中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040420

國立鳳山高級中學

指導老師姓名

郭佳蓉

作者姓名

賴思翔

蔡孟修

黃璿穎

尤致翔

撲克牌中的數學---
猜數字遊戲的研究推廣

壹. 摘要:

一、首先，由撲克牌的猜數字遊戲著手。撲克牌中有十三個號碼，並假設號碼不重複出現。在研究過程中，我們列出從撲克牌中找出 2、3、4、6 張牌的最少次數及方法。

二、利用第四冊數學課本所教的排列組合，及我們的轉位法、分組法、二分法，推廣到從 N 個數字中找出 M 個數字排列數的最少次數及方法。

貳.研究動機：

同學間常常利用課餘時間玩電腦辭典中的幾 A 幾 B 遊戲，並且互相比賽誰能在最少次數中猜出正確數字。也看了北一女學姊所研究的『看費曼如何開保險箱——從猜數字遊戲談起』更引發了我們對此一主題的興趣，便著手研究看看能不能利用課堂上所學習到的一些邏輯概念和排列組合，得到一般化的規律或是公式。

參.研究目的：

一、從撲克牌中，找出 2、3、4、6 張牌的最快方法以及最少次數。

二、從 N 個數字中，找出 M 個數字排列數的最快方法以及最少次數，並試著推導出公式或規律說明之。

肆.研究設備：

一、電腦，筆跟紙

二、Microsoft Word（ 電腦文書軟體 ）

伍.名詞解釋：

$N \div M = L \cdots K$，其中 N、M、L 為正整數，K 為非負整數，$N \geq M$，$0 \leq K < M$

一、現在總共有 N 個數字，甲從此 N 個數字中任取 M 個數字($N \geq M$)排列，排成答案組 (A_1，A_2，A_3，……，A_M)，由乙從 N 個數字中再任意取 M 個數字排列，與答案組比較之後，甲便告訴乙 rAsB，這裡 rA 代表有 r 個數字為正確且位置也正確，sB 代表有 s 個數

字正確但位置不正確，而我們扮演著乙的角色，用一套有系統的方法找出猜數字遊戲的最少次數。

二、我們發明一個符號 / /，$/k/=\begin{cases}[k]-1 & ,\ \text{當}k\text{爲整數時}\\ [k] & ,\ \text{當}k\text{不爲整數時}\end{cases}$

$$\backslash M/=\begin{cases}M\text{以二進位表示法的數碼}-1 & ,\ \text{當}M=2^{\alpha},\alpha\text{爲整數}\\ M\text{以二進位表示法的數碼} & ,\ \text{當}M=2^{\alpha},\alpha\text{不爲整數}\end{cases}$$

三、我們發明一個符號 \ /，例：$8=2^3=(1000)_2\ \therefore \backslash 8/=4-1=3$

$7=(111)_2\ \therefore \backslash 7/=3$

四、以 $a_i(1\le i\le M)$，$b_i(1\le i\le M)$，$c_i(1\le i\le M)$，……，表示每一個小組裡的數字(我們自訂的)

五、當一個數字我們已經知道他是否爲正確數字的時候，就稱呼此數爲 h，h 爲知道它是或不是正確數字

六、S 爲空格數，即剩下 S 個還沒猜出

七、使用方法：

(一)轉位法

我們想在最少次數之內求得答案，最重要的就是使得每次問答所得到的線索不要重複。
(1)每一個提問組的數字位置不要重複
(2)每一次提問中被替換成 h 的數字都不同
因爲每一種方式之意義都是必須滿足上述兩條件，而轉位法是我們想出較爲有條理的方法
此方法如下，設某一組爲(a_1，a_2，a_3，……，a_M)：
1.使得所有數字左移，而第一位的往後補，成爲下列數組(a_2，a_3，a_4，……，a_M，a_1)
2.然後用 h 代入 a_1，即成(a_2，a_3，a_4，……，a_M，h)，依此方法，再來提問(a_3，a_4，a_5，……，a_M，a_1，h)，……，直到(a_M，a_1，a_2，a_3，a_4，……，a_{M-3}，a_{M-2}，h)，以上共會用掉(M－1)次提問的次數(其實不管代掉哪個數字均可，只是爲了力求整齊與方便，只要不違反條件(2)即可，故我們代掉最後面的數字)。

