

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組生活與應用科學科

040806

國立宜蘭高級中學

指導老師姓名

潘炳麟

作者姓名

蘇緯倫

黃毓閔

曾楷文

# 最漂亮的一桿

## 壹、摘要：

此作品描述以電腦程式模擬物體發生碰撞的情形，結合物理、數學並融於生活實例——撞球，分成多個研究階段，分別解決理論及實際間的差異，最後發展成一個可預測完美球局的高手。

分成各種實驗階段，加入變因，諸如滾動摩擦力、球質量、撞球力道、方向等，由淺入深的討論，研究球與球桌、球與球的碰撞，提出解決問題的方法與其所衍生之相關問題，並以程式表現其結果。從開球起，每一桿皆預測出桿力道、方向，除讓球入洞外，母球並能移動到下一桿最有利之位置，一一將其他球打進，完成一個最漂亮的球局。

## 貳、研究動機：

某次上學校電腦課時，偷玩一下電腦裡的小遊戲，無意間按入一個花式撞球小 Game，那是一個普通又無聊的遊戲，卻讓我們興起將物理與電腦結合的念頭，利用 C 語言加入物理課所學碰撞的概念，模擬撞球撞擊時的變化情形與球反彈及進洞的過程。平常在欣賞電視中球檯上高手們的精彩球技時總是自嘆弗如，想著只將撞球作為消遣的我們，如何達到這種驚人的技巧？！於是我們想到若能將此模擬撞球程式和物理與數學結合，算出角度與力道，那麼即使我們只會最簡單的推桿、碰撞，也能打的與會各種撞擊技巧(例如弧圈球或跳球)的高手一樣好！

## 參、研究目的：

- 一、希望將物理、數學與電腦融入生活實例，並運用學校電腦課所學的程式設計知識，寫出球與球在行進、碰撞的各種情形之程式。
- 二、試著分成多個研究階段，由淺入深的作討論，來解決理論與實際上的差異，剖析撞球台之真正奧秘。

三、經由程式模擬，可預測一完美球局。當開第一球後(任意)後，運用程式來判斷往何方向打？需多用力？使球一一進洞。

四、此程式可作為設計一擬真度高的撞球比賽程式基礎及撞球練習機。

## 肆、研究設備器材：

- 一、電腦多部、磁片、隨身碟若干。
- 二、Turbo C <程式設計系統>。
- 三、EPSON 印表機、紙張若干。
- 四、電子秤(最大秤重 15 公斤、感量 1 公克)。
- 五、捲尺(長 5m)、長尺(長 60cm)，(最小刻度單位 0.1cm)。
- 六、撞球桌、花式撞球 16 顆。
- 七、自製打球出力裝置--撞球機(彈簧、鐵絲、木頭)、機油(潤滑油)。
- 八、光滑花岡岩蓋平台一座、透明光滑玻璃圓桌面一面。
- 九、光電計時器一台。

## 伍、研究過程或方法：

研究前最難的部份，是如何將真實生活上的東西，變成文字與數字的程式；我們先試著寫出一些簡單的模擬情形；在撰寫程式的過程中發現，許多數據並不能憑空臆測。為了更貼切實際狀況，我們利用物理原理設計實驗，來測量與推導程式中必要的數值(例如：摩擦力、各種恢復係數、各撞球設備之規格)與公式，測量結果即可輸入程式中，再配合我們的程式想法，完成讓我們成為高手的撞球程式；以下分為〈階段一〉數據測量與公式推導和〈階段二〉想法及討論過程來說明理論部分。

## 〈階段一〉. 基本設定、數據測量與公式之推導

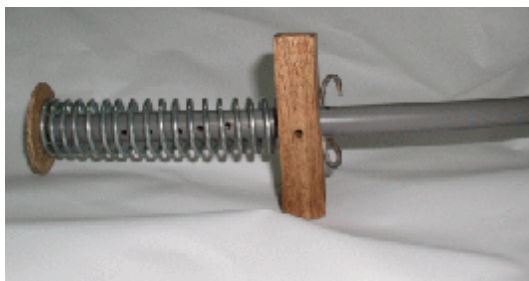
前言：為使程式更符合事實及更為精確，我們設計用以測量球桌面之摩擦力、球與球碰撞之恢復係數、球與球桌邊碰撞之恢復係數的實驗。

### 實驗(一)：基本測量

- 一、目的：量出球桌、球的基本物理性質。
- 二、方法：利用尺、電子秤測量球桌長度及球的質量。
- 三、結果： 撞球半徑( $r$ )：5.50cm。 撞球質量( $m$ )：171g。  
中袋大小：橢圓長軸 10.00cm、短軸 9.00cm。  
底袋大小：橢圓長軸 12.00cm、短軸 11.00cm。  
球桌內圍長寬：長 254.00cm、寬 127.00cm。
- 四、討論：每個撞球設備都不同，但差異不大，在使用程式時，可依不同狀況輸入實際值；之後的實驗，我們就以家裡設備所測出之數值為標準。

### 實驗(二)：控制力與速度

- 一、目的：控制力與速度的大小，並求之。
- 二、方法：
  - (一) 撞球機製作：我們利用彈簧自製了一整套能控制固定力道強弱的設備。製作方法如下：
    1. 將彈簧固定在木塊上。
    2. 利用水管當作壓縮彈簧之工具，並在水管上鑽洞；壓縮彈簧後以鐵條插入固定，以控制彈簧之壓縮量。



