中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組數學科

080404

臺北市士林區士東國民小學

指導老師姓名

林華葵

蕭碧枝

作者姓名

許哲維

黃怡諶

陳怡潔

陳琬璇

王啟任

中華民國第　四十四　屆中小學科學展覽會

作品說明書

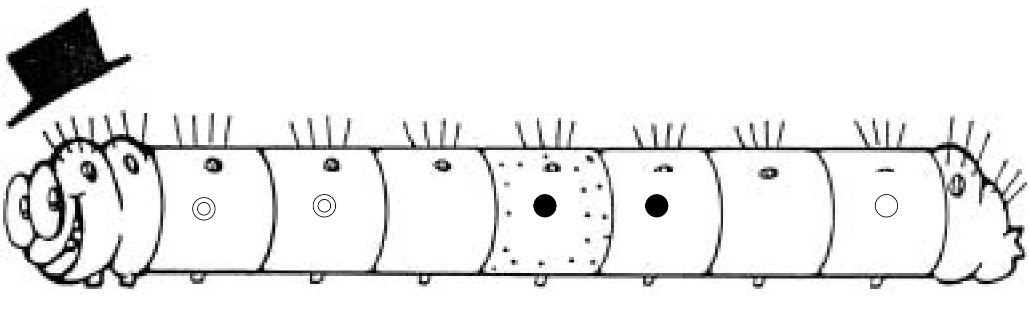
科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：三色移位毛毛蟲~三色移位遊戲的探討

關 鍵 詞：移位遊戲、對稱、最低步

編　　號：



摘　　要

二色移位遊戲問題曾經多次被拿來做研究（24 屆初小全國第三名~有趣的移位遊戲、34 屆高小全國第二名~毛毛蟲變蝴蝶、1996 年我國參加加拿大國際科展~走走跳跳、39 屆高中全國第二名~乾坤大挪移、41 屆國中全國第二名~解開難題的奧秘等），本研究首次將**二色移位遊戲推展到三色的研究**，會選定這樣的主題是看到『葛老爹的推理遊戲 2』，書中提到三色移位遊戲的難題所引起，而我們的數學課本中也正學到**線對稱**以及**兩數量的變化關係**等單元，我們的研究結果發現移位遊戲的最低步數解答中，對換在進行中**移動**和**跳動**具有**線對稱關係**，輪換的移動和跳動次數分配也具有**線對稱關係**。而**棋子數**和**移動最少步數**之間的關係是極為複雜的。而這個關係的發現是經歷了約九個月的時間慢慢發展的，下表是我們發展的時間流程簡表：

階　　段	時　間	發現的規律和大事紀錄	說明書頁次
1、校內科展前	**2003.10.16~ 2003.12.17**	等長三色輪換規律 等長三色對換規律	P 9~11 P12~13
2、校內科展後~　寒假前	**2003.12.18~ 2004.01.15**	一團混亂，等長型以外可以研究方向太複雜，紀錄格式不好，很浪費紙張及時間，　2004.01.15 確定更改新的紀錄格式。	
3、寒假中	**2004.01.18~ 2004.02.11**	沒時間五個人聚在一起做，各自在家中找解答，紀錄採用新的格式。	
4、輪換不等長型、不連跳、棋子數中間比兩邊少（中瘦型）棋子數中間比兩邊多（中胖型）	2003.12.18~ 2004.03.21	鎖定在輪換不等長型、不連跳、棋子數中間比兩邊少的情形討論，發現到適用範圍比較大的規律。	P14~P19 P2526 連頁
5、對換不等長型、不連跳、棋子數中間比兩邊少（中瘦型）棋子數中間比兩邊多（中胖型）	2003.12.11~ 2004.03.26	對換不等長型、不連跳、棋子數中間比兩邊多的情形討論，發現到適用範圍更大的規律。	P20~P24 P2526 連頁
6、地方展得獎前後的後續發現	2004.04.01~ 2004.06.16	對稱性的深入探索、三色棋子完全不相等探討、輪換的更好公式發現，樹形圖試做。	P27~P28

壹、研究動機

去年老師教我們玩毛毛蟲移位遊戲，經過一段時間，我們看到了移位遊戲的規律性，也在尋找資料過程中找到全國科展中多次以移位遊戲作爲研究題材的得獎作品，最近又在一本名爲「葛老爹的推理遊戲」書中看到這個遊戲，不同的是書中的提到的移位遊戲是三個顏色的棋子換位的問題，比起以前大家所研究的二色棋子移位遊戲來說，它的難度顯然高了很多，書中只提到三個顏色的棋子各 2 顆換位的問題，我們有興趣的是想了解整個系列的情形，尤其是能不能找到規律，而這個部分是以往書上或歷屆科展作品中所不曾提到的，因此我們決定以三色移位遊戲爲主題做深入的探討。

研究進行中我們發現，數學課本中所談到的**線對稱**（康軒版數學課本六下第二單元 P12~17）給我們很大的幫助，剛開始研究時我們常常需要考慮左輪換或右輪換，後來我們發現用對稱的觀念就可以簡化它。而在早期，解答的對稱性也讓我們可作爲是不是最低步的輔助參考指標。

此外，學過數學課本中**兩數量的變化關係**（康軒版數學課本六下第十單元 P88~97）課程後，我們更能掌握如何去建立棋子數和最低步之間的關係，使我們能從很多解答中逐步找到互相之間的關係，進一步試著整理出規律。

我們在進行三色輪換毛毛蟲移位遊戲時，發現三色棋子的移位遊戲除了輪換外，也可以只有左右對換，原來以爲這種比較簡單，後來發現比三色輪換更難，初步發現原因在於位在中間的棋子事實上不可能不動，而是必須離開後再回到原位，研究過程中發現中間的棋子反而形成一種障礙，於是難度增加很多，因此我們決定把它作爲一個獨立的部分來做深入的探討。

貳、研究目的

三色輪換移位遊戲部分第一階段（輪換第一階段）：

一、三色輪換移位遊戲中 2-2-2 型的移動最低步數爲何？有沒有移動的軌跡特徵？

二、三色輪換移位遊戲中，棋子數增加或減少時，移動最低步之間是否具有規律或特徵？

三色對換移位遊戲部分第一階段（對換第一階段）：

三、三色對換移位遊戲中 2-2-2 型的移動最低步數爲何？有沒有移動的軌跡特徵？

四、三色對換移位遊戲中，棋子數增加或減少時，移動最低步之間是否具有規律或特徵？

三色輪換移位遊戲部分第二階段（輪換第二階段）：

五、三色輪換移位遊戲中如果每種顏色棋子數不同時，移動最低步之間是否具有規律性？

六、三色輪換移位遊戲中如果可以連跳時，移動最低步之間是否具有規律性？

三色對換移位遊戲部分第二階段（對換第二階段）：

七、三色對換移位遊戲中如果每種顏色棋子數不同時，移動最低步之間是否具有規律性？

八、三色對換移位遊戲中如果可以連跳時，移動最低步之間是否具有規律性？

叁、研究器材

三色移位遊戲棋盤、棋子、紀錄紙。

肆、文獻探討

我們從歷屆科展得獎作品專輯中找到移位遊戲有關主題如下：

編號	屆別與組別	得獎名次	主題名稱	本研究主要參考內容
1	24 屆 初小組	全國 第三名	有趣的移位遊戲	研究移位遊戲中最基本的狀態階段，該作品中歸納出基本公式。詳細資料請參考中華民國第 24 屆中小學科學展覽優勝作品專輯初小組數學科全國第三名（p220~233）。
2	34 屆 高小組	全國 第二名	毛毛蟲變蝴蝶~移位遊戲的新發現	對移位遊戲作更深入的探討，該作品中對移位遊戲中兩邊棋子數不相等的部分做了完整的探討，並歸納出公式，是以往不曾被研究過的新題材。詳細資料請參考中華民國第 34 屆中小學科學展覽優勝作品專輯高小組數學科全國第二名（p258~268）。
3	1995 年 高中組	加拿大 正選	走走跳跳	以高中數學概念對移位遊戲作深入探討。