(二)分組法

在知道 k 個正確數字之位置後，我們將下一個提問數組分成 k 個與(M－k)個兩組，k 個的位置用之前所知道的 k 個正確數字取代，被取代掉的數字拿到(M－k)個這組中放入，形成新的提問數組，多的話再形成另外一組，少的話用(M－k)個這組中的數字補上(但必須符合之前轉位法中所提到的兩個重要的條件)，新的提問數組會導致提問數組(a_1，a_2，a_3，……，a_M)分成兩組

例如當 $k<M-k$ 時：

(1) b_1，b_2，b_3，……，b_k，c_1，c_2，c_3，……，c_{M-2k}任意排列，再加上前面的 k 個正確數字放在此 k 個數字的正確位置上，合爲新提問數組。
b_1～b_k即爲被 k 個正確數字取代下來的數字，c_1，c_2，c_3，……，c_{M-2k}即爲(M－k)組中任意選放的數字。

(2) c_{M-2k+1}，c_{M-2k+2}，c_{M-2k+3}，……，c_{M-k} 爲剩下的數。

(三)二分法

當 rAsB，在 $r+s=1$ 或 $r=1$ 的時候，才可使用。將提問數組÷2(沒有整除則採四捨五入)分成兩半，設商數爲 k，以這 k 個數再加上(M－k)個 h 爲新提問組，我們經由提問後的答案 r'As'B 可知在這 k 個數中有無 A，從有正確數字的這一部份再使用二分法，經由若干次後，直到剩下的這一個便是正確數字。

(四)單一提出法

當 rAsB，r＋s 很大的時候，以上兩個方法都將難以使用，我們就採取最原始的方法，即從那個提問數中拿第一個，拿了以後從沒有答案的地方開始代，如果發現是０Ａ０Ｂ，就試第二個，如果他是答案，就開始一個位置一個位置代，代到找到答案，再拿第三個，……，重複。

陸.研究過程:

首先，從撲克牌著手，其中有 1、2、3、……13 十三個號碼，我們假設號碼不重複出現

一、先從所求有 2 個數字開始

(一)以(1，2)，(3，4)，(5，6)，(7，8)，(9，10)，（11，12）分別去猜，則最多需要猜 6 次才可確定數字分布的情形，其中，必出現非 0A0B 的組，以＋號連接，可表示爲以下幾種可能:

1. 2A0B
2. 0A2B
3. 1A0B＋1A0B
4. 1A0B＋0A1B
5. 0A1B＋0A1B
6. 1A0B
7. 1A0B

(二)就這幾種情形分別討論:

1. 2A0B

   此組數字即爲所求(最多 6 次)

2. 0A2B

   假設此組爲(a_1，a_2)

   則(a_2，a_1)即爲所求(最多 6 次)

3. 1A0B＋1A0B

   假設分別爲(a_1，a_2)，(b_1，b_2)

則再提問(a_1，b_2)，再根據得到的答案，就能知道所求(最多 7 次)

正確數字\提問數字	(a_1，b_2)
(a_1，b_2)	2A0B
(b_1，a_2)	0A0B

4. 1A0B＋0A1B

假設分別為(a_1，a_2)，(b_1，b_2)

則再提問(a_1，b_2)，再根據得到的答案，就能知道所求(最多 7 次)

正確數字\提問數字	(a_1，b_2)
(a_1，b_1)	1A0B
(a_2，b_1)	0A0B

5. 0A1B＋0A1B

假設分別為(a_1，a_2)，(b_1，b_2)

則再提問(a_1，13)再根據得到的答案，就能知道所求(最多 7 次)

正確數字\提問數字	(a_1，13)
(b_2，a_1)	0A1B
(a_2，b_1)	0A0B

6. 1A0B

假設為(a_1，a_2)

則再提問(a=，13)再根據得到的答案，就能知道所求(最多 7 次)

正確數字\提問數字	(a_1，13)
(a_1，13)	2A0B
(13，a_1)	0A2B

7. 0A1B

假設為(a_1，a_2)