(二) 製作光滑平面、減少摩擦力：

1. 使用花崗岩平面並打臘使其光滑使摩擦力減到最小。
2. 在玻璃桌面抹潤滑油，使摩擦力減到最小。
3. 撞球機塗上潤滑油，使水管能拉放自如。

(三) 將撞球放置在光滑平面上，用撞球機將撞球推出，使撞球獲得速度。

(四) 利用光電計時器儘可能將兩道雷射光束距離減到最小，測得其行進之時間；再將距離除以時間就得到速度。

三、結果：

(一) 兩道雷射光束距離為 10.00cm。

(二) 下面是球被不同壓縮量之彈簧推出後，經過兩道雷射間之時間。

(三) 單位： 時間 t：sec 速度 V：cm/sec

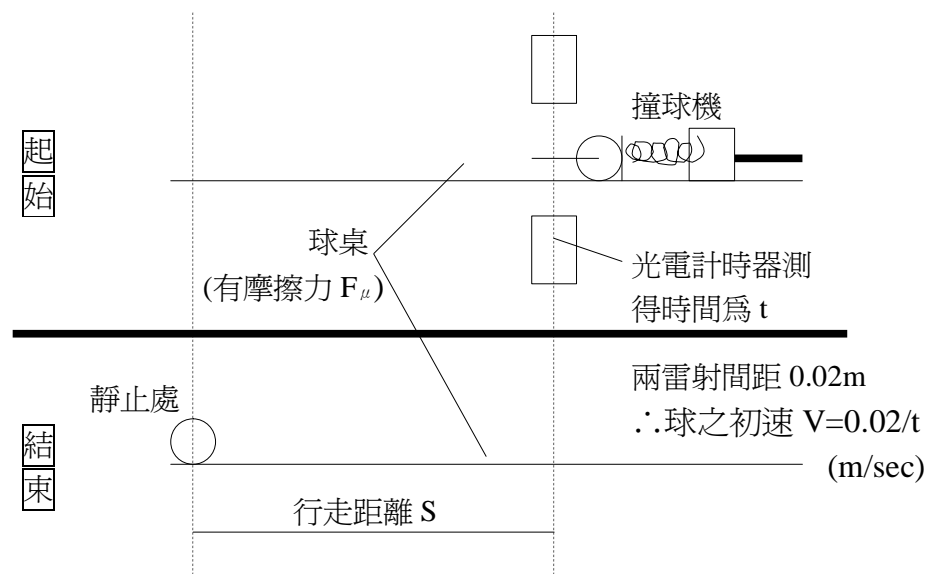
| 次數 \ 種類 | 機制一    | 機制二    | 機制三    | 機制四    | 機制五    | 機制六    | 機制七    |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1       | 0.1262 | 0.0949 | 0.0593 | 0.0442 | 0.0468 | 0.0353 | 0.0243 |
| 2       | 0.1300 | 0.0955 | 0.0646 | 0.0462 | 0.0474 | 0.0472 | 0.0257 |
| 3       | 0.1319 | 0.0887 | 0.0596 | 0.0502 | 0.0493 | 0.0383 | 0.0251 |
| 4       | 0.1252 | 0.0872 | 0.0621 | 0.0598 | 0.0487 | 0.0398 | 0.0288 |
| 5       | 0.1216 | 0.0842 | 0.0576 | 0.0574 | 0.0428 | 0.0385 | 0.0278 |
| 6       | 0.1303 | 0.0831 | 0.0792 | 0.0481 | 0.0527 | 0.0396 | 0.0318 |
| 7       | 0.1248 | 0.0855 | 0.0631 | 0.0497 | 0.0465 | 0.0403 | 0.0312 |
| 8       | 0.1232 | 0.0881 | 0.0580 | 0.0520 | 0.0422 | 0.0396 | 0.0298 |
| 9       | 0.1363 | 0.0880 | 0.0799 | 0.0484 | 0.0593 | 0.0474 | 0.0298 |
| 10      | 0.1248 | 0.0827 | 0.0676 | 0.0575 | 0.0510 | 0.0390 | 0.0307 |
| 11      | 0.1324 | 0.0791 | 0.0634 | 0.0563 | 0.0434 | 0.0401 |        |
| 12      | 0.1353 | 0.0854 | 0.0603 | 0.0552 | 0.0523 | 0.0407 |        |
| 13      | 0.1270 | 0.0898 | 0.0599 | 0.0600 | 0.0533 | 0.0388 |        |
| 14      | 0.1291 | 0.1084 | 0.0594 | 0.0583 | 0.0511 | 0.0410 |        |
| 15      | 0.1393 | 0.0882 | 0.0593 | 0.0486 | 0.0494 | 0.0416 |        |
| 16      | 0.1210 | 0.0821 | 0.0589 | 0.0508 | 0.0473 | 0.0427 |        |
| 17      | 0.1306 | 0.0941 | 0.0648 | 0.0470 | 0.0490 | 0.0400 |        |
| 18      | 0.1376 | 0.0954 | 0.0583 | 0.0480 | 0.0520 | 0.0360 |        |
| 19      | 0.1336 | 0.0830 | 0.0658 | 0.0564 | 0.0497 | 0.0377 |        |
| 20      | 0.1329 | 0.0873 | 0.0778 | 0.0501 | 0.0504 | 0.0390 |        |
| 平均 T    | 0.1297 | 0.0885 | 0.0639 | 0.0522 | 0.0492 | 0.0401 | 0.0295 |
| 平均初速    | 77.13  | 112.95 | 156.38 | 191.53 | 203.13 | 249.19 | 350.88 |

※所謂某機制即在撞球機之水管上的不同洞，插入鐵條所得不同之彈簧壓縮量。

四、討論：之後的實驗需控制球之初速，而人力難以精準掌控，我們便利用彈簧做出可自由調節且固定力量的裝置；而撞球機制每次打出的力量雖相近卻又不完全相同，所以作多次實驗求平均值，來代表某號機制打出的速度，亦即可知球擊出之初速。實驗結果便可應用至之後測量摩擦力與恢復係數。

### 實驗(三)：摩擦力之測量

- 一、目的：測量球桌桌面對撞球行進時之摩擦力。
- 二、方法：



### 三、結果：

(一)依力學能守恆求摩擦力  $F_\mu$ ：

摩擦力作功 = 質心動能 + 轉動動能

$$F_\mu * S = (1/2)mV^2 + (1/2)I\omega^2 = (7/10)mV^2$$

(球體之轉動慣量  $I = (2/5)mr^2$ )

$$F_\mu = (7mV^2)/(10S)$$

(二)運算結果

| 單位 | m/sec  | cm     | Nt             | m/sec <sup>2</sup> |
|----|--------|--------|----------------|--------------------|
| 次數 | 初速 V   | 行走距離 S | 摩擦力( $F_\mu$ ) | 每秒減慢速度(a)          |
| 1  | 0.9259 | 51.00  | 0.2012         | 1.1767             |
| 2  | 0.9390 | 50.00  | 0.2069         | 1.2101             |
| 3  | 0.8065 | 39.50  | 0.1526         | 0.8927             |
| 4  | 0.8547 | 46.00  | 0.1715         | 1.0027             |

|    |        |       |        |        |
|----|--------|-------|--------|--------|
| 5  | 0.9217 | 50.00 | 0.1994 | 1.1659 |
| 6  | 0.9050 | 51.00 | 0.1922 | 1.1241 |
| 7  | 0.8850 | 49.70 | 0.1838 | 1.0749 |
| 8  | 0.9569 | 54.30 | 0.2149 | 1.2569 |
| 9  | 0.9569 | 54.10 | 0.2149 | 1.2569 |
| 10 | 0.9479 | 49.70 | 0.2109 | 1.2332 |
| 11 | 0.9259 | 51.90 | 0.2012 | 1.1767 |
| 12 | 0.9009 | 49.00 | 0.1905 | 1.1140 |
| 13 | 0.9390 | 48.30 | 0.2069 | 1.2101 |
| 平均 |        |       | 0.1955 | 1.1434 |