4	39 屆 高中組	全國 第二名	乾坤大挪移	移位的對稱性、黑棋白棋的對稱性、空格位置統計，切入主題的觀點較特別。詳細資料請參考中華民國第39屆中小學科學展覽優勝作品專輯高中組數學科全國第二名。詳細資料請參考中華民國第 39 屆中小學科學展覽優勝作品專輯高中組數學科全國第二名（p123~130）。
5	41 屆 國中組	全國第二名	解開難題的奧秘--「個人移位跳棋」遊戲的探討』	對移位遊戲的不同類型棋盤作深入探討，也歸納出最低步公式。詳細資料請參考中華民國第41屆中小學科學展覽優勝作品專輯國中組數學科全國第二名。（優勝作品專輯光碟）
6	天下文化出版社出版的「葛老爹的推理遊戲 2		一條龍方格棋	首次提出三色移位遊戲的難題，但未作深入探討的介紹。詳細資料請參考天下文化出版社所出版的「葛老爹的推理遊戲 2」一書（p139~146）。

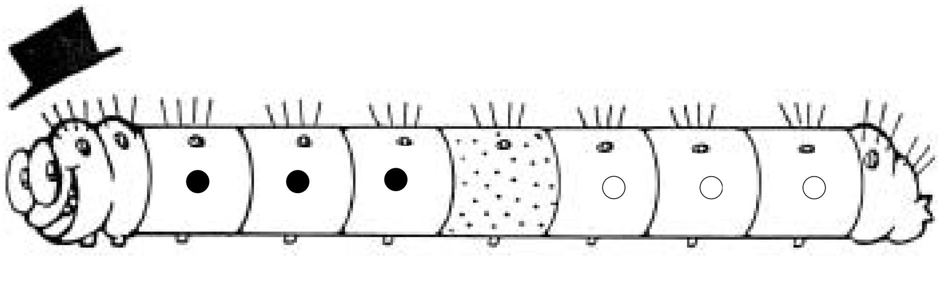
伍、研究過程

回顧原始的移位遊戲

毛毛蟲移位遊戲為一常見的移位遊戲，早期遊戲棋盤如圖一所示，遊戲內容及遊戲規則如下：

（一）遊戲內容：

1.毛毛蟲身上一邊有 3 隻白色跳蚤，另外一邊有 3 隻黑色跳蚤，如下圖一：



2.接著要透過移或跳來移動跳蚤使白色跳蚤和黑色跳蚤完全交換位置，如下圖二.：

空格號碼	1	2	3	4	5	6	7
原始跳蚤位置	●	●	●		○	○	○
最後跳蚤位置	○	○	○		●	●	●

（二）遊戲規則：

1.每次只能移動一顆棋子。

2.每一顆被移動的棋子，可以選擇以下兩種方式進行。

（1）這一顆棋子旁邊有空格時，可以移動一格到空格中（譬如把格子5的棋子，移入格子4，或格子3的棋子移入格子4）。

（2）這一顆棋子旁邊有空跳躍緊鄰的棋子（不管顏色如何），而跳至空格中。（譬如格子2的棋子跳到格子4或格子6跳到格子4）。

3.每移動、跳動一次都算一步，用越少的步數完成換位越好。

本研究是把常見的移位遊戲 2 個顏色棋子增加爲 3 個顏色，這是以往研究中不曾出現的主題。

基本定義：

一、以往的二色移位遊戲情況較爲單純，只要把前面圖中的黑色和白色棋子換位即可，但在三色移位的情形下，整體棋子左移、右移、輪換、對換交互組合後會有四種情形產生，以下以 2-2-2 型爲例圖示如下：（圖三、1，圖三、2，圖三、3，圖三、2）

左移：盤面上所有棋子都向左移動。

右移：盤面上所有棋子都向右移動。

輪換：盤面上的棋子都離開了原來的位置，換到新的位置。

對換：盤面上的棋子都離開了原來的位置，最後左右做了調換，中間的棋子離開後又回到原點，中間的棋子事實上是一種障礙。

圖三、1：R-W-B　　2-2-2 型左移、輪換：

編 號	1	2	3	4	5	6	7	8
原 圖	🔴	🔴		○	○		●	●
完成移位	○	○		●	●		🔴	🔴

圖三、2：R-W-B　　2-2-2 型右移、輪換：

編 號	1	2	3	4	5	6	7	8
原 圖	🔴	🔴		○	○		●	●
完成移位	●	●		🔴	🔴		○	○

圖三、3：R-W-B　　2-2-2 型左移、對換：

編 號	1	2	3	4	5	6	7	8
原 圖	🔴	🔴		○	○		●	●
完成移位	●	●		○	○		🔴	🔴

圖三、4：R-W-B　　2-2-2 型右移、對換：

編 號	1	2	3	4	5	6	7	8
原 圖	🔴	🔴		○	○		●	●
完成移位	●	●		○	○		🔴	🔴

經過初步研究發現，左輪換和右輪換的最後位置不同，但事實上是一種對稱關係，移動步數也都完全一樣，而在對換也一樣，因此我們選擇左輪換、左對換爲研究主題作深入的探討。

研究的主題：

三色輪換移位遊戲部分第一階段（輪換第一階段）：

一、三色輪換移位遊戲中 2-2-2 型的移動最低步數爲何？有沒有移動的軌跡特徵？

1.我們試著對 2-2-2 型的三色移位遊戲找解答，並儘量試不同的移動位置及走法，再試著找出移動最低步。試驗結果發現移動最低步爲 15 步，移動過程圖如圖六、1。（請參考研究結果，P9）

二、三色輪換移位遊戲中，棋子數增加或減少時，移動最低步之間是否具有規律或特徵？

1.我們將每個顏色棋子數增加或減少，分別做 1 –1–1、3–3–3，4–4–4 一直到 9–9–9，留下不同走法及不同步數資料，經過比較後將最低步資料列表。

2.將不同棋子數的最低步資料做比對，希望能找到棋子數和最低步之間的關係，研究結果如表六.（二）.1，（請參考研究結果，P9~10）

3.找一些不同型態的棋型，應用公式算出移位最低步數。

4.實際操作驗證。

5.紀錄各種棋盤遊戲進行時，空位所在的位置改變情形。

6.紀錄遊戲進行時移動步數和跳動步數分佈情形，看看是不是有特徵。

三色對換移位遊戲部分第一階段（對換第一階段）：

三、三色對換移位遊戲中 2-2-2 型的移動最低步數爲何？有沒有移動的軌跡特徵？

1.我們試著對 2-2-2 型的三色對換移位遊戲找解答，並儘量試不同的移動位置及走法，再試著找出移動最低步。試驗結果發現移動最低步爲 20 步，移動過程圖如六.3。（請參考研究結果，P12）