則再提問(a_1，13)再根據得到的答案，就能知道所求(最多 7 次)

正確數字\提問數字	(a_1，13)
(a_2，13)	1A0B
(13，a_1)	0A2B

二、 從所求有 3 個數字開始

(一)以(1，2，3)，(4，5，6)，(7，8，9)，(10，11，12) 分別去猜，則最多需要猜 4 次才可確定數字分布的情形，其中，必出現非 0A0B 的組，以＋號連接，可表示為以下幾種可能:

1 3A0B
2. 1A2B
3. 0A3B
4. 2A0B＋1A0B
5. 2A0B＋0A1B
6. 1A1B＋1A0B
7. 1A1B＋0A1B
8. 0A2B＋1A0B
9. 0A2B＋0A1B
10. 1A＋1A＋1A
11. 1A＋1A＋1B
12. 1A＋1B＋1B
13. 1B＋1B＋1B
14.2A0B
15. 1A1B
16. 0A2B
17. 1A0B＋1A0B
18. 1A0B＋0A1B
19. 0A1B＋0A1B

三、從所求有 4 個數字開始

(一)以(1，2，3，4)，(5，6，7，8)，(9，10，11，12)分別去猜，則最多需要猜 3 次才可確定數字分布的情形，其中，必出現非 0A0B 的組，以＋號連接，可表示爲以下幾種可能:

(1) 4A0B	(2) 3A0B＋1A0B	(3) 3A0B＋0A1B
(4) 2A1B＋1A0B	(5) 2A1B＋0A1B	(6) 1A2B＋1A0B
(7) 1A2B＋0A1B	(8) 2A0B＋2A0B	(9) 2A0B＋1A1B
(10) 2A0B＋0A2B	(11) 1A1B＋1A1B	(12) 1A1B＋0A2B
(13) 0A2B＋0A2B	(14) 2A0B＋1A0B＋1A0B	(15) 2A0B＋1A0B＋0A1B
(16) 2A0B＋0A1B＋0A1B	17) 1A1B＋1A0B＋1A0B	(18) 1A1B＋1A0B＋0A1B
(19) 1A1B＋0A1B＋0A1B	(20) 0A2B＋1A0B＋1A0B	(21) 0A2B＋1A0B＋0A1B
(22) 2A0B＋0A1B＋0A1B	(23) 3A0B	(24) 2A1B
(25) 1A2B	(26) 2A0B＋1A0B	(27) 2A0B＋0A1B
(28) 1A1B＋1A0B	(29) 1A1B＋0A1B	(30) 0A2B＋1A0B
(31) 0A2B＋0A1B	(32) 1A0B＋1A0B＋1A0B	(33) 1A0B＋1A0B＋0A1B
(34) 1A0B＋0A1B＋0A1B	(35) 0A1B＋0A1B＋0A1B	(36) 0A4B

柒.討論:

N÷M＝Ｌ……1 時

N 爲總數，就是撲克牌猜數字中的１３。

M 爲單組數，就是撲克牌猜數字中的３。

Ｌ爲組別數，就是撲克牌猜數字中的４。

K 爲剩餘數，就是撲克牌猜數字中的１。

在Ｌ次問答完後有ｒＡｓＢ，稱之爲問答數

爲了方便，我們將組別數編號，第一個叫L_1，第二個叫L_2…..以此類推，根據ｒ＋ｓ由小排到大。

(一)當 r＋s＝1 時，此時 N÷M＝Ｌ……1

首先，我們要證明爲什麼在ｒ＋ｓ＝１的時候，只要使用轉位法就可以成功。

轉位法的使用：

在一開始分組的時候，會分成Ｌ＋１組，在前Ｌ組中，設 r＋s＝c(c 會因不同組中的 r＋s 而變)，在這些 L＋1 組中，選擇其中一個ｒ＋ｓ＝１的組，再從別的任意組中挑選出一個已知是或不是正確數字的數(因爲我們設 N÷M＝Ｌ……1，所以最後一組爲一個數字)，我們假設此數叫做ｈ，接下來我們提問 M－１次，如下：