#### 四、討論：

球桌上的摩擦力是影響球行進不可忽略之因素。藉上一實驗之撞球機制，我們已能有效的控制球被擊出時之初速。於是我們給予球不同的速度，並分別測試其行走距離。得到的每組摩擦係數的數據約略相同，最後以其平均值應用至程式內。

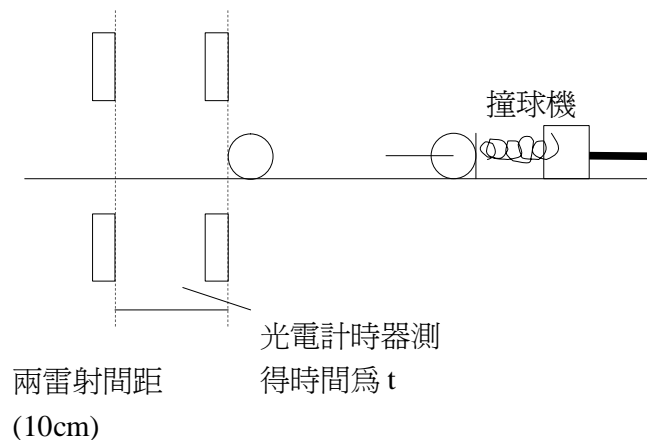
#### 實驗(四)：恢復係數測量

##### 實驗(四)之一：球與球碰撞時之恢復係數

##### 一、目的：

因為球並不是剛體，球與球碰撞時，能量未能完全傳遞，利用實驗(二)之一所製作的撞球機測出速度與恢復係數兩者之間的關係。

##### 二、方法：



(一)於一光滑平面上劃一直線，使撞球機與第一顆球及被撞球同在此線上並固定每次的放置點。

(二)固定光電計時器於被撞球之後。

(三)利用撞球機撞第一顆球後，第一顆球繼續前進撞被撞球，使被撞球通過光電計時器，紀錄此時間，得其速度。

三、結果：

(一)獲得初速度與撞後速度，即可求恢復係數：

1.利用高中的碰撞公式(推導如下)

|  |   |
|--|---|
| <p>令球 A, B 質量均為 <math>m</math>，初速度分別為 <math>V_1, V_2</math>，撞後速度分別為 <math>V_1', V_2'</math>，即其間之恢復係數 <math>e = \frac{V_2' - V_1'}{V_1 - V_2}</math></p> <p>又球與球碰撞前後，動量守恆：<math>V_1 - V_2</math></p> <p>列 <math>mV_1' + mV_2' = mV_1 + mV_2</math></p> <p>即 <math>V_1' + V_2' = V_1 + V_2 \dots \bullet</math></p> <p>再者，由 <math>e</math> 定義可得 <math>V_2' - V_1' = e V_1 - e V_2 \dots</math>，</p> <p>由 <math>\bullet</math>，化簡即得</p> $V_1' = \frac{1-e}{2} V_1 + \frac{1+e}{2} V_2$ $V_2' = \frac{1+e}{2} V_1 + \frac{1-e}{2} V_2$ | <p>若以轉動觀點解釋類推之則碰撞前後角動量守恆 <math>I\omega_1' + I\omega_2' = I\omega_1 + I\omega_2</math></p> <p>化簡後亦可得到 <math>V_1' + V_2' = V_1 + V_2 \dots \bullet</math></p> |
|--|---|

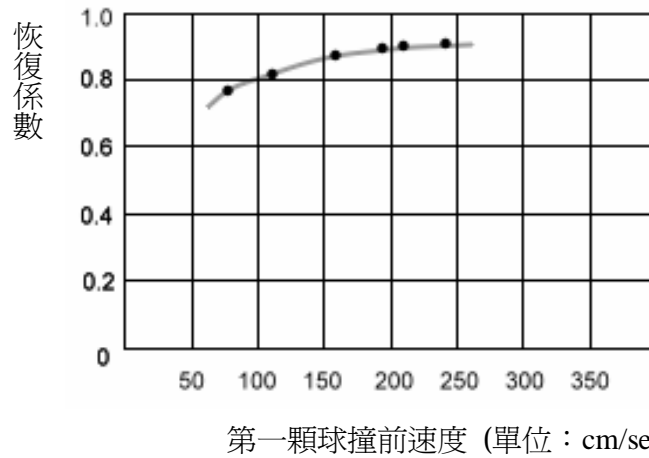
2.利用實驗(二)的初速(第一顆球)與本實驗測得之被撞球撞後速度代入碰撞公式得到恢復係數  $e$ 。

| 被撞球之 t<br>種類 | 機制一    | 機制二    | 機制三    | 機制四    | 機制五    | 機制六    |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1            | 0.1498 | 0.1020 | 0.0713 | 0.0553 | 0.0518 | 0.0412 |
| 2            | 0.1459 | 0.0910 | 0.0745 | 0.0550 | 0.0483 | 0.0400 |
| 3            | 0.1462 | 0.0950 | 0.0679 | 0.0566 | 0.0494 | 0.0427 |
| 4            | 0.1446 | 0.0960 | 0.0676 | 0.0574 | 0.0523 | 0.0410 |
| 5            | 0.1479 | 0.0947 | 0.0664 | 0.0524 | 0.0492 | 0.0447 |
| 6            | 0.1422 | 0.0933 | 0.0648 | 0.0582 | 0.0510 | 0.0403 |
| 7            | 0.1437 | 0.0950 | 0.0674 | 0.0523 | 0.0506 | 0.0405 |
| 8            | 0.1443 | 0.0949 | 0.0680 | 0.0560 | 0.0492 | 0.0416 |
| 9            | 0.1483 | 0.0977 | 0.0700 | 0.0536 | 0.0550 | 0.0398 |
| 10           | 0.1410 | 0.1032 | 0.0715 | 0.0534 | 0.0556 | 0.0423 |
| 平均 T(sec)    | 0.1454 | 0.0963 | 0.0689 | 0.0550 | 0.0512 | 0.0414 |
| 撞後速度 cm/s    | 68.78  | 103.86 | 145.05 | 181.75 | 195.16 | 241.49 |
| 恢復係數 e       | 0.784  | 0.839  | 0.855  | 0.898  | 0.926  | 0.938  |