四、三色對換移位遊戲中，棋子數增加或減少時，移動最低步之間是否具有規律或特徵？

1.我們將每個顏色棋子數增加或減少，分別做 1 –1–1、3–3–3，4–4–4 一直到 9–9–9，留下不同走法及不同步數資料，經過比較後將最低步資料列表。

2.研究方法同前面二，差別爲研究主題爲對換，研究結果如表六.（四）.1，（請參考研究結果，P12）

三色輪換移位遊戲部分第二階段（輪換第二階段）：

五、三色輪換移位遊戲中如果每種顏色棋子數不同時，輪換移動最低步之間是否具有規律性？

1.我們試著做不同顏色棋子數也不同（例如 2 –1–2，即紅色棋子 2 顆，白色棋子 1 顆，黑色棋子 2 顆的情形），建立資料後時，它的移動最低步數增加或減少，分別做差一型（即中間比旁邊少一顆棋子如：2 –1–2、3–2–3，4–3–4 一直到 9–8–9，留下不同走法及不同步數資料，經過比較後將最低步資料列表。

2.觀察最低步資料表，試著找最低步資料之間的相互關係或其中的規律性。

3.接著我們做差二型（例如 3 –1–3，即紅色棋子 3 顆，白色棋子 1 顆，黑色棋子 3 顆的情形），方法如上，繼續完成差三型、差四型、差五型等，列成一個完整的表格。

4.試著找出適用範圍更大的規律或公式，甚至能推廣到更大的範圍。

5.找一些不同型態的棋型，應用公式算出移位最低步數。

6.實際操作驗證。

研究結果如表六.（五）.1 及六.（五）. 2（請參考研究結果，P13~19 及.P2526 總表）

六、三色輪換移位遊戲中如果可以連跳時，移動最低步之間是否具有規律性？

1. 移位遊戲和跳棋遊戲有極密切關係，跳棋遊戲的移位重點之一即爲在遊戲進行中儘可能創造連跳機會，但在二色移位遊戲中由於只有一個空位，因此沒有連跳的狀態，而在

三色輪換移位遊戲中由於有二個空位，能有連跳機會，因此我們將連跳納入我們的研究範圍。

2.在研究過程中，我們對同一個棋型（例如 2 –2–2）同時建立了連跳和不連跳的移動資料，方便做資料互相比對用。

3. 找一些不同型態的棋型，應用公式算出移位最低步數。

4. 實際操作驗證。

三色對換移位遊戲部分第二階段（對換第二階段）：

七、三色對換移位遊戲中如果每種顏色棋子數不同時，對換移動最低步之間是否具有規律性？

1.方法同前面五，但此處的研究主題爲對換。

2.研究結果如表六.（七）.1 及六.（七）.2（請參考研究結果，P20~24 及.P26 總表）

八、三色對換移位遊戲中如果可以連跳時，移動最低步之間是否具有規律性？

1. 方法同前面六，但此處的研究主題爲對換。

陸、研究結果

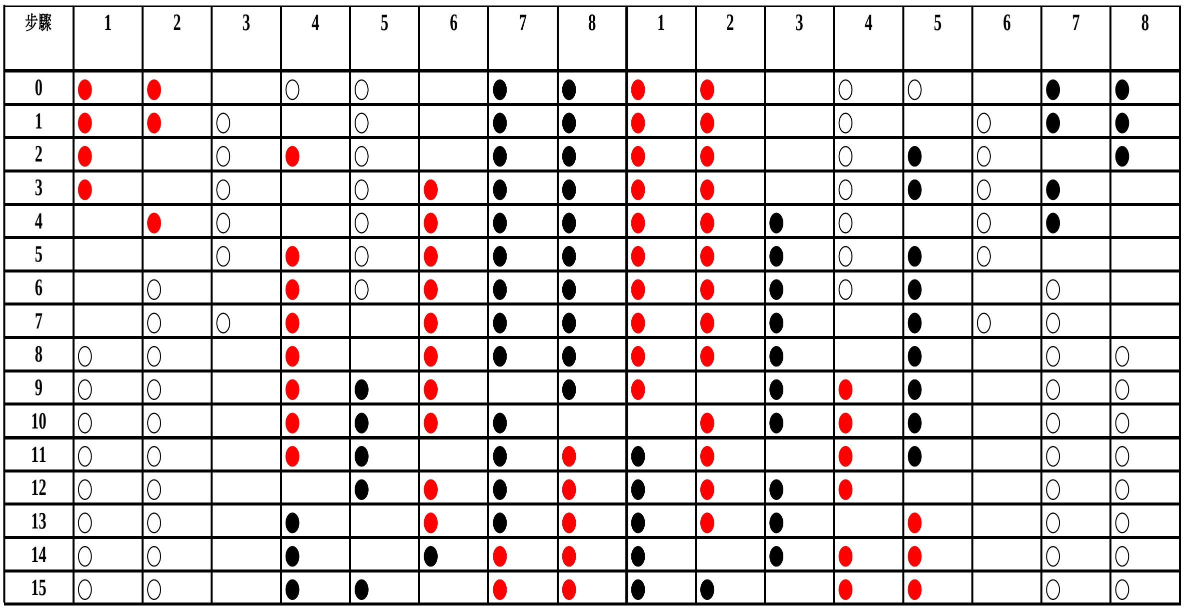
三色輪換移位遊戲部分（輪換第一階段結果）：【日期 **2003.10.16~2003.12.17**】

一、三色輪換移位遊戲中 2-2-2 型的移動最低步數爲何？有沒有移動的軌跡特徵？

經過多次嘗試及比對資料後，我們確認三色輪換 2-2-2 型的移動最低步數爲 15 步由於移動方向的不同，會產生兩種解答如圖二，由圖中發現兩種解答的最低步是一樣的，事實上兩種解答具有對稱關係：

圖六.1：**R-W-B　　2-2-2** 型輪換最低步解答圖：

第一種解答（左輪換）：　　　　　　　　第二種解答（右輪換）：



二、三色輪換移位遊戲中，棋子數增加或減少時，移動最低步之間是否具有規律或特徵？

（一）三色輪換移位遊戲中，棋子數增加或減少時，等長型的移動最低步列表如下：

我們試著找出其中共同的特徵或者公式，再經過進一步整理後，我們發現可以寫為如下表：（表六.（二）.1）　【發現日期 2003.12.11】

棋盤型式	我們做出的最低步	試找規律		
		棋子數與最低步關係	減尾數法	加尾數法
1.-1.-1	6	不　合	不　合	不　合
2.-2.-2	15	2 x（2 x 2 + 4）－1	2 x 8－1	2 x 7+1
3.-3.-3	28	3 x（3 x 2 + 4）－2	3 x 10－2	3 x 9+1
4.-4.-4	46	4 x（4 x 2 + 4）－2	4 x 12－2	4 x 11+2
5.-5.-5	67	5 x（5 x 2 + 4）－3	5 x 14－3	5 x 13+2
6.-6.-6	93	6 x（6 x 2 + 4）－3	6 x 16－3	6 x 15+3
7.-7.-7	122	7 x（7 x 2 + 4）－4	7 x 18－4	7 x 17+3
8.-8.-8	156	8 x（8 x 2 + 4）－4	8 x 20－4	8 x 19+4
9.-9.-9	193	9 x（9 x 2 + 4）－5	9 x 22－5	9 x 21+4

