中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040421

國立鳳新高級中學

指導老師姓名

蔡燦熙

陳柏宇

作者姓名

陳柏翰

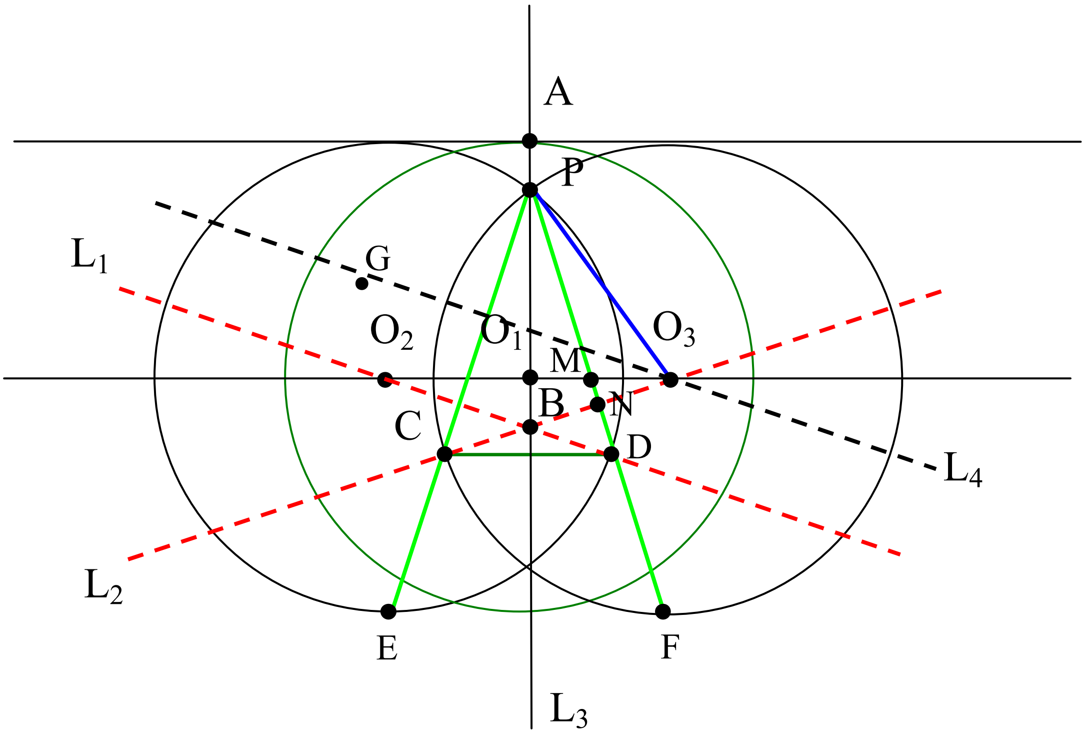
洪毅群

蔡柏緯

孫旻瓘

兩圓相交部份的

內接三角形之最大面積



兩圓相交部份的內接三角形之最大面積

壹.研究動機

圓在一般日常生活中扮演著十分重要的角色，最常見的如硬幣、球、輪胎、……等，都是由圓所產。在國小的時候，就已開始接觸圓這種圖形，當時認為圓是一種看似容易的圖，但國小所了解的卻十分粗淺，並不了解圓的真實面貌。在國中時學到了一些圓內弧度，與圓心角的課程，並且學了三角形的定理與規則，而在國中老師的課外補充中，粗略的知道三角函數的公式與方法，更讓我們對圓內的圖形產生了興趣。

上了高中後，隨著課程的擴大與加深，高一下時學了三角函數的公式，發現與之前國中所的有些不同，不僅公式多出許多，推導的方式也不盡相同，在幾何學的領域中隱藏的奧妙，更是耐人尋味。

高二上時所教圓方程式，不論是圓的標準式、坐標法、參數式、圓與直線的關係……，顛覆了之前對圓的看法，並產生許多疑問，在老師的引導下，我們開始嘗試相交圓內，所圍成的圖形面積，但如果在交圓內畫正方形或長方形等圖形太過於簡單，為了配合高中所學，老師提議在兩圓之交集內畫出最大三角形面積，因此找了幾位同學一同討論，有了一些新奇的想法與成果，老師便鼓勵我們參加科展，學以致用

貳.研究目的

一.利用尺規作圖找出各種交圓之交集部分最大三角形。

二.觀察各種交圓之交集部分最大三角形的型態。

三.將所有的最大三角形之面積公式化。

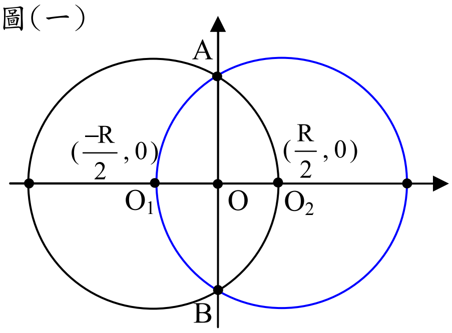
參.研究過程及方法

剛開始想這個問題時，給人的直覺反應，就是先求面積，然後比較大小，但是除了一些較特殊的三角形外，其它的要找面積，其實是困難重重，更何況對兩等圓來說，相交狀況也有很多種。經過一番討論後，我們初步試了下列幾個方法：