四、討論：

(一) 求出之恢復係數，可製成以下圖表：



(二) 球與球撞擊時能量的轉換取決於  $e$ 。若  $e=1$  代表能量完全轉換，是最理想的狀態。但現實必有差別！我們將初速漸漸提高，再將數據結果以圖繪出。發現是一漸升曲線，隨著速度的提高  $e$  趨近於 1。這個現象經過我們討論，認為可能是球並非一完整剛體，所以隨著撞擊初速的提高，能量轉移更趨完全。

(三) 由圖表發現速度 50~250 區間(此範圍接近於人力出桿後之速度)，第一顆球撞擊初速與恢復係數之關係接近於  $\log$  之圖形，我們將此寫成一通式，此有利於程式之撰寫：

$$e = \log_{9.6}(5.374 + V)$$

推導：(V 為初速，e 為恢復係數)

$$\text{可設 } e = \log_a(V+b) \quad V \text{ 單位為 m/sec}$$

$$\text{原式化為 } a^e = V+b$$

$$\text{代入實驗數據：} a^{0.855} = 1.564 + b$$

$$a^{0.898} = 1.915 + b$$

$$\text{相減解 } a \doteq 9.6 \quad \text{代入得 } b \doteq 5.374$$

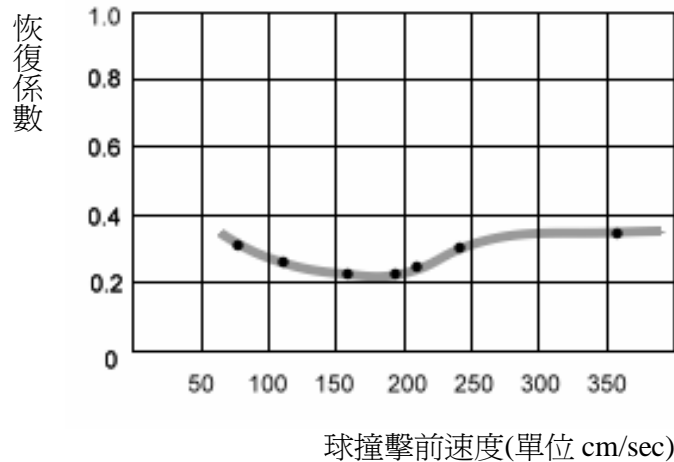
實驗(四)之二：球桌對球之恢復係數

- 一、目的：同實驗(四)之一。
- 二、方法：同實驗(四)之一步驟，只是被撞球改為球桌。
- 三、結果：依實驗(四)之一推導之公式，求恢復係數。

| 次數 \ 種類   | 機制一    | 機制二    | 機制三    | 機制四    | 機制五    | 機制六    | 機制七    |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1         | 0.3919 | 0.2752 | 0.2790 | 0.1665 | 0.1837 | 0.1375 | 0.0843 |
| 2         | 0.3901 | 0.3175 | 0.2915 | 0.2478 | 0.2055 | 0.1243 | 0.0816 |
| 3         | 0.3756 | 0.3614 | 0.2479 | 0.2093 | 0.1709 | 0.1208 | 0.0821 |
| 4         | 0.3902 | 0.3283 | 0.2763 | 0.2585 | 0.1644 | 0.1320 | 0.0876 |
| 5         | 0.4200 | 0.3161 | 0.2896 | 0.1880 | 0.2135 | 0.1207 | 0.0761 |
| 6         | 0.3669 | 0.3247 | 0.2599 | 0.1605 | 0.1732 | 0.1235 |        |
| 7         | 0.4106 | 0.3521 | 0.2535 | 0.2009 | 0.1431 | 0.1262 |        |
| 8         | 0.4049 | 0.3102 | 0.2731 | 0.2136 | 0.1932 | 0.1262 |        |
| 9         | 0.4258 | 0.3502 | 0.2821 | 0.2117 | 0.1693 | 0.1281 |        |
| 10        | 0.3872 | 0.2889 | 0.2386 | 0.2334 | 0.1701 | 0.1240 |        |
| 平均 T(sec) | 0.3963 | 0.3225 | 0.2692 | 0.2090 | 0.1787 | 0.1263 | 0.0823 |
| 撞後速度 V    | 25.23  | 31.01  | 37.15  | 47.84  | 55.96  | 79.16  | 121.45 |
| 恢復係數 e    | 0.327  | 0.275  | 0.238  | 0.250  | 0.276  | 0.318  | 0.346  |

四、討論：

(一) 求出之恢復係數，可製成以下圖表：



(二) 當圖形在  $V=50\sim 250$  區間(此範圍接近於人力出桿後之速度)初速與恢復係數之關係接近於拋物線之圖形， $V>250$  人力較不能達到，此時恢復係數向 0.4 趨近。

當  $V=50\sim 250$  之間

$$e=0.106(V-1.66)^2+0.243 \quad V \text{ 單位：m/sec}$$

推導：(V 為初速，e 為恢復係數)

設  $e=k(V-a)^2+b$  代入三組實驗資料

$$0.275 = k(1.129-a)^2+b \quad - (1)$$

$$0.250 = k(1.915-a)^2+b \quad - (2)$$

$$0.318 = k(2.492-a)^2+b \quad - (3)$$

$$(1) - (2) \quad 0.025 = k(3.044-2a)(-0.786) \quad - (4)$$

$$(2) - (3) \quad -0.068 = k(4.407-2a)(-0.577) \quad - (5)$$

(4) / (5) 可求出  $a=1.66$  代入(4)求  $k=0.106$

代入(1)得  $b=0.243$  即可求出  $k$ 、 $a$ 、 $b$ 。

(三)以上測量恢復係數的結果，除了使模擬貼近實際狀況外，更重要的是應用在定桿與非定桿的打法上，就是利用不完全的能量傳遞使母球能滑行到下一桿有利的位置，繼續完成球局。

