要知道原長方形紙的寬度即能得知所折紙盒的容積： $\text{寬} \times \text{寬} \times \text{寬} \times \frac{1}{16}$

- (8) 當長方形紙寬度不變，長度變 n 倍，所折出的紙盒容積不變。
- (9) 當長方形紙長度不變，寬度變 n 倍，所折出的紙盒容積變成 n^3 倍。
- (10) 若想要運用一般折紙盒方式折出最大容積的紙盒，只要

在過程中將左右內折原寬度的 $\frac{1}{6}$ 即可，且所得的容積為

$\text{寬} \times \text{寬} \times \text{寬} \times \frac{2}{27}$ 。



- (11) 一般的紙箱都是由一張長方形的瓦楞紙所折成的，在較長的上下邊長上分別劃開三處，劃開的長度剛好是組合後紙箱寬度的一半。
- (12) 以長方形紙張來模擬紙箱的折法，橫向折法所折出的容積(以短邊做為紙箱的高)比縱向折法折出的容積大。
- (13) 以長方形紙張來模擬紙箱的橫向折法，紙箱的長寬比值以原長方形紙的長寬比值小一點點(約比原長寬比值小 10% 以內)所折出的容積會較大。若是縱向折

有“容”乃大 小小紙張立大功

法，則以紙箱長寬比例接近 1：1 的方式來折容積會較大。

- (14)長寬比例相同的各種長方形來模擬紙箱的折法，我們也可先找一組大尺寸的長方形利用(13)的結論及逼近法找出最適合的紙箱長寬，再利用各長方形與此長方形的長寬關係很快推得其它長方形該取多少長及寬來折成紙箱容積才會較大。
- (15)正方形紙因為長寬比例相同，所以模擬紙箱的折法有固定比例，以折出紙箱的長寬比值為 1.35 所得的容積最大。
- (16)在實際操作剪裁中，能精確到小數點以下第二位已是很不簡單了，但由於我們是利用逐漸逼近法，為求更精準的答案，所以我們會再往下切分更細，因此有出現到小數第三位，甚至小數第四位的情況。

七、參考資料

科展優勝作品專輯 國立台灣科學教育館



080405 國小組數學科

最佳創意獎

有“容”乃大—小小紙張立大功

運用「二分逼近法」找出正方形、長方形、紙張的最大容積，

難易適中，並能實際運用在生活中。