一.坐標法和行列式

兩等圓交集部分為一橄欖形區塊，只要在周長上任取相異三點即可成為一個三角形。我們試著把交圓放入直角坐標系，以便標出三點之坐標，並利用行列式求面積。為了計算上的方便，我們選擇了其中一種特殊的相交情形，即當兩等圓互相通過彼此圓心時，(如圖(一))。

圖(一)



此時，我們設圓半徑為 R，則可分以下兩種情形討論：

(一). 當兩點落在$\overset{\frown}{AO_1B}$上而一點落在$\overset{\frown}{AO_2B}$所構成的三角形(註：依對稱原理，左右互換後，結果是一樣的。)，則此三點可用圓參數式表之，即

圓 O_1上的一點：$(R\cos\alpha-\frac{R}{2},R\sin\alpha)$ ， $\frac{-\pi}{3}\le\alpha\le\frac{\pi}{3}$

圓 O_2 上的兩點：$(R\cos\beta+\frac{R}{2},R\sin\beta)$ ， $\frac{2\pi}{3}\le\beta\le\frac{4\pi}{3}$

$(R\cos\gamma+\frac{R}{2},R\sin\gamma)$ ， $\frac{2\pi}{3}\le\gamma\le\frac{4\pi}{3}$

$$\therefore\ 三角形面積=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} R\cos\alpha-\frac{R}{2} & R\cos\beta+\frac{R}{2} & R\cos\gamma+\frac{R}{2} & R\cos\alpha-\frac{R}{2} \\ R\sin\alpha & R\sin\beta & R\sin\gamma & R\sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$=\frac{R^2}{2}\left|\cos\alpha\sin\beta-\frac{1}{2}\sin\beta+\cos\beta\sin\gamma+\frac{1}{2}\sin\gamma+\cos\gamma\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right.$$

$$\left.-\cos\beta\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha-\cos\gamma\sin\beta-\frac{1}{2}\sin\beta-\cos\alpha\sin\gamma+\frac{1}{2}\sin\alpha\right|$$

$$=\frac{R^2}{2}|\sin(\beta-\alpha)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)-\sin\beta+\sin\gamma|$$

(二). 當三點皆落在$\overset{\frown}{AO_1B}$上(註：依對稱原理，左右互換後，結果是一樣的。)，則此三點可用圓參數式表之，即圓 O_1上的三點：

$(R\cos\alpha-\frac{R}{2}, R\sin\alpha)$，$(R\cos\beta-\frac{R}{2}, R\sin\beta)$，$(R\cos\gamma-\frac{R}{2}, R\sin\gamma)$，$\frac{-\pi}{3}\le\alpha, \beta, \gamma\le\frac{\pi}{3}$

$$\therefore\ \text{三角形面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} R\cos\alpha-\frac{R}{2} & R\cos\beta-\frac{R}{2} & R\cos\gamma-\frac{R}{2} & R\cos\alpha-\frac{R}{2} \\ R\sin\alpha & R\sin\beta & R\sin\gamma & R\sin\alpha \end{matrix}\right|$$

$$=\frac{R^2}{2}\Big|\cos\alpha\sin\beta-\frac{1}{2}\sin\beta+\cos\beta\sin\gamma-\frac{1}{2}\sin\gamma+\cos\gamma\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$-\cos\beta\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha-\cos\gamma\sin\beta+\frac{1}{2}\sin\beta-\cos\alpha\sin\gamma+\frac{1}{2}\sin\alpha\Big|$$

$$=\frac{R^2}{2}\left|\sin(\beta-\alpha)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)\right|$$

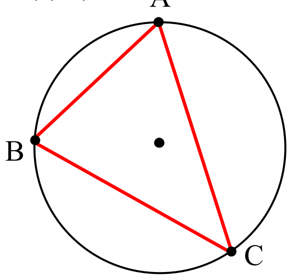
根據上述情形 α、β、γ 為三個變數，此式子不能再化簡。如果利用三角函數值表來求得各個三角函數值，再算面積，依然能夠清楚地找出每個三角形之面積，但仍然相當麻煩，而且無法直接指出最大三角形的所在位置。最大的缺點在於兩圓相交的情況，當兩圓相交發生改變時，即圓心位置有了變動，則必須再重新推導一次公式。換句話說，上述兩式子，只適用於兩等圓互相通過彼此圓心時。

