中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040419

國立高雄師範大學附屬高級中學

指導老師姓名

歐志昌

作者姓名

林婕詩

李郁云

羅伊絢

壹、摘要

四角拼圖是由九張一樣大小的正方形卡片所組成的拼圖，每張正方形的四邊有不同圖案的半邊，可與其他卡片的另半邊接成一張完整的圖片，最後拼出 3×3 的拼圖。卡片上的圖片種類可重複，四張半邊的圖案排列方式也不盡相同，故一副拼圖可能有一種以上解。

我們設計了以下三大類拼圖：

一、 3×3 的拼圖有兩種圖案，每張卡片含二種圖案的同半邊。
二、 3×3 的拼圖有三種圖案，每張卡片含三種圖案的同半邊。
三、 3×3 的拼圖有四種圖案，每張卡片含四種圖案的同半邊。

在此研究中，由調整卡片中的圖片多寡和其排列的方式，探討這些因素對拼圖解的影響（多寡、特性）。同時也從原始的拼圖方式，研發更有條理與完整性的拼圖方法。

貳、研究動機

四角拼圖這種遊戲和一般形狀不規則的拼圖不同，它的每張卡片都是正方形，四邊各有半張的圖案，可與其他卡片邊上的另外半張圖案接合成完整的圖案，最後要拼成一副 3×3 的拼圖。

因爲卡片與某邊可接合的卡片可有一張以上，所以拼圖的解法可能會不只一種。於是我們找了一些市面上的四角拼圖和相關的研究資料，卻發現每副不同的拼圖解法的情形從一種到十種都有。將各副拼圖的卡片比較之後，找出了其中可能的因素有以下幾種：

一、 單張卡片中圖片的排列方式不盡相同
二、 同一張圖案的兩半邊可能同時出現在同一張卡片裡
三、 一副拼圖中的卡片有的是完全相同的

我們想要研究這些因素對四角拼圖解法的影響，當我們手邊有一副四角拼圖時，就可以很快的將它解出，甚至知道它有幾種解法。

參、研究目的

一、 控制上述變因設計拼圖，從這些拼圖解法中找出一定的規則。
二、 找出比嘗試錯誤更好的拼圖步驟，用更短的時間解出答案。

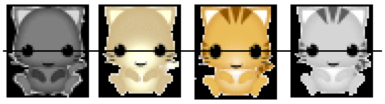
肆、研究過程

一、名詞解釋

（一） 記號

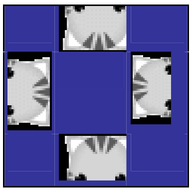
1、以 1,2,3,4,5,6,7,8 等八元素表示圖片的樣式，其中相加為 9 的數字恰可拼成一個完整的圖案，以值較小的數為圖案的頭，數值大的為尾，共有（1,8）、（2,7）、（3,6）、（4,5）四種圖案。

1 2 3 4



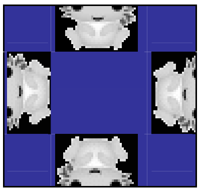
5 6 7 8

2、



卡片中全為頭者記為[大寫英文字母]，稱為主卡

A



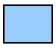
卡片中全為尾者記為[小寫英文字母]，稱為前者的配卡

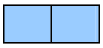
a

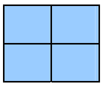
（二） 定義

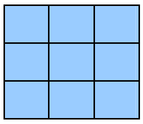
1、元素：組成圖案的頭｛1,2,3,4｝與尾｛5,6,7,8｝

2、

1×1 為一張 

1×2 為一對 

2×2 為一組(田字格) 

3×3 為一副(井字格) 

3、卡片中圖片的排法

1 2 1 2	1 3 1 2

◄同一種圖形在相鄰兩邊上稱之為「鄰」

1 2 2 1	1 3 2 1

◄同一種圖形在相對兩邊上稱之為「對」

4、相同的解

(1)旋轉：一種解法的形式旋轉 90°、180°、270° 可視為相同解法。

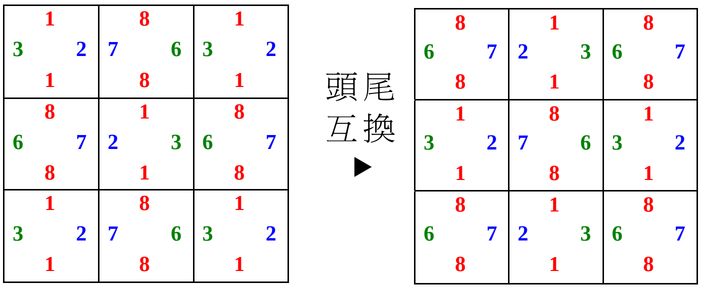
1 3 2 1	8 7 6 8	1 3 2 1
8 6 7 8	1 2 3 1	8 6 7 8
1 3 2 1	8 7 6 8	1 3 2 1

向右旋轉 180° ►

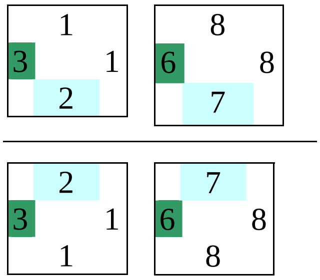
3 1 1 2	6 8 8 7	3 1 1 2
7 8 8 6	2 1 1 3	7 8 8 6
3 1 1 2	6 8 8 7	3 1 1 2