經過整理後，我們發現**移位最低步**和**棋子數**之間有關係如下：

減尾數法：

棋子數爲奇數時：

棋子數 × （棋子數 × 2 ＋ 4 ）－ （棋子數 ＋ 1）÷ 2

棋子數爲偶數時：

棋子數 × （棋子數 × 2 ＋ 4 ）－ （棋子數）÷ 2

加尾數法：

棋子數爲奇數時：

棋子數 × （棋子數 × 2 ＋ 3 ）＋ （棋子數 － 1）÷ 2

棋子數爲偶數時：

棋子數 × （棋子數 × 2 ＋ 3 ）＋ （棋子數）÷ 2

表六.（二）.2

棋盤型式	移位最低步	和下一棋型差値	差値關係
1-1-1	6	9	3 × 3＋0
2-2-2	15	13	3 × 4＋1
3-3-3	28	18	3 × 5＋3
4-4-4	46	21	3 × 6＋3
5-5-5	67	26	3 × 7＋5
6-6-6	93	29	3 × 9＋7
7-7-7	122	34	3 × 10＋7
8-8-8	156	37	3 × 11＋9
9-9-9	193	42	3 × 12＋9

（二）我們對三色輪換移位遊戲中，棋子的移動或跳動狀態加以紀錄，並和二色移位遊戲比較，結果發現二色移位遊戲的移動和跳動具有線對稱現象，而三色輪換移位遊戲也找到線對稱，說明如下圖（圖六.2）。

S：移動　　J：跳動

位置	1	2	3	4	5
	●	●		○	○

編號	1	2	3	4	5	6	7	8
跳移	S	J	S	J	J	S	J	S

對稱軸

編號	1	2	3	4	5	6	7	8
原　圖	◎	◎		○	○		●	●
完成移位	○	○		●	●		◎	◎

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
跳移	S	J	S	J	J	S	J	J	J	S	J	J	S	J	S

對稱軸

而在其他棋型中則都具有線對稱情形，例如 3-3-3 型，28 步移位中的整個過程如下：

S J S J J J J S J S J J J J | J J J J S J S J J J J J S J S

因此我們配合最低步公式就能具有預測效果，並能做交互檢驗效果，例如我們可以直接找到 11-11-11 型的最低步爲 280 步，再用 S、對稱現象，很快得到解答，它的整個過程如下：

S J S J J S J J J S J J J J S J J J J J S J J J J J J S J J J J J J J S J J J
J J J J J S J J J J J J J J J S J J J J J J J J J J J J J J J J J J J J S J S J
J J J J J J J J J J J J J J J J J J J J J J J S S J J J J J J J J J J J J J J J
J J J J J J J J S J J J J J J J J J J J | J J J J J J J J J J J J J J J J S J J J
J J J J J J J J J J J J J J J J J J J S S J J J J J J J J J J J J J J J J J J
J J J J J S J S J J J J J J J J J J J J J J J J J J J J S J J J J J J J J J S J
J J J J J J J S J J J J J J J S J J J J J J S J J J J J S J J J J S J J J S J
J S J S

三、三色對換移位遊戲中 2-2-2 型的移動最低步數爲何？有沒有移動的軌跡特徵？

經過多次嘗試及比對資料後，我們確認三色對換 2-2-2 型的移動最低步數爲 20 步，移位步

驟如下圖六.3

步驟	1	2	3	4	5	6	7	8	步驟	1	2	3	4	5	6	7	8
0		🔴		○	○		●	●	**11**		○	○		●	🔴	●	🔴
1	🔴	🔴	○		○		●	●	**12**		○		○	●	🔴	●	🔴
2	🔴		○	🔴	○		●	●	**13**		○	●	○		🔴	●	🔴
3	🔴		○		○	🔴	●	●	**14**	●	○		○		🔴	●	🔴
4		🔴	○		○	🔴	●	●	**15**	●	○		○	●	🔴		🔴
5			○	🔴	○	🔴	●	●	**16**	●	○	●	○		🔴		🔴
6		○		🔴	○	🔴	●	●	**17**	●	○	●	○			🔴	🔴
7		○	○	🔴		🔴	●	●	**18**	●	○	●		○		🔴	🔴
8		○	○	🔴	●	🔴		●	**19**	●		●	○	○		🔴	🔴
9		○	○	🔴	●	🔴	●		**20**	●	●		○	○		🔴	🔴
10		○	○	🔴	●		●	🔴									

四、三色對換移位遊戲中，棋子數增加或減少時，移動最低步之間是否具有規律或特徵？

（一）三色輪換移位遊戲中，棋子數增加或減少時，等長型的移動最低步列表如下：

我們試著找出其中共同的特徵或者公式，結果如下表六.（四）.1：【發現日期 2003.11.27】

棋盤型式	移位最低步	試 找 規 律
1-1-1	7	1 ×（1＋ 2）× 3－ 1 × 2
2-2-2	20	2 ×（2＋ 2）× 3－ 2 × 2
3-3-3	39	3 ×（3＋ 2）× 3－ 3 × 2
4-4-4	64	4 ×（4＋ 2）× 3－ 4 × 2
5-5-5	95	5 ×（5＋ 2）× 3－ 5 × 2
6-6-6	132	6 ×（6＋ 2）× 3－ 6 × 2
7-7-7	175	7 ×（7＋ 2）× 3－ 7 × 2
8-8-8	224	8 ×（8＋ 2）× 3－8 × 2
9-9-9	279	9×（9＋ 2）× 3－ 9 × 2

（二）對換遊戲中棋子數和最低步之間的一致性公式如下：

三色對換移位遊戲最低步公式爲：

對換移位最低步數 ＝ 3 × 【棋子數 × （棋子數 ＋ 2)】－棋子數 × 2

例如 2-2-2　最低步爲：

3 × 【2 × （2 ＋ 2)】 －2 × 2 ＝ 20

（三）我們應用找到的公式預測棋子數更多時的最低步情形，並實際做出解答，發現也能符合公式的結果。

三色輪換移位遊戲部分（輪換第二階段結果）：【日期 **2003.12.18~2004.03.26**】

五、三色輪換移位遊戲中如果每種顏色棋子數不同時，移動最低步之間是否具有規律性？

輪換、棋子數中間比旁邊少（簡稱中瘦型）的狀態分析：

（一）我們先將輪換、棋子數中間比旁邊少（簡稱中瘦型）的狀態分爲差一型、差二型等

（二）整理出如下表，並列出互相間的差數關係如表六.（五）、1。

表六.（五）、1輪換.不等長.中間棋子比較少最少移位步數表

等長型		少1型		少2型		少3型		少4型		少5型		少6型		少7型		少8型	
1 1 1	6																
		2 1 2	12 (3)														
2 2 2	15			3 1 3	20 (4)												
		3 2 3	24 (4)			4 1 4	31 (5)										
3 3 3	28			4 2 4	36 (5)			5 1 5	43 (6)								
		4 3 4	41 (5)			5 2 5	49 (6)			6 1 6	58 (7)						
4 4 4	46			5 3 5	55 (6)			6 2 6	65 (7)			7 1 7	74 (8)				
		5 4 5	61 (6)			63 6	72 (7)			7 2 7	82 (8)			8 1 8	93 (9)		
5 5 5	67			6 4 6	79 (7)			7 3 7	90 (8)			8 2 8	102 (9)			9 1 9	113 (10)
		6 5 6	86 (7)			7 4 7	98 (8)			8 3 8	111 (9)			9 2 9	123 (10)		
6 6 6	93			7 5 7	106 (8)			8 4 8	120 (9)			9 3 9	133 (10)				
		7 6 7	114 (8)			8 5 8	129 (9)			9 4 9	143 (10)						
7 7 7	122			8 6 8	138 (9)			9 5 9	153 (10)								
		8 7 8	147 (9)			9 6 9	163 (10)										
8 8 8	156			9 7 9	173 (10)												
		9 8 9	183 (10)														
9 9 9	193																
棋步	步數(左下斜向右上差)																