二.三角形的底、高和尺規作圖

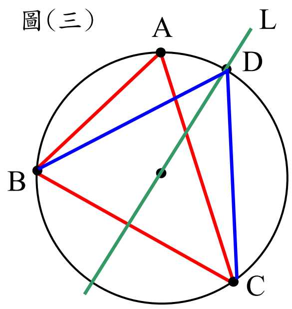
(一). 當我們開始研究兩等圓交集部分之最大三角形之前，我們必須先了解兩交圓的狀況。因為兩圓相交有很多種情況，且其交集部分的三角形面積也不易求得，於是我們利用三角形同底比高的特性來解決問題，所以研究前的首要工作就是先簡化問題。我們可以考慮一個圓，並將它視為兩等圓重疊，也就是說，這也是兩圓相交的其中一種特例。

1.圓中的任意三角形

圖(二)



圖(三)

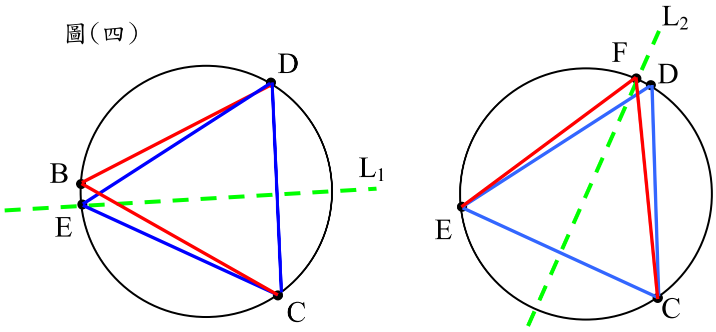


如圖(二)，在圓周上任取相異三點 A、B、C 形成一三角形。觀察此三角形的三邊，作 $\overline{BC}$ 的中垂線 L，使 L 交 $\overparen{BAC}$ 於 D，(如圖(三))，則 $d(D, \overline{BC})$ 為最大值，即 $\overparen{BAC}$ 上 D 點距 $\overline{BC}$ 最長。

對 ΔBDC，ΔABC 來說：aΔBDC > aΔABC

2.圓中的最大三角形

圖(四)

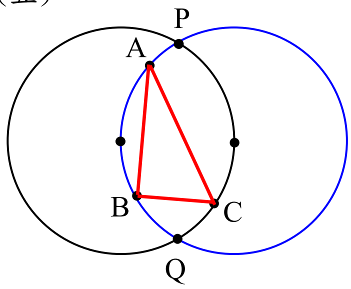


利用上面的性質，我們可以對 ΔBCD 持續作圖。因為 BC 邊上的高已達最大值，所以可以找 BD 邊或 CD 邊，重覆之前利用中垂線的性質去作圖，(如圖(四))。就這樣一直到最後，(如圖(四)中的 ΔCEF)，我們發現此三角形會趨向於一個正三角形，其即為我們所要求的最大三角形。(aΔABC < aΔBCD < aΔCDE < aΔCEF < ………)

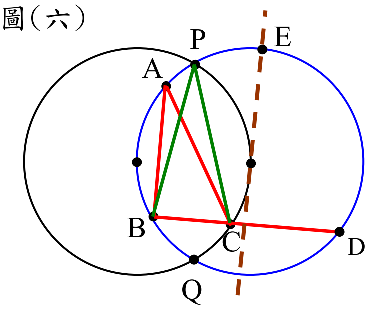
(二). 接下來，我們便可以開始討論交圓的交集部分之三角形。推廣先前對圓的作法，將其方法應用在交圓的交集部分上。同樣地，為了作圖上的方便和一致性，我們先選擇了當兩等圓互相通過彼此圓心時的相交情形。

1.兩等圓交集部分之任意三角形

圖(五)



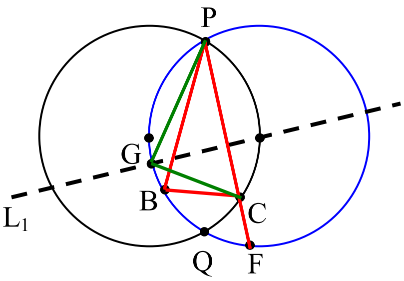
圖(六)



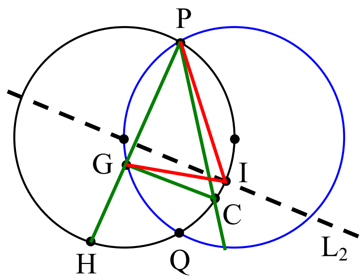
如圖(五)，在交集部分的周長上任取三點 A、B、C，形成一三角形。觀察此三角形的三邊，延長 $\overline{BC}$ 線段交圓 O_1 於 D，作 $\overline{BD}$ 的中垂線 L 交 $\widehat{BPD}$ 於 E ，(如圖(六))，則 $d(E,\overline{BD})$ 為最大值，即 $\widehat{BPD}$ 上 E 距 $\overline{BD}$ 最長，但 E 點並不落在交集部分的周長上，不過對 P 點而言，既在周長上，且 $d(P,\overline{BD})$ 為之中最大者，於是 P 點才是我們所要的。對 ΔPBC，ΔABC 來說：aΔABC < aΔPBC