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，……，a_{M-1}，a_M

此爲我們所任選的數列，將ｈ代入第 M 位，再將全部的數往左移一位，移完之後a_1會跑到第 M 位，這時a_1就會被ｈ代掉：

a_1，a_2，a_3，………，a_M，h　　　r_1As_1B

a_2，a_3，a_4，………，a_M，h　　　r_2As_2B

a_3，a_4，a_5，………，a_M，a_1，h　　　r_3As_3B

:

:

a_M，a_1，a_2，………，h　　　r_MAs_MB

由(1)(2)：a_1被拿走，h(此時假設 h 不爲正確數字)被代入由$(r_1+s_1) \rightarrow (r_2+s_2)$

會有 2 種情形：

① 當a_1是正確數字時

∵拿掉的a_1爲正確數字

∴會影響 r＋s 的總次數，故$(r_1+s_1-1)=(r_2+s_2)$

② 當a_1不是正確數字時

∵拿掉的a_1不爲正確數字

∴不會影響 r＋s 的總次數，故$(r_1+s_1)=(r_2+s_2)$

由上述兩種情形
觀察 r_1+s_1 和 r_2+s_2

$$\begin{cases} ①\ r_1+s_1=c-1 \\ \text{若差 1，則可知 } a_1 \text{ 是正確數字} \\ ②\ r_2+s_2=c \\ \text{若差 0，則可知 } a_1 \text{ 是正確數字} \end{cases}$$

比較(1)(2)可知 a_1 的性質、比較(1)(3)可知 a_2 的性質、比較(1)(4)可知 a_3 的性質……比較(1)(a_M)可知 a_{M-1} 的性質，共猜了 M－1 次，可知 a_1 到 a_{M-1} 數字的性質→再比較 $a_1a_2a_3$……$a_{M-1}a_M$ 的各個 r＋s 就可知 a_M 的性質。

PS.若(1)式的 $r_1+s_1=1$，則可順便知道此正確數字的位置（設此數爲 X）。

我們分兩種情況討論

① 判斷每一個 r＋s＝1 的數組，若 s＝0 即 r＝1→就知道 X 的位置

② 每一個數組，若沒有 r＝1 即代表不在第 1 到第 M－1 個位置，而總共又只有 M 個位置，即在第 M 位，即$(\underbrace{\square,\square,\square,\cdots\cdots\ \cdots,\square}_{M-1\text{個}},\underset{\text{第 M 個}}{\underset{\Downarrow}{X}})$

(二) 當 r＋s＝1 時，此時 N÷M＝L……1　我們列出這個表格，以便說明

①L＋

次序	1	2	3	……	k	……	M	
②	M－1	M－2	M－3	……	M－k	……	M－(M－1)	轉位法
	$/\frac{M}{M}/$	$/\frac{M}{M-1}/$	$/\frac{M}{M-2}/$	……	$/\frac{M}{M-k+1}/$	……	$/\frac{M}{M-M+1}/$	分組法
	1	2	3	……	k	……	M	已猜出的個數
③	\M / ＋S－1	\M / ＋S－1	\M / ＋S－1	……	\M / ＋S－1	……	\M / ＋S－1	二分法

猜出正確數字的總次數不超過

①＋min {$②_1$，$③_1$}＋min {$②_2$，$③_2$}……………………min {$②_M$，$③_M$}

這個公式是由於以下原因

①

$$L\text{組}\begin{cases} \overbrace{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\cdots\cdots,a_{M-1},a_M}^{M\text{個}} \\ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,\cdots\cdots,b_{M-1},b_M \\ c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,\cdots\cdots,c_{M-1},c_M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

∴所以最多需 L 次

②$_1$.拿第一組 a_1，a_2，a_3，a_4，……a_{M-1}，a_M來使用轉位法

此時分成[M/M]組，所以需猜的次數為$\left/\dfrac{M}{M}\right/$

M－1 組
$$\left\{\begin{array}{l} a_2，a_3，a_4，a_5，……，a_{M-1}，a_M，h \\ a_3，a_4，a_5，a_6，……，a_{M-2}，a_{M-1}，h \\ \vdots \\ a_M，a_1，a_2，a_3，……，a_{M-3}，a_{M-2}，h \end{array}\right.$$