總結：以上實驗，求出我們程式中必須用到的數值，下面則算出力量與距離的通式，將實驗測得的數據代入，即可用到程式中，為程式計算上重要的公式。

■ 程式變數設定及導出力與距離之關係： $S=(7\Delta T^2 F^2)/(10 F_\mu m)$

此公式可用於程式中，知力的大小與球走的距離之關係。

■ 基本設定：  
 $S$ ：球行走的距離       $\Delta T$ ：球桿與球接觸時間  
 $m$ ：球質量       $g$ ：重力加速度       $F_\mu$ ：球桌與球的摩擦係數  
 $V$ ：球被撞後末速       $F$ ：球桿施予球的力量

■ 推導：令撞前球之初速度  $V_0=0$

$\therefore$ 衝量 = 動量變化  $\therefore F \times \Delta T = m \times (V - V_0) \quad V = F \times \Delta T / m$

依力學能守恆  $\Rightarrow F_\mu * S = \text{質心動能} + \text{轉動動能}$

$$\Rightarrow F_\mu * S = (1/2)mV^2 + (1/2)I\omega^2$$

$$\Rightarrow F_\mu * S = (7/10)mV^2$$

$$(\text{球體之轉動慣量 } I = (2/5)mr^2)$$

$$\Rightarrow S = (7mV^2)/(10 F_\mu)$$

$$\Rightarrow S = (7\Delta T^2 F^2)/(10 F_\mu m)$$

## 〈階段二〉 程式撰寫之思路與想法

前言：前階段數據公式之推導，可用於程式中，使程式更為擬真；下階段即是研究、撰寫程式之思路與想法。

### 探討(A)：基本規則與設定

- 一、將球桌視為  $X*Y$  之座標平面，為了思考上及討論上的方便，將之分割成 1 公分為 1 單位的座標平面（訂  $\downarrow \rightarrow$  為正），用以方便撰寫程式。
- 二、程式輸出目標有：
  - (一) 找出白球逐次打的方向(向量)？
  - (二) 各次所需力量的多寡？
  - (三) 撞後各球的停留位置為何？
  - (四) 各個球在進行過程中之能量轉移與變化情形。
  - (五) 並利用 Turbo C 的圖形功能，顯示球碰撞的過程、行徑路線及停留位置，表示出完美球局的流程。
  - (六) 其它：初始條件、附加功能...等。
- 三、規則：“九號球” 比賽規則如下
  - (一) 開球後必須有球進洞才能繼續打，但開球時九號球進則獲勝〈本程式不考慮，因設定打者為初學者〉。
  - (二) 開球後必須以白球與球檯面上球號最小開始碰撞，依序撞球，途中 9 號球進則為勝。

### 探討(B)：簡化題目----質點之一度空間完全彈性碰撞

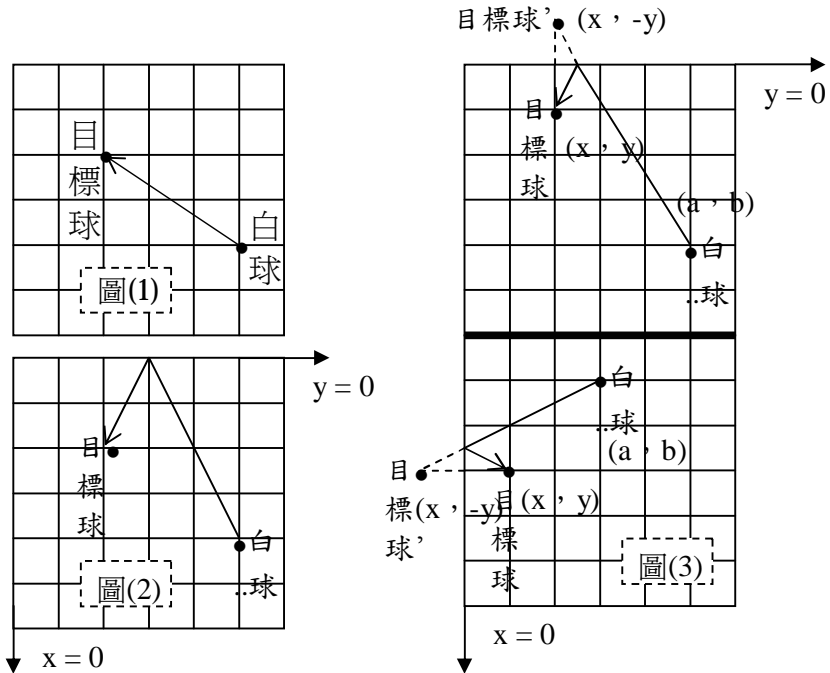
- 一、試著在最簡單的條件下，撰寫球撞球的情形及球路的變化程式。
  - 簡化條件：
    - (一) 將球先視為一質點。
    - (二) 球與球之碰撞皆為正向完全彈性碰撞。
    - (三) 設定為二質點之碰撞(白球與目標球)。
    - (四) 設定目標球為靜止，只有白球移動。
  - 基本碰撞法：
    - (一) 質點直接碰撞〈如圖(1)〉

白球以目標球位置 $(x_1, y_1)$  — 白球位置 $(x_2, y_2)$ 之向量前進者稱之，撞擊後速度交換。

程式中若撞到上下邊界，行進向量變為 $(x_1-x_2, -(y_1-y_2))$ ，若左右則變為 $(-(x_1-x_2), y_1-y_2)$ 。

(二) 反彈後碰撞〈如圖(2)〉〈如圖(3)〉

(也可反彈兩次以上後前進，視情況而定)



二、將質點推廣至球→考慮球之半徑：

測量得球之半徑為 2.25 公分；討論與(一)(二)的步驟相同，結果也皆相同；而推廣至球後進階的狀況，將再探討(C) 討論。

探討(C) 兩顆「球」的二度空間完全彈性碰撞

一、討論方向、條件：

- (一) 球由質點轉成有半徑的球後，需考慮斜向碰撞。
- (二) 找出不同的打法，要使基本、普遍的打法適用於各種情形。
- (三) 讓程式能先判斷目前遇到的是何種局面，選擇適合的打法。
- (四) 要紀錄白球撞後變化及要討論如何去撞，使目標球進洞。
- (五) 設目標球為靜止，唯白球移動。