2.兩等圓交集部分之最大三角形

圖(七)-1



圖(七)-2



利用上面的性質，我們可以對 ΔPBC 持續作圖。因為 BC 邊上的高已達最大值，所以可以找

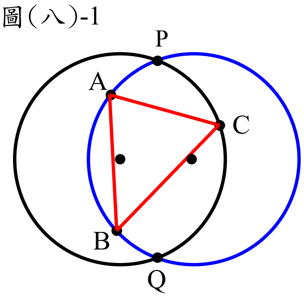
PB 邊或 PC 邊，重覆之前利用中垂線的性質去作圖，(如圖(七))。就這樣一直到最後，我們發現，此三角形會趨向於一個以 P 為頂點的等腰三角形(如圖(七)中的 ΔPKN)，而其即我們所要求的最大三角形。

$(a\Delta ABC < a\Delta PBC < a\Delta PGC < a\Delta PGI < a\Delta PIK = a\Delta PKN)$

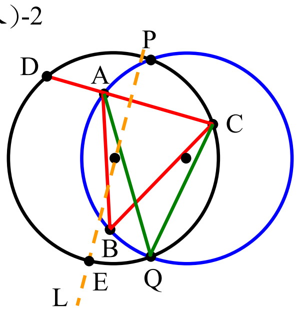
(三).若改變兩圓之圓心位置，也就是橄欖形區塊變寬或變窄時。同樣地，利用先前的作法，亦可找出每種交圓的交集部分之最大三角形(如圖(八))。

而圖中的 ΔQHJ，即我們所要求的最大三角形。(註：因為當橄欖形區塊變窄時，不利作圖，故省略)(註：圖(八)-3 中，L_1 過 A 點表示以 QC 邊為底的三角形，$a\Delta AQC$ 為最大，所以只好找 QA 邊繼續作圖。)$(a\Delta ABC < a\Delta AQC < a\Delta AQH < a\Delta QHJ)$

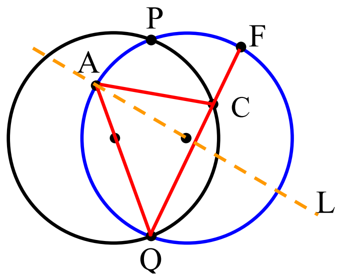
圖(八)-1



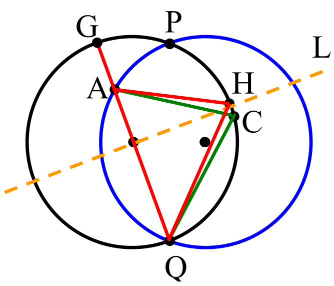
圖(八)-2



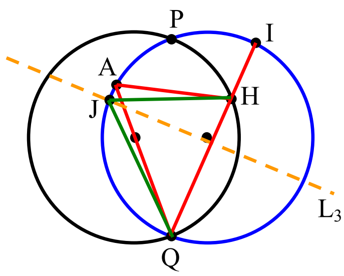
圖(八)-3



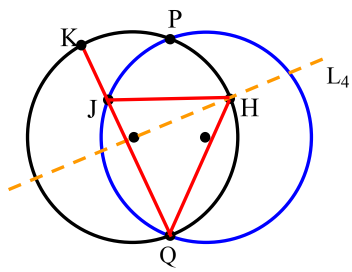
圖(八)-4



圖(八)-5



圖(八)-6



肆.研究結果

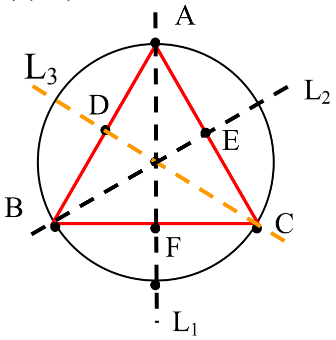
一.最大三角形之型態

根據先前的作圖顯示，對於一個交圓圖形，在其交集部分的周長上任取一個三角形，經過中垂線性質的作圖方法，每一個三角形變到最後，皆會趨於某種以 P 或 Q 為頂點的等腰三角形，而無法再作圖，那麼為什麼這些等腰三角形會是這些交圓的最大三角形呢？

我們作了以下的分析：

(一).圓

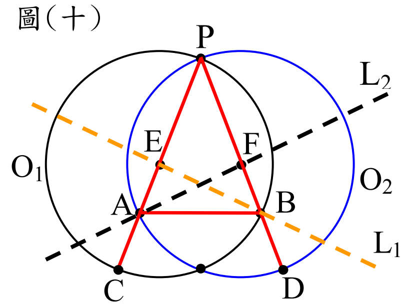
圖(九)