所以最多需 M－1 次，可知 1B 的正確數字及位置，得 1A

②$_2$.假設 a_k是已知在第 k 個位置的正確數字，1≦k≦M

則把(b_1，b_2……，b_{k-1}，b_k，b_{k+1}，b_{k+2}，……，b_M)中對應 a_k的數字 b_k用 a_k代掉，所以變為(b_1，b_2，……，b_{k-1}，a_k，b_{k+1}，b_{k+2}，……，b_M)，再把(b_1，b_2，……，b_{k-1}，a_k，b_{k+1}，b_{k+2}，……，b_M)的 b 隨便拿一個出來用 b_k取代，例如把 b_1用 b_k取代，最後 a_k不動，剩下的全部更改位置，不能位於原位。為求方便，我們使用轉位法，成為(b_2，b_3，……，b_{k-1}，b_k，a_k，b_{k+2}，b_{k+3}……，b_M，b_1)，然後就有兩種情形（共分成[M/(M－1)＋1]組，所以需猜的次數為$\left/\dfrac{M}{M-1}\right/$）

(1)正確數字即為 b
(2)正確數字仍在(b_2，b_3，……，b_{k-1}，b_k，a_k，b_{k+2}，b_{k+3}……，b_M，b_1)之中

如果是(1)的情形，就觀察原先的(b_2，b_3，……，b_{k-1}，b_k，a_k，b_{k+2}，b_{k+3}……，b_M，b_1)，用轉位法，則可以找出這個數字的位置。但 a_k的位置不可更動
例如：

(b_2，b_3，……，b_{k-1}，b_k，a_k，b_{k+2}，b_{k+3}……，b_M，b_1)的下一組為
(b_3，b_4，……，b_{k+2}，a_k，b_{k+3}，b_{k+4}，……b_1，h)，再下一組為
(b_4，b_5，……，b_{k+3}，a_k，b_{k+4}，b_{k+5}，……b_2，h) ……

則需再 M－2 次，總共 M－1 次。

如果是(2)的情形，則使用單一提出法，而我們這次的 b 為 b_{k+1}，從最後一位數字換到第二個，例如：

(h，h，……h，h，h，h，……h，b_{k+1})的下一組為
(h，h，……h，h，h，h，……，b_{k+1}，h)，再下一組為
(h，h，……h，h，h，h，……，b_{k+1}，h，h) ……

因為 k+1 位不必放，所以只有 M－1 個空格，則需再 M－2 次，總共 M－1 次。

④ 假設 a_k和 b_{k+2}是已知道位置的正確數字，1≦k≦M，則把(c_1，c_2，c_3，c_4，……，c_k，c_{k+1}，c_{k+2}，c_{k+3}，……，c_M)之中的 c_k、c_{k+2}用 a_k，b_{k+2}代掉，所以變成(c_1，c_2，c_3，c_4，……，a_k，c_{k+1}，b_{k+2}，c_{k+3}，……，c_M)然後再隨便找兩個 c 用 c_k、c_{k+2}代掉，再按照以上方法提問此組，然後就有兩種情形（共分成[M/(M－2)＋1]組，所以需猜的次數為 $/\dfrac{M}{M-2}/$）

(1)正確數字在此組裡面，再繼續使用轉位法(再 M－3 次)，則總共 M－2 次。
(2)正確數字 c_k、c_{k+2}裡面，再繼續使用單一提出法(再 M－3 次)，則總共 M－2 次。
以下(d_1，d_2，d_3……)，……以此類推。
③※由二分法知道猜出該數字需要 $\backslash M/$ 次，再加上若有 S 個空格還沒猜就猜 S－1 次就知道正確數字，∴猜出正確位置的總次數為 $\backslash M/$ ＋S－1

例如：知道 2 個正確數字

※		※	

↑　　↑
已知　已知

只需猜 1 次(此時 S＝2)

	※		※	

↑　　↑
已知　已知

只需猜 2 次(此時 S＝3

∴猜出正確位置的總次數為 $\backslash M/$ ＋S－1

(三)當 r＋s≠1 時，此時 N÷M＝L……1
執行轉位法，得到(M－1)組 rAsB，再加上問 L 次時所選擇出來使用轉位法的那一組，共 M 組，根據 r 的大小，由大到小排成一列，當 r 相等時由 s 小到大排列，若 r＝0 則不須排進去。
根據以上的規則排成如下：

$$d組\begin{cases} r_1As_1B \\ r_2As_2B \\ r_3As_3B \\ \vdots \\ r_dAs_dB \end{cases}$$