（二）由表中我們發現：

1.輪換、棋子數中間比旁邊少（簡稱中瘦型）的移位遊戲，差數相等（例如同爲差一型）則他們的最低步差值爲一個連續整數，如表中（N）所示。

2.差數不相等（例如差一型對差二型）時，則沿著左下方向右上方斜向都具有相等的差值。

3.由上面兩種關係值來交互使用即可以很快推出表中所有解答。

（三）檢查原來等長型的公式，經過修正後可以擴大使用範圍到輪換、棋子數中間比旁邊少（中瘦型）的所有狀態。

原減尾數法：

原來公式：（等長型）

棋子數爲奇數時：

棋子數 ×（棋子數 × 2 ＋ 4 ）－（棋子數 ＋ 1）÷ 2

擴大到中瘦型、等長型通用公式：

棋子數的大數爲奇數時：

大數 ×（大數 × 2＋ 4 ）－（大數＋1）÷ 2 －（大數＋1）×（大數－小數）

例如 3－2－3 型的最低移位步數：

3 ×【3 × 2 ＋ 4】 － （3 ＋ 1）÷ 2 －（3 ＋ 1）× （3 － 2 ）

＝3 × 10 － 4 ÷ 2 － 4 × 1

＝30 － 2 － 4 ＝ 24

又如 3－3－3 型的等長型最低移位步數：

3 ×【3 × 2 ＋ 4】 － （3 ＋ 1）÷ 2 －（3 ＋ 1）× （3 － 3 ）

＝3 × 10 － 4 ÷ 2 － 4 × 0

＝30 － 2 ＝ 28

不管等長或不等長都能適用。

原減尾數法：

原來公式：（等長型）

棋子數爲偶數時：

棋子數 × （棋子數 × 2 ＋ 4 ）－ （棋子數）÷ 2

↓

擴大到中瘦型公式：

棋子數的大數爲偶數時：

大數 ×（大數 × 2＋ 4 ）－（大數）÷ 2 －（大數＋1）×（大數－小數）

例如 6－3－6 型的最低移位步數：

6 ×【6 × 2 ＋ 4】 － 6 ÷ 2 －（6 ＋ 1）× （6 － 3 ）

＝6 × 16 － 3 － 7 × 3

＝96 － 3 － 21 ＝ 72

又如 6－6－6 型的等長型最低移位步數：

6 ×【6 × 2 ＋ 4】 － 6 ÷ 2 －（6 ＋ 1）× （6 － 6 ）

＝ 6 × 16 － 3 － 0

＝96 － 3 ＝ 93

不管等長或不等長都能適用。

輪換、棋子數中間比旁邊多（簡稱中胖型）的狀態分析：

（一）我們先將輪換、棋子數中間比旁邊多（簡稱中胖型）的狀態分爲差一型、差二型等整理出如下表，並列出互相間的差數關係如表六.（五）、2。

表六.（五）、2輪換.不等長.中間棋子比較多(中胖型）最少移位步數表

等長型		多1型		多2型		多3型		多4型		多5型		多6型		多7型		多8型	
1 1 1	6																
		1 2 1	7 (2)														
2 2 2	15			1 3 1	9 (2)												
		2 3 2	18 (3)			1 4 1	11 (2)										
3 3 3	28			2 4 2	21 (3)			1 5 1	13 (2)								
		3 4 3	32 (4)			2 5 2	24 (3)			1 6 1	15 (2)						
4 4 4	46			3 5 3	36 (4)			2 6 2	27 (3)			1 7 1	17 (2)				
		4 5 4	51 (5)			3 6 3	40 (4)			2 7 2	30 (3)			1 8 1	19 (2)		
5 5 5	67			4 6 4	56 (5)			3 7 3	44 (4)			2 8 2	33 (3)			1 9 1	21 (2)
		5 6 5	73 (6)			4 7 4	61 (5)			3 8 3	48 (4)			2 9 2	36 (3)		
6 6 6	93			5 7 5	79 (6)			4 8 4	66 (5)			3 9 3	52 (4)				
		6 7 6	100 (7)			5 8 5	85 (6)			4 9 4	71 (5)						
7 7 7	122			6 8 6	107 (7)			5 9 5	91 (6)								
		7 8 7	130 (8)			6 9 6	114 (7)										
8 8 8	156			7 9 7	138 (8)												
		8 9 8	165 (9)														
9 9 9	193																
棋步	步數(左上向右下斜向差)																

（二）由表中我們發現：

1.輪換、棋子數中間比旁邊多（中胖型）的移位遊戲，差數相等（例如同爲差一型，即每一列的直行）則他們的最低步差値爲一個連續整數，如表中（N）所示。

2.差數不相等（例如差一型對差二型）時，則沿著左上方向右下方斜向都具有相等的差值。

3.由上面兩種關係值交互使用即可以很快推出表中所有解答。

（三）檢查原來等長型及中瘦型的公式，經過修正後可以擴大使用範圍到輪換、棋子數中間和旁邊（兩端）棋子數不等（包含中瘦型、中胖型）的所有狀態。

原減尾數法：

原來公式（等長型）：
棋子數爲奇數時：

棋子數 × （棋子數 × 2 ＋ 4 ）－ （棋子數 ＋ 1）÷ 2

↓

擴大到中瘦型、等長型通用公式：
棋子數的大數爲奇數時：

大數 ×（大數 × 2＋ 4 ）－（大數＋1）÷ 2 －（大數＋1）×（大數－小數）

↓

擴大到中胖型、中瘦型、等長型通用公式：
棋子數的旁邊數爲奇數時：

旁邊數 ×（旁邊數 × 2＋ 4 ）－（旁邊數＋1）÷ 2 －（旁邊數＋1）×（旁邊數－中間數）

例如 3－2－3 型的最低移位步數：

3 ×【3 × 2 ＋ 4】 － （3 ＋ 1）÷ 2 －（3 ＋ 1）× （3 － 2 ）
＝3 × 10 － 4 ÷ 2 － 4 × 1
＝30 － 2 － 4 ＝ 24

又如 3－4－3 型的中胖型最低移位步數：

3 ×【3 × 2 ＋ 4】 － （3 ＋ 1）÷ 2 －（3 ＋ 1）× （3 － 4 ）

＝3 × 10 － 4 ÷ 2 － 4 × （－1）

＝30 － 2 －（－4） ＝ 32 最後一項產生一個負值作爲調節

不管等長或中胖型、中瘦型都能適用。

原來公式（等長型）：

棋子數爲偶數時：

棋子數 × （棋子數 × 2 ＋ 4 ）－ （棋子數）÷ 2

擴大到中瘦型、等長型通用公式：

棋子數的大數爲偶數時：

大數 ×（大數 × 2＋ 4 ）－（大數）÷ 2 －（大數＋1）×（大數－小數）

擴大到中胖型、中瘦型、等長型通用公式：

棋子數的旁邊數爲偶數時：

旁邊數 ×（旁邊數 × 2＋ 4 ）－（旁邊數）÷ 2 －（旁邊數＋1）×（旁邊數－中間數）

例如 6－3－6 型的最低移位步數：

6 ×【6 × 2 ＋ 4】 － 6 ÷ 2 －（6 ＋ 1）× （6 － 3 ）

＝6 × 16 － 3 － 7 × 3

＝96 － 3 － 21 ＝ 72

例如 4－5－4 型的最低移位步數：

4 ×【4 × 2 ＋ 4】 － 4 ÷ 2 －（4 ＋ 1）× （4 － 5 ）

＝4 × 12 － 2 － 5 ×（－1）

＝48 － 2 － （－5） ＝ 51

不管等長或中胖型、中瘦型都能適用。

六、三色輪換移位遊戲中如果可以連跳時，移動最低步之間是否具有規律性？

我們在研究過程中所建立的資料顯示，三色輪換移位遊戲中如果可以連跳時，移位最低步都比不連跳時低，而且棋子數越多時節省的步數越多，但是沒有一定的規律可循，另外，在可以連跳的情形下，整個可能走法增加很多，困難度也大大增加，甚至一直到不久前還發現更省步走法，因此本子題仍未有最後結果。