考慮一個圓，且內接一正三角形 ABC，(如圖(九)，然後作三邊之中垂線 L_1 、L_2、L_3。發現 L_1、 L_2、 L_3 各經過 A、B、C 三點。我們作了這樣的解釋：對於$\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$三邊， $d(A,\overline{BC})$ 、$d(B,\overline{AC})$ 、$d(C,\overline{AB})$均各為其最大值，即正三角形 ABC 中，以 AB 邊為底有最大高$\overline{CD}$線段，以 BC 邊為底有最大高$\overline{AF}$線段，以 AC 邊為底有最大高$\overline{BE}$線段，所以此為圓內接最大三角形。

(二).交圓

圖(十)



那些以 P 點或 Q 點的等腰三角形中也是可以利用圓的觀念，來作解釋為何其面積會最大。我們任取一種交圓，經過先前的尺規作圖後留下 ΔPAB，(如圖(十))，(註：亦可參考圖(八)- 6 來作思考)。現在我們延長$\overline{PA}$和$\overline{PB}$，分別交圓 O_1、O_2於 C、D 兩點，且各作$\overline{PC}$和$\overline{PD}$線段之中垂線 L_1、L_2。我們可發現 L_1 會通過 B 點，L_2 會通過 A 點，也就是$d(A,\overline{PD})$和$d(B,\overline{PC})$為最大值，即 ΔPAB 中，以 PA 邊為底有最大高$\overline{BE}$，以 PB 邊為底有最大高$\overline{AF}$，當然，以 AB 邊為底亦有最大高，所以此為交圓的最大三角形

(三).對所有交圓來說，其交集部分之最大三角形均有下列幾個特徵：

1.其必為一以 P 或 Q 為頂點之等腰三角形，因為底邊須和連心線平行，這樣才有機會取得平衡，(如圖(十))。當 A、B 一旦不同高時，就可以繼續使用中垂線性質再作圖。所以先決條件此必為一等腰三角形。

2.如圖(十)，A 為$\overset{\frown}{PAD}$之中點，B 為$\overset{\frown}{PBC}$之中點，除了要有等腰三角形此條件外，A、B 兩點還要為兩弧中點，才可形成最大三角形。

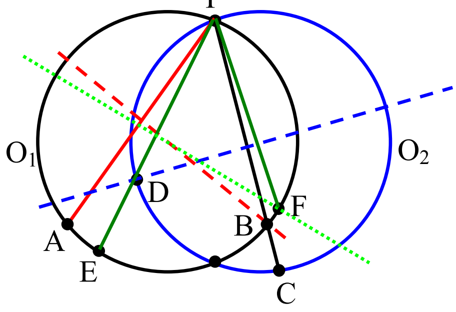
3.延長兩腰後交於兩圓各一點，得兩割線，(如圖(十)之$\overline{PC}$和$\overline{PD}$)，此兩割線之中垂

線必會通過等腰三角形底邊的兩個點，(如圖(十)之 A、B 兩點)

二.最大三角形之簡易作法

要作出一個交圓之交集部分的最大三角形，並不是很快，根據先前的作法必須要經過多次的作圖，非常麻煩，但是研究結果顯示，我們了解了最大三角形的一些特徵，若應用這些特徵，可以去掉一些不必要的步驟，如圖(十一)。

圖(十一)



1.任取一種交圓，並在圓 O_1 取一點 A，連接 $\overline{PA}$

(註：取 A 點時，可先猜測一下最大三角形的位置)

2.作 $\overline{PA}$ 之中垂線交圓 O_1 之右半部於 B，並連接 $\overline{PB}$

3.延長 $\overline{PB}$ 交圓 O_2 於 C，作 $\overline{PC}$ 之中垂線交圓 O_2 之左半部於 D，並連接 $\overline{PD}$。

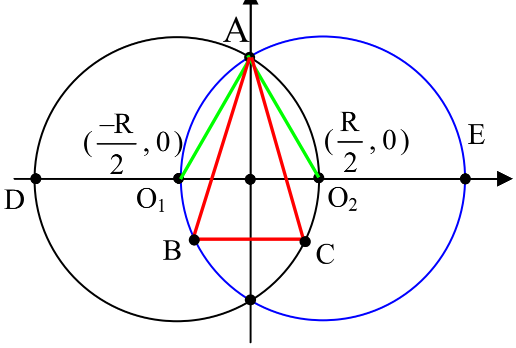
4.延長 $\overline{PD}$ 交圓 O_1 於 E，作 $\overline{PE}$ 之中垂線交圓 O_1 之右半部於 F，並連接 $\overline{PF}$。就這樣一直持續作圖下去，一樣能夠找出最大三角形，此作法即利用了弧中點的觀念，也就是中垂線性質。只不過我們固定了頂點 P，使得三角形只剩下兩點作移動，一旦兩點都滿足了弧中點，則作圖就大功告成了。