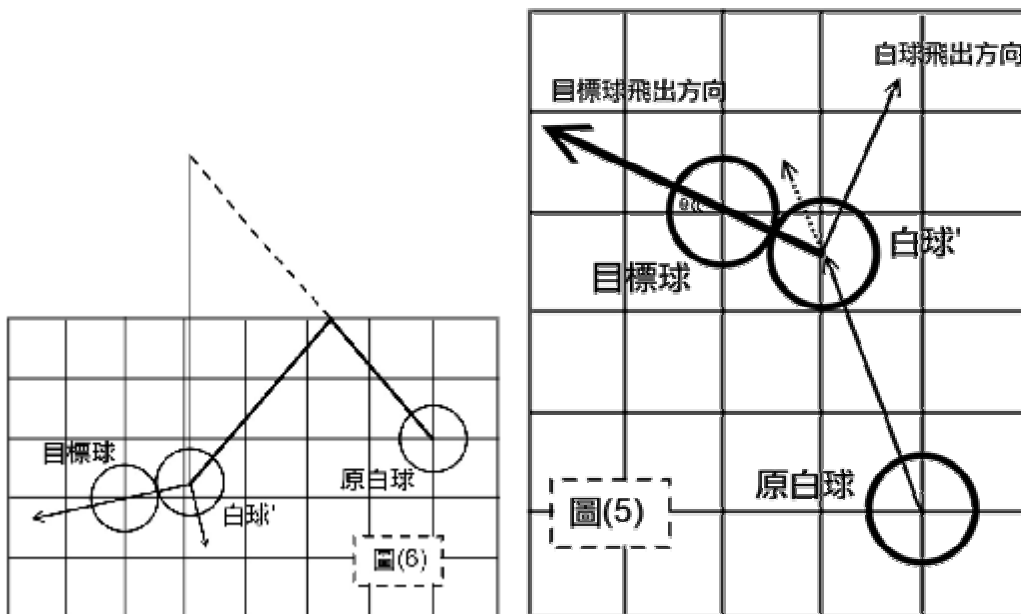
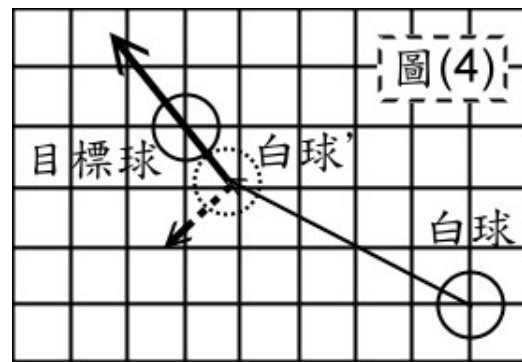
二、斜向碰撞：

(一)作法 a：(如圖(4)、圖(5))

撞擊後目標球以兩球連心線方向飛出，白球以目標球飛出向量的垂直向量飛出。若將此觀念應用於實際程式上，需先算出目標球該飛出的向量，再藉由連心線算出擊出白球所需的力量及方向，只要目標球質心位置與球袋圓心位置距離小於球袋半徑－球半徑就表入洞。

(二)作法 b：反彈後斜向碰撞：〈如圖(6)〉

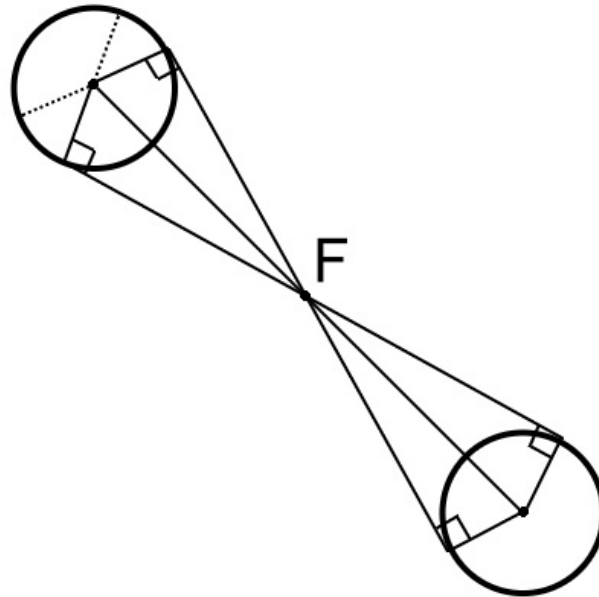
(三)作法 c：斜向碰撞後目標球反彈牆壁進洞：



(四)打球條件限制：

- 原理：依白球與目標球的相對位置，使目標球撞出的向量有**限制**。

如下：



- (1) 設白球座標(c, d)，目標球座標(a, b)，則兩公切線交點 F 之座標為( (a+c)/2 , (b+d)/2 )。

- (2) 兩切線方程式可設為  $y = m \times (x - (a+c)/2) + (b+d)/2$

- (3) 所以程式要由斜率 m 開始±0.001(以逼近法逼近)，逼近到

$$\frac{|m(a - \frac{a+c}{2}) - b + \frac{b+d}{2}|}{\sqrt{m^2 + 1}} \pm \frac{|m(c - \frac{a+c}{2}) - d + \frac{b+d}{2}|}{\sqrt{m^2 + 1}} \text{ 都} \approx 0.5, \text{ 才執行。}$$

- (4) 令兩公切線斜率分別為  $m_1, m_2$  且  $m_1 > m_2$ ，則斜率條件為

壹、 $m_1, m_2$  同號  $\rightarrow m_2 < m_{\text{目標}} < m_1$

貳、 $m_1, m_2$  異號  $\rightarrow \begin{cases} m_{\text{目標}} < m_2 \\ \text{or} \\ m_{\text{目標}} > m_1 \end{cases}$

- (若向量想要**沒有限制**的，可利用前面的作法 b 與作法 c。)