三色對換移位遊戲部分（對換第二階段結果）：【日期 **2003.12.11~2004.03.26**】

七、三色對換移位遊戲中如果每種顏色棋子數不同時，移動最低步之間是否具有規律性？

輪換、棋子數中間比旁邊少（簡稱中瘦型）的狀態分析：

（一）我們先將對換、棋子數中間比旁邊少（簡稱中瘦型）的狀態分爲差一型、差二型等整理出如下表，並列出互相間的差數關係如表六（七）、1。

（二）由表中我們發現：

1.對換、棋子數中間比旁邊少（中瘦型）的移位遊戲，差數相等（例如同爲差一型，即每一列的直行）則它們的最低步差值爲一個連續奇數，如表中（N）所示。

2.差數不相等（例如差一型對差二型）時，則沿著左下方向右上方斜向都具有相等的差值。

3.由上面兩種關係值交互使用即可以很快推出表中所有解答。

（三）檢查原來等長型的公式，經過修正後可以擴大使用範圍到對換、棋子數中間比旁邊少（中瘦型）的所有狀態。

原來公式（等長型）：

三色對換移位遊戲最低步公式爲：

3 × 【棋子數 × （棋子數 ＋ 2 ）】－棋子數 × 2

↓

擴大到中瘦型、等長型通用公式：

3 ×【大數 ×（大數 ＋ 2 ）】－（大數）× 2 －（大數 × 2+1）×（大數－小數）

表六（七）、1：對換、不等長、中瘦型最少移位步數表

表六.（七）、1: 對換.不等長.中間棋子比較少(中瘦型）最少移位步數表

等長型		少1型		少2型		少3型		少4型		少5型		少6型		少7型		少8型	
1 1 1	7																
		2 1 2	15 (5)														
2 2 2	20			3 1 3	25 (7)												
		3 2 3	32 (7)			4 1 4	37 (9)										
3 3 3	39			4 2 4	46 (9)			5 1 5	51 (11)								
		4 3 4	55 (9)			5 2 5	62 (11)			6 1 6	67 (13)						
4 4 4	64			5 3 5	73 (11)			6 2 6	80 (13)			7 1 7	85 (15)				
		5 4 5	84 (11)			63 6	93 (13)			7 2 7	100 (15)			8 1 8	103 (17)		
5 5 5	95			6 4 6	106 (13)			7 3 7	115 (15)			8 2 8	120 (17)			9 1 9	127 (19)
		6 5 6	119 (13)			7 4 7	130 (15)			8 3 8	139 (17)			9 2 9	146 (19)		
6 6 6	132			7 5 7	145 (15)			8 4 8	156 (17)			9 3 9	165 (19)				
		7 6 7	160 (15)			8 5 8	173 (17)			9 4 9	184 (19)						
7 7 7	175			8 6 8	190 (17)			9 5 9	203 (19)								
		8 7 8	207 (17)			9 6 9	222 (19)										
8 8 8	224			9 7 9	241 (19)												
		9 8 9	260 (19)														
9 9 9	279																
棋步	步數(左下向右上斜向差)																

對換、棋子數中間比旁邊多（簡稱中胖型）的狀態分析：

（一）我們先將對換、棋子數中間比旁邊多（簡稱中胖型）的狀態分爲差一型、差二型等整理出如下表，

並列出互相間的差數關係如表六（七)、2。

表六（七)、2：對換、不等長、中瘦型最少移位步數表

表六.（七）、2: 對換.不等長.中間棋子比較多(中胖型）最少移位步數表

等長型		多1型		多2型		多3型		多4型		多5型		多6型		多7型		多8型	
1 1 1	7 (4)																
		1 2 1	11 (4)														
2 2 2	20 (6)			1 3 1	15 (4)												
		2 3 2	26 (6)			1 4 1	19 (4)										
3 3 3	39 (8)			2 4 2	32 (6)			1 5 1	23 (4)								
		3 4 3	47 (8)			2 5 2	38 (6)			1 6 1	27 (4)						
4 4 4	64 (10)			3 5 3	55 (8)			2 6 2	44 (6)			1 7 1	31 (4)				
		4 5 4	74 (10)			3 6 3	63 (8)			2 7 2	50 (6)			1 8 1	35 (4)		
5 5 5	95 (12)			4 6 4	84 (10)			3 7 3	71 (8)			2 8 2	56 (6)			1 9 1	39 ( )
		5 6 5	107 (12)			4 7 4	94 (10)			3 8 3	79 (8)			2 9 2	62 ( )		
6 6 6	132 (14)			5 7 5	119 (12)			4 8 4	104 (10)			3 9 3	87 ( )				
		6 7 6	146 (14)			5 8 5	131 (12)			4 9 4	114 ( )						
7 7 7	175 (16)			6 8 6	160 (14)			5 9 5	143 ( )								
		7 8 7	191 (16)			6 9 6	174 ( )										
8 8 8	224 (18)			7 9 7	207 ( )												
		8 9 8	242 ( )														
9 9 9	279 ( )																
棋步	步數(左上向右下斜向差)																

公式：**[旁*(旁+2)]*3-旁*2-(旁*2-2)*(旁-中)**

（二）由表中我們發現：

1.對換、棋子數中間比旁邊多（中胖型）的移位遊戲，差數相等（例如同爲差一型，即每一列的直行）則他們的最低步差值爲一個連續偶數，如表中（N）所示。

2.差數不相等（例如差一型對差二型）時，則沿著左上方向右下方斜向都具有相等的差值。

3.由上面兩種關係值交互使用即可以很快推出表中所有解答。

（三）檢查原來等長型及中瘦型的公式，經過修正後可以擴大使用範圍到對換、棋子數中間和旁邊（兩端）棋子數不等（包含中瘦型、中胖型）的所有狀態。

原來公式（等長型）：

三色對換移位遊戲最低步公式爲：

3 ×【棋子數 ×（棋子數 ＋ 2 ）】－棋子數 × 2

↓

擴大到中瘦型、等長型通用公式：

3 ×【大數 ×（大數 ＋ 2 ）】－（大數）× 2 －（大數 × 2+1）×（大數－小數）

↓

擴大到中胖型、中瘦型、等長型通用公式：

中胖型：

3 ×【旁邊數 ×（旁邊數＋ 2 ）】－（旁邊數）× 2 －（旁邊數 × 2+2）×（旁邊數－中間數）

中瘦型

3 ×【旁邊數 ×（旁邊數＋ 2 ）】－（旁邊數）× 2 －（旁邊數 × 2+1）×（旁邊數－中間數）

中胖型、中瘦型公式極爲相似，差別只在第三項+2 或+1 而已

例如 3－2－3 型（**中瘦型**）的最低移位步數：

$$3 \times【3 \times (3 + 2)】-(3 \times 2)-(3 \times 2 + 1) \times (3 - 2)$$
$$= 3 \times 15 - 6 - 7 \times 1$$
$$= 45 - 6 - 7 = 32$$