三.驗證面積

之前所探討的最大三角形均藉由尺規作圖來解釋，現在我們挑幾個較特殊的三角形來和最大三角形作面積比較，為了計算方便，我們延用先前的行列式面積公式來求最大三角形面積，當然它的交圓情況是當兩圓互相通過彼此圓心時。但求面積之前，必須先找出 α、β、γ 角之度數。

(一).α、β、γ 角

圖(十二)

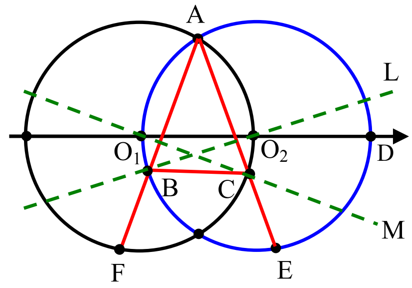


如圖(十二)，將 C 點歸類於圓 O_1 ，A、B 兩點歸類於圓 O_2。設圓半徑為 R，A 點坐標為 $(R\cos\beta+\frac{R}{2}, R\sin\beta)$ ，B 點坐標為

$(R\cos\gamma+\frac{R}{2}, R\sin\gamma)$，C 點坐標為$(R\cos\alpha-\frac{R}{2}, R\sin\alpha)$ ，α,β,γ 的假設，完全配合先前的公式，要注意一下相關位置。

由圖可知，ΔAO_1O_2 為一正三角形，所以$\angle AO_2D=\beta=120^0$ ，(如圖(十三))，L 為$\overline{AE}$之中垂線，M 為$\overline{AF}$之中垂線

圖(十三)



$\gamma = 180^0 + \angle O_1O_2B = 180^0 + \angle O_2BC = 180^0 + (90^0 - \angle C)$

$= 270^0 - \angle C$，

$\alpha = -\angle O_2O_1C = -\angle O_1O_2B = -(90^0 - \angle C) = -90^0 + \angle C$

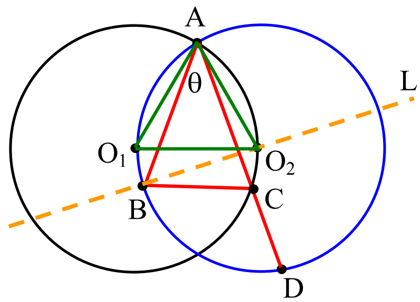
但是我們並不知道$\angle C$ 為幾度，所以必須先求出$\angle C$ 或$\angle A$。

(二).求頂角 A 和最大三角形面積

如圖(十四)，L 為$\overline{AD}$之中垂線。$\overset{\frown}{BD}=2\theta$，因為 B 為$\overset{\frown}{ABD}$之中點，得$\overset{\frown}{AB} = 2\theta = \angle AO_2B$

$\angle O_1O_2B = 2\theta - 60^0 = \angle O_2BC$，$\therefore \angle O_2BC + \angle C = 90^0$

圖(十四)



即$(2\theta-60^0) + (90^0 - \frac{1}{2}\theta) = 90^0$，$\therefore \theta = 40^0$，$\angle C=70^0$

而 $\alpha = -20^0$，$\beta = 120^0$，$\gamma = 200^0$，將其代入面積公式：

$\therefore a\Delta ABC$

$$= \frac{K^2}{2}\left|\sin(\beta-\alpha)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)-\sin\beta+\sin\gamma\right|$$

$$= \frac{K^2}{2}\left|\sin(140^0)+\sin(-220^0)+\sin(80^0)-\sin(120^0)+\sin 200^0\right|$$

$$= \frac{K^2}{2}\left|\sin(40^0)+\sin(40^0)+\sin(80^0)-\sin(120^0)-\sin 20^0\right|$$

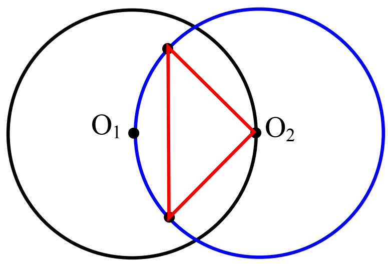
$$= \frac{K^2}{2}\left|2\sin 40^0\cos 0^0+2\cos 50^0\sin 30^0-\sin 120^0\right| = \frac{K^2}{2}\left|2\sin 40^0+\cos 50^0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$=\frac{K^2}{2}\left|3\sin 40^0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\fallingdotseq\frac{K^2}{2}\left|3\times0.6428-0.8660\right|\fallingdotseq0.5312K^2$$

(三).比較

將 $0.5312R^2$ 這個數值和一些特別的三角形的面積作比較，如正三角形，其面積= $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2 \fallingdotseq 0.4330\,R^2$，等腰直角三角形，(如圖(十五))，其面積= $\frac{1}{2}R^2=0.5R^2$，顯然，面積雖相差不多，但還是有差別。

圖(十五)