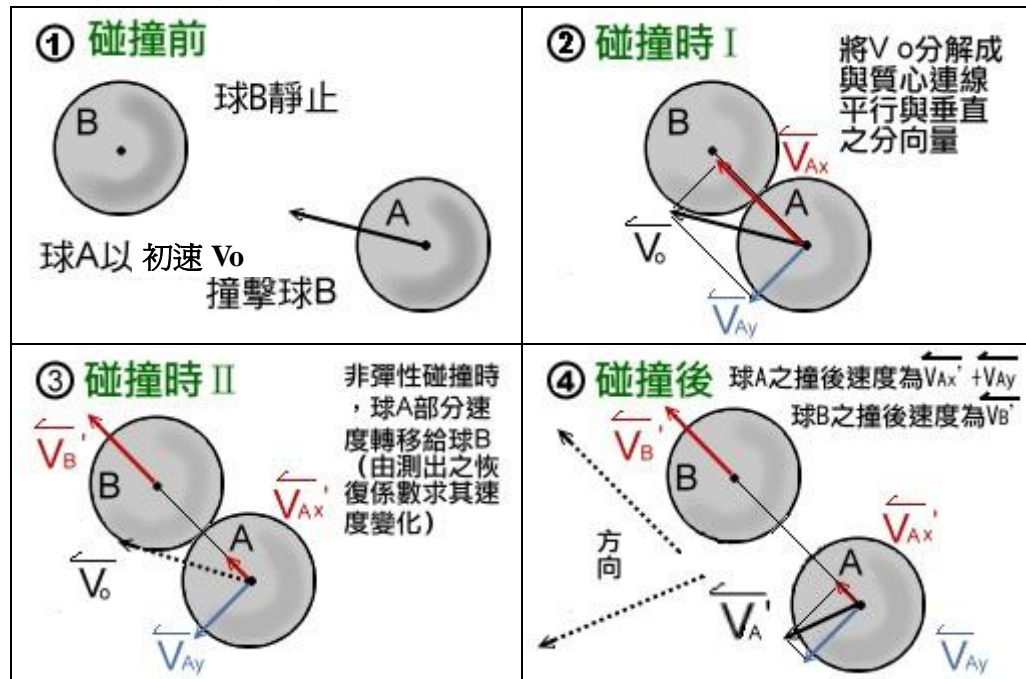
探討(D) . 球與球之非完全彈性碰撞

一、前言：

實際上，球並非剛體，碰撞為非完全彈性碰撞，需加考慮球與球碰撞及球與球桌碰撞之恢復係數，前面以測出其值，下面討論變化情形。

二、討論：

(一) 目標球(球 B)靜止：



(二) 白球(球 A)與目標球(球 B)皆有速度：

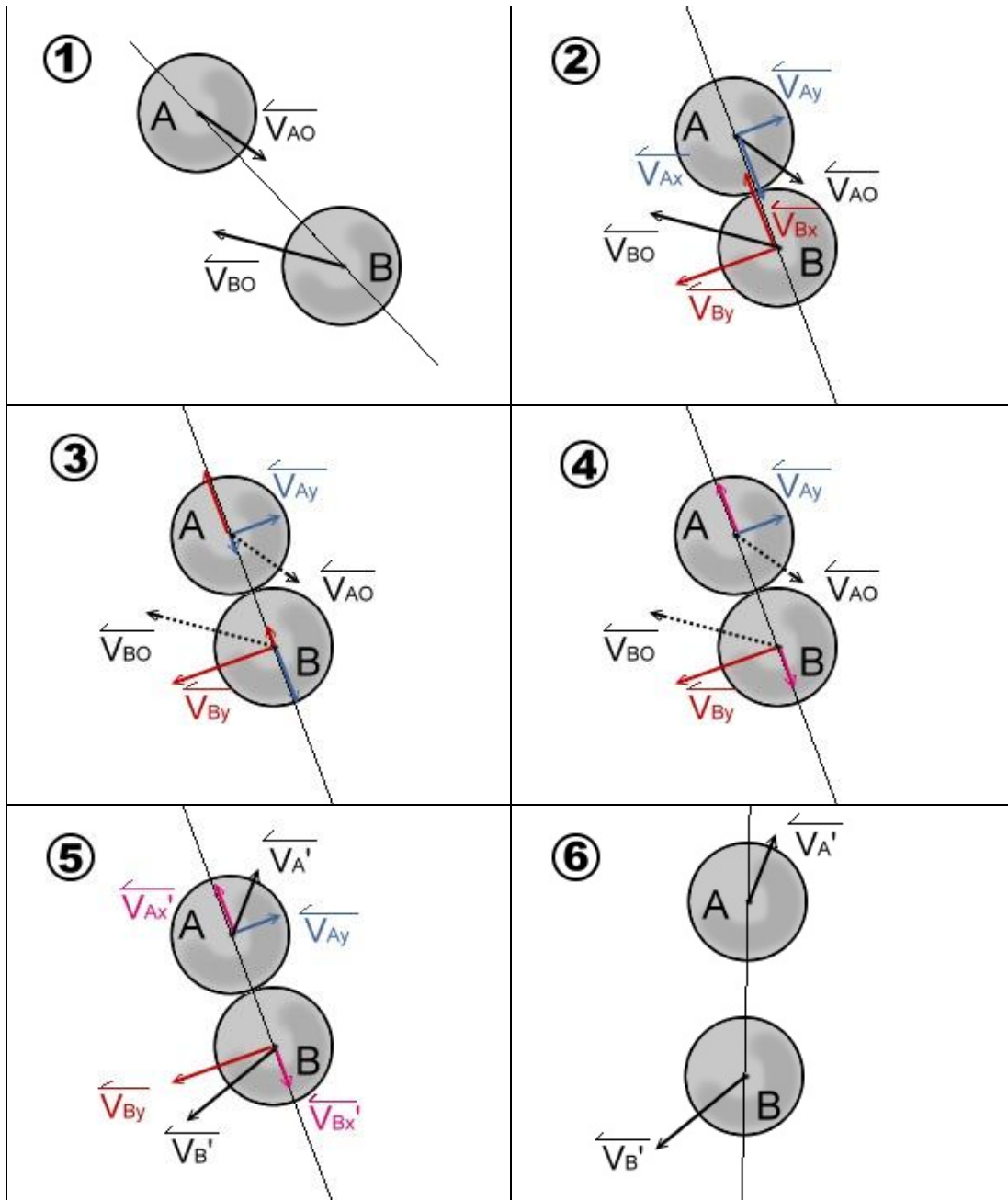
兩球撞擊時，各分解其速度向量於連心線與垂直連心線之兩軸 XY。兩球 Y 軸速度向量保持不變，而 X 軸速度向量因球間之恢復係數  $\neq 1$  而與完全彈性碰撞時速度交換之情形不同，需運用前面導出之碰撞前後速度變化公式，算出撞後之速度。