此時不妨假設共有d組　　$d \le c$
此時$r \geq_1 r_2 \ge r_3 \ge r_4 \ge \cdots\cdots \ge 1$
由之前的轉位法所得到的線索,知道每一組的$r+s=c \quad or \quad c-1$
假設把d分成a個$r_i+s_i=c$
b個$r_i+s_i=c-1$　　其中$a+b=d$
$\because$ 轉位法的關係可以知道c個正確數字
我們先拿第一組來觀察，不妨設為 x_1、x_2、x_3、……、x_M　　r_xAs_xB
並把正確數字作記號，例如：x_1、$\boxed{x_2}$、$\boxed{x_3}$、……、x_M，即表示 x_2、x_3為正確數字
以此規則，則共有 r_x＋s_x個記號，假設 x_i為正確數字，
那就提問　h……h x_i h……h
x_i表示位於第 i 個位置

我們不考慮 h 的 A、B 的情形$\begin{cases} 0A1B & x_i\text{不在第}i\text{位} \\ 1A0B & x_i\text{在第}i\text{位} \end{cases}$

如此反覆把 r_x+s_x 個數字找出，就只需 r_x+s_x-1 次就可找出 r_x 個正確數字及位置(即 r_xA)
再來觀察之前的 x_1、x_2、x_3、……、$x_M(r_xAs_xB)$
我們可知道 r_x 所指的正確數字，在下一組 Y 組不可能爲正確數字(∵每一個數字的位置都出現一次)我們知道 Y 組是由轉位法先拿走一個數字再代 h 而得到的新提問組，則 X→Y 有兩種情形

① 拿走的數字是 r_x 其中之一→則猜中正確數字及位置次數不超過 $(r_y+s_y-1)-(r_x-1)$
∵Y 組中知道正確數字爲 (r_x-1) 個
② 拿走的數字不是 r_x 其中之一→則猜中正確數字及位置次數不超過 $(r_y+s_y-1)-r_x$
∵Y 組中知道正確數字爲 r_x 個

∴猜出正確數字的總次數不超過：

$$\underset{①}{a(r+s-1)}+\underset{②}{b(r+s-1-1)}-0-\begin{cases} r_1 \\ or \\ (r_1-1) \end{cases}-\underset{③}{\begin{cases} (r_1+r_2) \\ or \\ (r_1+r_2-1) \end{cases}}-\begin{cases} (r_1+r_2+r_3) \\ or \\ (r_1+r_2+r_3-1) \end{cases}\cdots\cdots$$

∵$r+s=c$，$a+b=d$

∴原式 $=d\times(c-1)-b-d(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_{d-1}+r_d)+r_1+2r_2+3r_3+\cdots\cdots+(d-1)r_{d-1}+dr_d-e$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{d} kr_k-(b+e)\text{，當}(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_{d-1}+r_d)=c-1 \\ \sum_{k=1}^{d} kr_k-(b+e+d)\text{，當}(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_{d-1}+r_d)=c \end{cases}$$

在最大值時，即爲 $b=0$，$e=0$

(四)當 N÷M＝L…K，
①當 K＝1 的時候，由於最後一組是一個數字，所以我們可以確定此數字是或不是正確數字，故此數字視爲 h。
②但在餘 K，K≠1 時，由於最後一組是 K 個數字，所以我們不能確定代入的數是否爲正確數字。

也就是說無法猜一次就能判斷拿出來的數字和代入的數字是否爲正確數字，但如果用轉位法猜滿所有次數就能判斷哪個是正確數字。
原因如下：

設餘 K 的那一組爲(k_1，k_2，k_3，k_4，k_5，……，k_{K-1}，k_K)
隨便拿一個數 k，此時還不知道 k 是不是正確數字。
(a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，……，a_{M-1}，a_M)
(a_2，a_3，a_4，a_5，……，a_{M-1}，a_M，k)
(a_3，a_4，a_5，……，a_{M-1}，a_M，a_1，k)