伍.討論

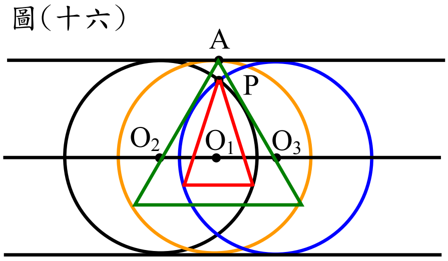
當利用行列式公式求最大三角形面積時，要先知道許多條件才能算出，若兩等圓圓心位置發生改變，而公式就必須重新推導，重新求角度，如果條件不足就很可能算不出來，非常沒有效率。

針對這個問題，要使所有交圓之交集部分內的最大三角形面積都可清楚表示，我們引用了高二上學期所學的圓系之概念，來解決這最大的難題。

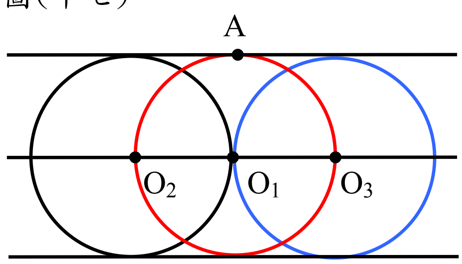
一.圓系與交圓

如圖(十六)，將圓 O_1 視為兩個圓，再將其等速往左右各慢慢拉開，而形成三個圓。觀察圓 O_1 上的正三角形之頂點 A 和 P 點之關係，當圓 O_2 和圓 O_3 越拉越遠時，P 點便開始下降，一直到圓 O_2 和圓 O_3 相交於圓 O_1 時，(如圖(十七))，P 點恰與 O_1 重疊。觀察∠A 和∠P，當圓 O_2 和圓 O_3 越拉越遠時，∠P 也會隨之越小。根據上述兩個觀察，我們有興趣的是 P 點下降的距離和∠P 的大小有什麼關係。

圖(十六)



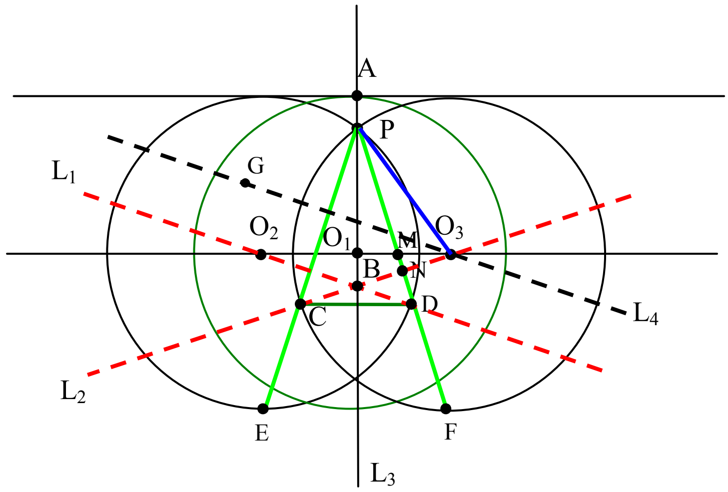
圖(十七)



二.所有交圓之交集部分最大三角形的面積通式

(一). 如圖(十八)，設 $\overline{AP}$ 為 X，圓半徑為 R，∴$0 \le X \le R$，其中 X 值是我們可以控制的，故我們能掌握每一種交圓的狀況。對於任意交圓，其最大三角形，如 ΔPCD，設其頂角 P 為 α ($\therefore 0^0 \le \alpha \le 60^0$)，並作 $\overline{PE}$、$\overline{PF}$ 和 $\overline{CD}$ 之中垂線，分別為 L_1、L_2、L_3。再作 $\overline{PC}$ 之中垂線 L_4，最後再連接 $\overline{PO_3}$；

圖(十八)



令 $\angle 1 = \angle O_2DC$、$\angle 2 = \angle DO_2O_1$、$\angle 3 = \angle GO_3O_1$、$\angle 4 = \angle O_3CD$、$\angle 5 = \angle O_1O_3C$

(二). 接下來因為 $\angle 1 = \angle 2$，且 $L_1 // L_4$，得 $\angle 2 = \angle 3$，依對稱原理或等腰三角形 BCD，

可知 $\angle 1 = \angle 4$，得 $\angle 4 = \angle 5$，得 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5$

(三). 考慮 ΔPO_1M 和 ΔO_3MN，因為有兩角相等，所以 $\Delta PO_1M \sim \Delta O_3MN$，故

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \frac{\alpha}{2}$$

(四). $\because \overset{\frown}{PC} = \overset{\frown}{CF} = 2\alpha$，得 $\angle PO_3C = \overset{\frown}{PC} = 2\alpha$

考慮 ΔPO_1O_3，$\angle PO_3O_1 = 2\alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2}$，又 $\overline{PO_1} = R - X$，$\overline{PO_3} = R$