公式：

$$V_1' = \frac{1-e}{2} V_1 + \frac{1+e}{2} V_2$$

$$V_2' = \frac{1+e}{2} V_1 + \frac{1-e}{2} V_2$$





### 探討(E) 主題程式函數

#### 一、前言：

前面已撰寫球移動、撞擊的程式和方法，我們接著討論特殊的流程、階段。先分成不同主題討論，最後將一個一個的程式當作函數，組成一整體主程式。

## 二、程式函數

(一)球桌、球桿顯示：將球桌轉為座標，運用各種繪圖函數製成。

(二)排球：以九號球為中心座標，依半徑算出各球之座標後，排列。  
一號球依規定排在最前面第一個位置，而除九號球與一號球外其他各球順序為隨機排列。

(三)開球：

1.原理：

設有 1、2 球，兩球速度分別為  $V_1$ 、 $V_2$ 。其互相對撞，則撞後，1 球的末動量等於 1 球原來動量  $mV_1$  加上  $m_2$  作用在  $m_1$  上之衝量  $F_{21}*\Delta t$ ，即可求出末速度  $V_1'$ ，2 球之末速度求法亦然：

$$\text{算式： } mV_1' = mV_1 + F_{21}*\Delta t \quad , \quad mV_2' = mV_2 + F_{21}*\Delta t$$

2.測試：

藉改變力大小、白球初始位置及擊出的角度，找出在一開球後，即能有球入袋條件，再進階找是否有兩顆三顆....一球就進洞的方法。

(四)使球能依實際速度減慢的方法(程式上)：

降低球的速度算法：

$$\text{撞擊後速度： } V_0 = F \times \Delta T / M$$

$$\text{總時間： } \quad \text{以 } S = V_0 t - at^2 \text{ 求出 } t$$

$$\text{又 } a = F\mu / m$$

$$\text{每走 } S \text{ 距離之速度： } V_1 = \sqrt{(V_0^2 - 2aS)}$$

爲了使計算精準每 0.1 秒計算一次，計算過程如下：

$$\text{撞擊} \sim 0.1 \text{ 秒： } \quad \text{走了 } S = V_0 \times 0.1$$

$$\quad \quad \quad \text{速度爲 } V_1 = \sqrt{(V_0^2 - 2aS)}$$

$$0.1 \text{ 秒} \sim 0.2 \text{ 秒： } \quad \text{走了 } S = V_1 \times 0.1$$

$$\quad \quad \quad \text{速度爲 } V_2 = \sqrt{(V_1^2 - 2aS)}$$

以此類推直到算至  $t-0.1 \sim t$  秒則停止。

(五)動態繪圖：原理：繪圖→停留→清除→畫上新位置。

(六)記憶功能：經測試將能進球的位置、角度、力量記憶於記事本中，並集成一資料庫以便於擷取。

## 陸、研究結果：

- 一、成功實行了將多顆球順利打到目標點之方法。
- 二、順利找出白球逐次打的方向(向量)、各次所需力量的多寡、撞後各球的停留位置、各個球在進行過程中之能量轉移與變化情形。
- 三、成功利用 Turbo C 的圖形功能，動態的顯示完整球局，及利用路徑顯示打法。
- 四、能夠預知步驟，譜出一漂亮的打法、完整的球局，使球順利進洞。
- 五、自製一台擊球機，可控制球的初速。
- 六、成功將物理實驗器材改裝成可測量球速之機器。
- 七、求出球碰撞時，球速及恢復係數間的關係曲線。
- 八、求出球與桌面滾動摩擦力。

## 柒、討論：

這是由一個遊戲所觸發的靈感，而它一點都不符合物理原理，於是讓我們有股將事實重現的衝動，就是將真正的物理原理，利用程式設計呈現現實生活上的科學實例，並研發成一創意程式。

我們由簡單兩質點開始分析。進而越加深入考慮球之半徑，體積，撞擊角度等，配合現學現實的物理知識，不斷尋找球的各種碰撞情形。然而打法千百種，不可勝找，我們的研究方向便轉變為找出普遍又基本的撞法，能適用於各種狀況的程式，從開局，即能精準地控制擊球的方向與力道，並將母球送到下一桿最有利的位罝，而一一將所有子球撞擊入袋。

然而程式導出的理論值與現實仍有差距。我們發現的可能原因有以下幾點 1.人打球時力量無法精確控制 2.球轉動的影響 3.動能沒有完全傳遞。於是我們利用彈簧設計出可控制力量速度大小的機械，並運用家中現有的撞球設備做實際測量，包含了球重、摩擦係數、球桌大小、球袋半徑代入程式以及進一步測量球與球、球與球桌邊的恢復係數，務求將理論與實際的差距縮到最小。

做實驗時，我們碰上許多困難。例如測量球桌上的球速，我們曾尋求適當儀器的幫助，卻始終無法找到，於是使用手邊現有的儀器設計了一整套的實驗。像是利用光電計時器測出球在光滑平面位移一段極小距離的時間，進而求出球初速。

## 扒、結論：

- 一、理論上的理想狀態，實際上必須加以修正考慮各種實際發生的變因，例如：滾動摩擦、接觸時間、恢復係數等因素，能模擬實際狀況。
- 二、撞球高手用的定桿（完全彈性碰撞）與球速有關，球速越大越易完成定桿，且呈現函數關係(可參照實驗四)。
- 三、要將母球移動到下一桿擊球的最有利位置必須考慮滾動摩擦之大小與恢復係數的影響。
- 四、利用 TurboC 的圖形功能，動態的顯示完整球局，可清楚的看到出桿方向和力道，可作為撞球練習與碰撞理論的驗證。

## 玖、參考文獻：

- 一、邱榮崇 蔡美琴 楊秋娟 / TurboC 技術參考手冊 / 道明出版社
- 二、洪冰儒 / 看實例學 TurboC 入門與應用 / 碁峰資訊

■ 實驗照片:



待測物



光電計時器



質量測量



撞球機製作草圖



製作撞球機



初速實驗



球對球恢復係數實驗



球對桌恢復係數實驗



摩擦力實驗

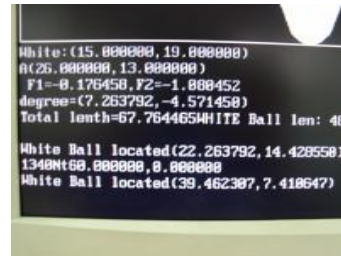
■ 程式照片:



第一版



第一版



數據顯示



第二版



第二版



第二版

## 評語

040806 高中組生活與應用科學科

最漂亮的一桿

本作品結合物理、數學及電腦模擬，研討物體發生碰撞之情形，並期以此發展出一個可預測完美球局之可能性。探討之主題動機純正，具學理研究之價值。主題的選取，若能先行的上網搜尋該研究目前之發展情況，選擇前人未曾探討或不夠深入之課題，則能在同樣時間及人力之情況下，提出新創意作出更高的貢獻度。