有可能出現以下三種情形
一、$r'+s'$＝r＋s＋1
　　若爲此情形，則 k 爲正確數字。
二、$r'+s'$＝r＋s－1
　　若爲此情形，則 k 不爲正確數字
三、$r'+s'$＝r＋s
　　若爲此情形，則暫時無法確定，還需繼續轉位，方法如下：
若每一個$r'+s'$都等於 r＋s，經過思考，我們推得，只有 r＋s＝M－1，或 r＋s＝1 的時候才有可能。
若 r＋s＝M－1，則 k 爲正確數字。
若 r＋s＝1，則 k 不爲正確數字。
由此過程就能把 k 變成我們所謂的 h，就能使用上述的方法。

捌.結論：

一、前提：L 個 rAsB，每個 L 之中，r＋s≠1
N÷M＝L……1
若要猜出某一組 r＋s≠1 數組的次數不超過

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{d} kr_k-(b+e)，當(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_{d-1}+r_d)=c-1 \\ \sum_{k=1}^{d} kr_k-(b+e+d)，當(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_{d-1}+r_d)=c \end{cases}$$

在最大值時，即爲 b＝0，e＝0

二、前提：L 個 rAsB，每個 L 之中，r＋s＝1
N÷M＝L…1
S：還有幾個數沒猜

當 r＋s＝1 時，此時＝r＋s＋1÷M＝L……1　　我們列出這個表格，以便說明

①L＋

次序	1	2	3	……	k	……	M	
②	M－1	M－2	M－3	……	M－k	……	M－(M－1)	轉位法
	$/\frac{M}{M}/$	$/\frac{M}{M-1}/$	$/\frac{M}{M-2}/$	……	$/\frac{M}{M-k+1}/$	……	$/\frac{M}{M-M+1}/$	分組法
	1	2	3	……	k	……	M	已猜出的個數
③	\M / ＋S－1	\M / ＋S－1	\M / ＋S－1	……	\M / ＋S－1	……	\M / ＋S－1	二分法

猜出正確數字的總次數不超過

①＋min {②$_1$，③$_1$}＋min {②$_2$，③$_2$}……………………min {②$_M$，③$_M$}

（每組中的 S 不盡相同）

三、如果在 L 組中，有些 r＋s＝1，有些 r＋s≠1，則夾雜使用一、二的方法及公式，所以，我們的方法可以解決從 N 個數字中猜出 M 個排列數的所有情形。

玖.應用：

1.在附錄中，我們運用高中電腦課中學到的 C^{++} 程式將此設計成 game 增加其趣味性。

2.對於一些健忘的人，我們可以把猜數字遊戲設計成開啓檔案的途徑，如同『別鬧了，費曼先生－科學頑童的故事』這本書中費曼開保險箱般，不但可以增強邏 輯能力，也可以訓練思考，又可以保存檔案的秘密性。

3.我們也可以把它做成開電腦、電視的途徑，如同開保險箱般，每天開電腦、電視之前，先訓練一下思考，才不會每天坐在電腦，電視前面，導致腦筋遲鈍。

4.推廣：這套方法及公式是盡我們所能想出來的猜數字遊戲的解決，或許，將來還能想出更妙的解決方法，找到更少的次數。

拾.參考資料：

一、期刊論文：

北一女　段佳君、潘憶婷 1999 年　看費曼如何開保險箱－從猜數字遊戲談起

二、圖書單行本：

國際奧林匹克大陸隊訓練教材　初版　九章出版社　第 226 頁　79 年 9 月

三、楊維哲、蔡聰明、吳隆盛編著　高級中學數學第四冊　修正初版四刷　三民書局股份有限公司　第 85 頁－141 頁　2004 年 2 月

四、費曼(Richard P.FeynMan)著吳程遠譯　別鬧了，費曼先生－科學頑童的故事　初版 天下文化出版股份有限公司　第 172 頁－199 頁　1993 年 10 月 30 日

評　語

040420 **高中組數學科　最佳創意獎**

撲克牌中的數學-猜數字遊戲的研究推廣

1.看板所展示的內容不夠具體。

2. 應該多努力於理論的探討。