又如 4－5－4 型（**中胖型**）的等長型最低移位步數：

$$3 \times【4 \times (4 + 2)】-(4 \times 2)-(4 \times 2 + 2) \times (4 - 5)$$
$$= 3 \times 24 - 8 - 10 \times (-1)$$
$$= 72 - 8 + 10 = 74$$

最後一項產生一個負值作爲調節

新的公式不管等長或中瘦型、中胖型都能適用。

八、三色對換移位遊戲中如果可以連跳時，移動最低步之間是否具有規律性？

我們在研究過程中所建立的資料顯示，三色對換移位遊戲中如果可以連跳時，移位最低步都比不連跳時低，而且棋子數越多時節省的步數越多，但是沒有一定的規律可循，另外，在可以連跳的情形下，整個可能走法增加很多，困難度也大大增加，甚至一直到不久前【2004.02.26】還發現更省步走法，因此本子題仍未有最後結果，還等待最後結果。

九、三色對換移位遊戲中如果每種顏色棋子數不同時，棋子數中間比旁邊少（簡稱中瘦型）和棋子數中間比旁邊多（簡稱中胖型）的圖形整合。

前面的研究中，我們把**等長型**、**中瘦型**、**中胖型**的公式做了整合，接著我們將圖形做了整合，整合的方法是把**中瘦型**圖形用線對稱處理使它偏左縮小，以**等長型**爲中心連接右側的**中胖型**形成一個完整封閉圖形如下圖六.（九）.1 及六.（九）.2 可以更清楚相互間的關係。

（請參次頁 P25、26 跨頁圖）

輪換、不連跳、中瘦型																等長型		輪換、不連跳、中胖型															
差8型		差7型		差6型		差5型		差4型		差3型		差2型		差1型		等長型		多1型		多2型		多3型		多4型		多5型		多6型		多7型		多8型	
																111	6 (1)																
														212	12 (3)			121	7 (2)														
												313	20 (4)			222	15 (3)			131	9 (2)												
										414	31 (5)			323	24 (4)			232	18 (3)			141	11 (2)										
								515	43 (6)			424	36 (5)			333	28 (4)			242	21 (3)			151	13 (2)								
						616	58 (7)			525	49 (6)			434	41 (5)			343	32 (4)			252	24 (3)			161	15 (2)						
				717	74 (8)			626	65 (7)			535	55 (6)			444	46 (5)			353	36 (4)			262	27 (3)			171	17 (2)				
		818	93 (9)			727	82 (8)			636	72 (7)			545	61 (6)			454	51 (5)			363	40 (4)			272	30 (3)			181	19 (2)		
919	113 (10)			828	102 (9)			737	90 (8)			646	79 (7)			555	67 (6)			464	56 (5)			373	44 (4)			282	33 (3)			191	39 ( )
		929	123 (10)			838	111 (9)			747	98 (8)			656	86 (7)			565	73 (6)			474	61 (5)			383	48 (4)			292	36 ( )		
				939	133 (10)			848	120 (9)			757	106 (8)			666	93 (7)			575	79 (6)			484	66 (5)			393	52 ( )				
						949	143 (10)			858	129 (9)			767	114 (8)			676	100 (7)			585	85 (6)			494	71 ( )						
								959	153 (10)			868	138 (9)			777	122 (8)			686	107 (7)			595	91 ( )								
										969	163 (10)			878	147 (9)			787	130 (8)			696	114 ( )										
												979	173 (10)			888	156 (9)			797	138 ( )												
														989	183 (10)			898	165 ( )														
																999	193 ( )																
																棋步	步數(左上方向右下方斜向差)																
旁爲奇數：旁*(旁*2+4)-(旁+1)/2-(旁-1)*(旁-中)																		旁爲偶數：旁*(旁*2+4)-旁/2-(旁-1)*(旁-															
1-3-1以上之旁爲1的公式：旁*(旁*2+4)-(旁+1)/2-(旁)+(-中)																																	

表六.（九）、2：對換，等長、不等長（中瘦型）(中胖型) 最少移位步數整合總表

對換.不連跳.中瘦型																等長型		對換.不連跳.中胖型															
差8型		差7型		差6型		差5型		差4型		差3型		差2型		差1型		等長型		多1型		多2型		多3型		多4型		多5型		多6型		多7型		多8型	
																111	7 (4)																
														212	15 (5)			121	11 (4)														
												313	25 (7)			222	20 (6)			131	15 (4)												
										414	37 (9)			323	32 (7)			232	26 (6)			141	19 (4)										
								515	51 (11)			424	46 (9)			333	39 (8)			242	32 (6)			151	23 (4)								
						616	67 (13)			525	62 (11)			434	55 (9)			343	47 (8)			252	38 (6)			161	27 (4)						
				717	85 (15)			626	80 (13)			535	73 (11)			444	64 (10)			353	55 (8)			262	44 (6)			171	31 (4)				
		818	105 (17)			727	100 (15)			636	93 (13)			545	84 (11)			454	74 (10)			363	63 (8)			272	50 (6)			181	35 (4)		
919	127 (19)			828	122 (17)			737	115 (15)			646	106 (13)			555	95 (12)			464	84 (10)			373	71 (8)			282	56 (6)			191	39 ( )
		929	146 (19)			838	139 (17)			747	130 (15)			656	119 (13)			565	107 (12)			474	94 (10)			383	79 (8)			292	62 ( )		
				939	165 (19)			848	156 (17)			757	145 (15)			666	132 (14)			575	119 (12)			484	104 (10)			393	87 ( )				
						949	184 (19)			858	173 (17)			767	160 (15)			676	146 (14)			585	131 (12)			494	114 ( )						
								959	203 (19)			868	190 (17)			777	175 (16)			686	160 (14)			595	143 ( )								
										969	222 (19)			878	207 (17)			787	191 (16)			696	174 ( )										
												979	241 (19)			888	224 (18)			797	207 ( )												
														989	260 (19)			898	242 ( )														
																999	279 ( )																
																棋步	步數(左上方向右下方斜向差)																
公式：[旁*(旁+2)]*3-旁*2-(旁*2+1)*(旁-中)																		公式：[旁*(旁+2)]*3-旁*2-(旁*2+2)*(旁-中)															

柒、討論（對稱的深究）

研究過程中發現：

三色對換移位遊戲中等長型的部分，棋子數和最低步之間的一致性公式：

對換移位最低步數 ＝ 3 × 【棋子數 ×（棋子數 ＋ 2)】－棋子數 × 2

例如 2-2-2　最低步為：

3 × 【2 ×（2 ＋ 2)】 －2 × 2 ＝ 20

其中**【棋子數 ×（棋子數 ＋ 2)】**部分和二色移位遊戲的最低步公式是一樣的，而在我們研究過程中也有感覺到在對換移位遊戲中，除了 1－1－1 型以外，其他各型中間的棋子一直是形成一種障礙，它不可能不動，每一顆棋子都必須因讓位而離開，最後再回到原位，整個歷程好像經歷了三次二色移位遊戲，這也是造成**三色對換移位遊戲比三色輪換移位遊戲難移動，步數也比較多**的原因，但是它的移位總步數又比二色移位遊戲移動步數的三倍少一點，道理何在？

我們對此做了一番討論，並拿出早期一步步圖形紀錄資料檢查，終於讓我們找到原因：**由於三色對換移位遊戲有 2 個空位，在移動過程中棋子適當時機跨越可以造成省步效果**，圖示如下：(圖七.1)