$\therefore \sin\frac{3\alpha}{2} = \frac{R-X}{R}$ ， X 為控制變因，所以對所有交圓均成立

(五). 設 $\overline{PC} = Y$，且 $\angle PO_3C = 2\alpha$， $\cos 2\alpha = \frac{R^2+R^2-Y^2}{2R\times R} = \frac{2R^2-Y^2}{2R^2}$，$Y^2 = 2R^2(1-\cos 2\alpha)$

(六). 最後，看我們的最大三角形 PCD 之面積。利用 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$ 之公式，即

$$a\Delta PCD = \frac{1}{2}Y^2\sin\alpha = \frac{1}{2}\times 2R^2(1-\cos 2\alpha)\sin\alpha = R^2[1-(1-2\sin^2\alpha)]\sin\alpha$$

$= R^2 (2\sin^2\alpha)\sin\alpha = 2R^2\sin^3\alpha$

(七). 利用 $\sin\frac{3}{2}\alpha = \frac{R-X}{R}$ 和 $a\Delta_{max} = 2R^2\sin^3\alpha$ 兩公式，我們可以隨心所欲的找出每種交圓之交集部分的最大三角形面積。比如說：

1.當 X=0 時,其交圓圖形為一圓 ,$\therefore \sin\frac{3}{2}\alpha = 1$，$\frac{3}{2}\alpha = 90^0$，$\alpha = 60^0$,則

$a\Delta_{max} = 2R^2\sin^3 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$，其值和圓內接正三角之面積是相等的。

(即 $\frac{1}{2}\times R\times R\times\sin 120^0\times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$)

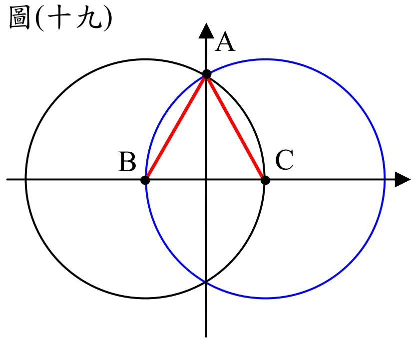
2.當 $X = R$ 時，其交圓之交集部分為一點，$\sin\frac{3}{2}\alpha = 0$，$\alpha = 0^0$，則

$a\Delta_{max} = 2R^2\sin^3 0^0 = 0$，也符合

3.當交圓情形為當兩圓互相通過彼此圓心時，(如圖(十九))，ΔABC 為一正三角形，

高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$，$\therefore X = R - \frac{\sqrt{3}}{2}R$

圖(十九)



$\therefore \sin\frac{3}{2}\alpha = \frac{R-(R-\frac{\sqrt{3}}{2}R)}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \frac{3}{2}\alpha = 60^0$，$\alpha = 40^0$

則 $a\Delta_{max} = 2R^2\sin^3 40^0 = 2R^2(0.6428)^3 = 0.53117R^2$

這個數值看起來相當熟悉，沒錯，先前我們利用行列式面積公式所推導的結果和現在這個方法所作出的結果可以說是完全吻合，這更顯示了此討論的正確性。

陸.結論

經過討論後，我們得到 $\sin\frac{3}{2}\alpha = \frac{R-X}{R}$ 和 $a\Delta_{max} = 2R^2\sin^3\alpha$ 兩公式，根據這兩個公式的關係，我們可以控制 α 和 X 兩變數來推求兩件事。

一. 當 α 為已知，即知道最大三形之頂角，則我們可以求出 X 值，並了解兩圓相交的狀況。

二. 當任取 X 值，$(0 \le X \le R)$，則我們可以求出 α 角，並了解最大三角形的特徵。如下表，可看出 X 值、α 角和 $a\Delta_{max}$ 之間的變化。

X	0R	0.1R	0.13397R	0.2R	0.3R	0.4R
α	60.0^o	42.7^o	40.0^o	35.3^o	29.7^o	24.7^o
$a\Delta_{max}$	$1.29904\ R^2$	$0.62259\ R^2$	$0.53117\ R^2$	$0.38687\ R^2$	$0.24251\ R^2$	$0.14538\ R^2$
X	0.5R	0.6R	0.7R	0.8R	0.9R	R
α	20.0^o	15.7^o	11.7^o	7.7^o	3.8^o	0.0^o
$a\Delta_{max}$	$0.08002\ R^2$	$0.03938\ R^2$	$0.01654R^2$	$0.00475\ R^2$	$0.00057\ R^2$	$0\ R^2$

柒.參考資料

1.蕭文強著/數學證明/凡異出版社/民國 83 年 11 月出版

2.(德)海因里希•德里著/100 個著名初等數學問題歷史和解答/凡異出版社/民國 85 年 8 月出版

3.牛頓出版公司著/圓、球面及圓錐曲線/牛頓出版公司/民國 79 年 9 月 10 日出版

評　語

040421 高中組數學科

兩圓交集之最大三角形

有待加強傳統的平面幾何訓練。