二色移位遊戲最低移位步數＝ 2 ×（2 ＋ 2）＝ 8 步移動狀態圖：

圖七.1：二色移位遊戲最低移位圖：

步驟	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	○	○		●	●
1	○		○	●	●
2	○	●	○		●
3	○	●	○	●	
4	○	●		●	○
5		●	○	●	○
6	●		○	●	○
7	●	●	○		○
8	●	●		○	○

三色對換移位遊戲有 **2** 個空位，不跨越空格情形下相當於三次二色移位遊戲最低移位圖

（移位步數爲 8 × 3 ＝24）（圖七.2）

三色對換移位遊戲有 **2** 個空位，跨越空格情形下能低於三次二色移位遊戲最低移位圖

（移位步數爲 3 × 【2 × （2 ＋ 2)】 －2 × 2 ＝ 20）（圖七.3）

圖七.2：不跨越空格情形

步驟	1	2	3	4	5	6	7	8
0	🔴	🔴		○	○		●	●
1	🔴		🔴	○	○		●	●
2	🔴	○	🔴		○		●	●
3	🔴	○	🔴	○			●	●
4	🔴	○		○	🔴		●	●
5		○	🔴	○	🔴		●	●
6	○		🔴	○	🔴		●	●
7	○	○	🔴		🔴		●	●
8	○	○		🔴	🔴		●	●
9	○	○		🔴	🔴	●		●
10	○	○		🔴		●	🔴	●
11	○	○			🔴	●	🔴	●
12	○	○		●	🔴		🔴	●
13	○	○		●	🔴	●	🔴	
14	○	○		●	🔴	●		🔴
15	○	○		●		●	🔴	🔴
16	○	○		●	●		🔴	🔴
17	○		○	●	●		🔴	🔴
18	○	●	○		●		🔴	🔴
19	○	●	○	●			🔴	🔴
20	○	●		●	○		🔴	🔴
21		●	○	●	○		🔴	🔴
22	●		○	●	○		🔴	🔴
23	●	●	○		○		🔴	🔴
24	●	●		○	○		🔴	🔴

圖七.3：跨越空格情形

（第 **3** 步及第 **12** 步黃色背景部分）

步驟	1	2	3	4	5	6	7	8
0	🔴	🔴		○	○		●	●
1	🔴	🔴	○		○		●	●
2	🔴		○	🔴	○		●	●
3	🔴		○		○	🔴	●	●
4		🔴	○		○	🔴	●	●
5			○	🔴	○	🔴	●	●
6		○		🔴	○	🔴	●	●
7		○	○	🔴		🔴	●	●
8		○	○	🔴	●	🔴		●
9		○	○	🔴	●	🔴	●	
10		○	○	🔴	●		●	🔴
11		○	○		●	🔴	●	🔴
12		○		○	●	🔴	●	🔴
13		○	●	○		🔴	●	🔴
14	●	○		○		🔴	●	🔴
15	●	○		○	●	🔴		🔴
16	●	○	●	○		🔴		🔴
17	●	○	●	○			🔴	🔴
18	●	○	●		○		🔴	🔴
19	●		●	○	○		🔴	🔴
20	●	●		○	○		🔴	🔴

捌、結論

一.三色移位遊戲比二色移位遊戲難度高很多，且分成輪換和對換二種不同系統，對換由於中間棋子形成障礙，比輪換難度更高，所需移位的最低步數也比輪換多很多，且適用在等長型、中瘦型、中胖型等所有狀態，沒有例外。

二. 三色移位遊戲的移動、跳動過程具有對稱關係，移位進行中可以用來幫忙檢驗是否能達成最低步的指標。

三. 三色輪換移位遊戲等長型、中瘦型、中胖型可以整合出一個通用的公式，應用這個公式可以確認三色輪換移位遊戲的最低步。它的公式為：

> 輪換等長型、中瘦型、中胖型通用公式：
>
> 棋子數的旁邊數為奇數時：
>
> 旁邊數 ×（旁邊數 × 2＋ 4 ）－（旁邊數＋1）÷ 2 －（旁邊數＋1）×（旁邊數－中間數）
>
> 棋子數的旁邊數為偶數時：
>
> 旁邊數 ×（旁邊數 × 2＋ 4 ）－（旁邊數）÷ 2 －（旁邊數＋1）×（旁邊數－中間數）

四. 三色對換移位遊戲等長型、中瘦型、中胖型可以整合出一個通用的公式，應用這個公式可以確認三色對換移位遊戲的最低步。它的公式為：

> 對換等長型、中瘦型、中胖型通用公式：
>
> 中胖型：
>
> 3 ×【旁邊數 ×（旁邊數＋ 2)】－（旁邊數）× 2 －（旁邊數 × 2＋2）×（旁邊數－中間數）
>
> 中瘦型
>
> 3 ×【旁邊數 ×（旁邊數＋ 2)】－（旁邊數）× 2 －（旁邊數 × 2＋1）×（旁邊數－中間數）
>
> 中胖型、中瘦型公式極為相似，差別只在第三項＋2 或＋1 而已

玖、未來發展

經過超過半年的研究，我們解決了三色輪換移位遊戲及三色對換移位遊戲中等長型、中胖型、中瘦型的最低移位步數問題，但是我們作深入探討後；發現後面還有很多問題值得再進 一步探索，這是我們下一階段的目標，最重要的列舉如下：

一.等長型、中胖型、中瘦型以外的狀態，例如三個顏色棋子都不相同時，我們已做了一些研究，但是它的棋型太複雜，還無法整理出規律，希望下一階段能完成。

二. 三色移位遊戲比二色移位遊戲多了一個空格，從跳棋的觀點看應該把連跳作為一個重要變因，但我們研究過程中發現，可以連跳時整個狀況極為複雜還必須花很多時間去處理，是值得挑戰的目標。

拾、參考資料

一、建國中學四十九屆 314 班合譯。數學思考。1998.12.1 版。台北市。九章出版社（1995）。『走走跳跳』。（p207~210）。

二、國立台灣科學教育館。中華民國第 24 屆中小學科學展覽優勝作品專輯。1984.06.1 版。台北市。國立台灣科學教育館。中小學科學展覽初小組數學科全國第三名『有趣的移位遊戲』。（p220~233）。

三、國立台灣科學教育館。中華民國第 34 屆中小學科學展覽優勝作品專輯。1994.06.1 版。台北市。國立台灣科學教育館。中小學科學展覽高小組數學科全國第二名『毛毛蟲變蝴蝶~移位遊戲的新發現』。（p258~268）。

四、國立台灣科學教育館。中華民國第 41 屆中小學科學展覽優勝作品專輯。2000.06.1 版。台北市。國立台灣科學教育館。中小學科學展覽國中組數學科全國第二名『解開難題的奧秘--「個人移位跳棋」遊戲的探討』。

五、康軒文教事業教科書編輯群。六下數學課本。2004.02.3 版。台北市。康軒文教事業公司。線對稱（p12~17）。兩數量的變化關係（p88~97）。

六、葉偉文。葛老爹的推理遊戲 2。2002.04.1 版。台北市。天下文化。『一條龍方格棋』。

評　語

080404 國小組數學科 第一名

三色移位毛毛蟲—三色移位遊戲的探討

首次出現在全國的三色移位遊戲，難度比雙色移高很多，學生仍然能在大量的實驗中，找出最低步數，並歸納其規律性，並進一步擴展成中胖型及中瘦型，資料呈現及實驗日誌均極完整，學生在操作位移遊戲及講解作品時，非常熟練且觀念清楚，值得給予獎勵。