向右旋轉 270° ▼ 向右旋轉 90° ◢

(2)頭尾互換：

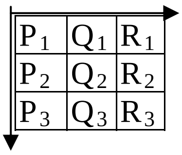


(3)相對位置相同：



數字只是爲了區別卡片所含的圖形或顏色不同，所以當 A、B 分別屬於不同副拼圖時，應視爲同一種排列方式的卡片。所以由左圖上下兩組卡片構成的兩副拼圖的解相同。

5、卡片的讀法

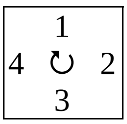


先讀列再讀行，行與行之間以連字號連接，如左：

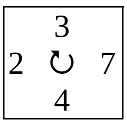
讀 $P_1Q_1R_1$-$P_2Q_2R_2$-$P_3Q_3R_3$

6、拼圖的讀法

由上邊開始以順時鐘方向讀，如下：



讀 1234



讀 3742

7、將拼圖的解編號：

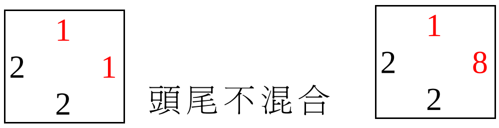
卡片中所含之元素-拼圖中所含卡片的種數-卡片的種類

如：2-2-Aa表示：從每張卡片含二種元素（頭尾不混合）的卡片中，取A、a兩張卡片構成的拼圖。

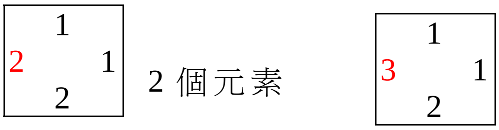
3-3-CcA表示：從每張卡片含三種元素（頭尾不混合）的卡片中，取C、c、A三張卡片構成的拼圖。

二、定義卡片：

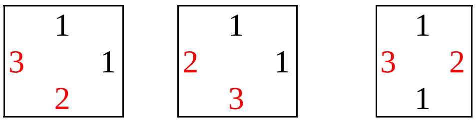
在卡片中，若八種元素可任意擺設，且同一元素可以重複出現，則將會討論到頭尾是否混合，元素的數量和排列方式等因素。



頭尾不混合　　頭尾混合



2 個元素　　3 個元素



將 1，1，2，3 作排列，有 4!/2! ＝12 種排法，環狀排列有 12/4=3 種排法，而形成三張不同的卡片。

1123　　1132　　1213

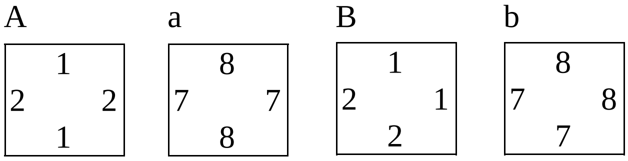
卡片的樣式決定後，即可從中選擇二至九張不同的卡片來拼圖，拼圖所含之圖案數目，會隨卡片種類的多寡與各種卡片本身的性質而改變。

目前我們先討論**卡片中的元素數量，與其組成之拼圖所含圖片數量相等的情形**。

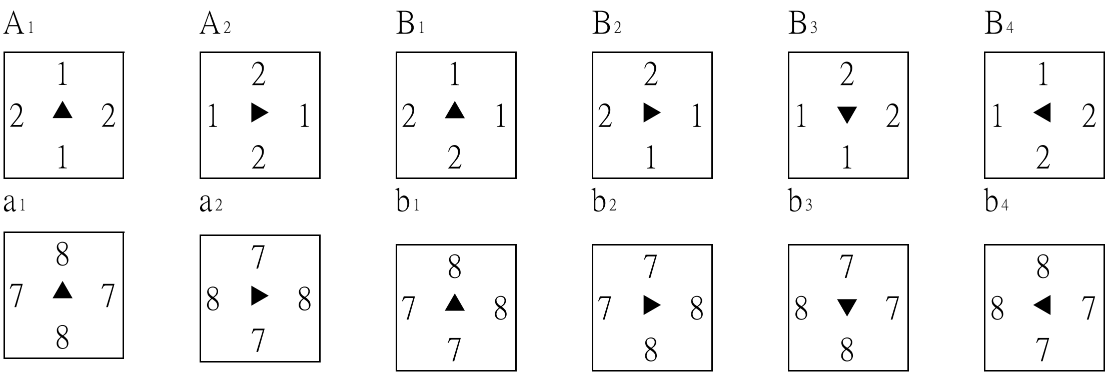
三、將卡片編代號：

1、一張卡片含二元素，頭尾不混合，且整副拼圖只有兩種圖案。

設此兩種圖案為（1,8）(2,7)，可設計出四張卡片：

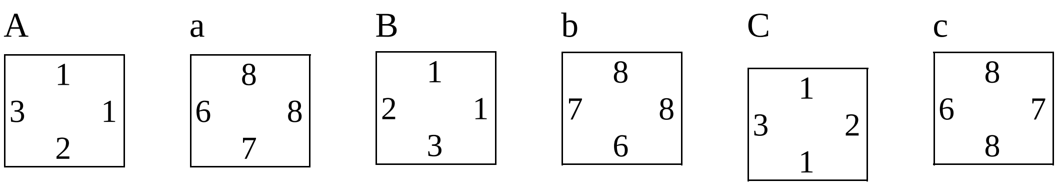


此四張卡片構成拼圖時可旋轉，而形成下列幾種情形。將元素以順時針方向一次輪轉 90º，予以編號：



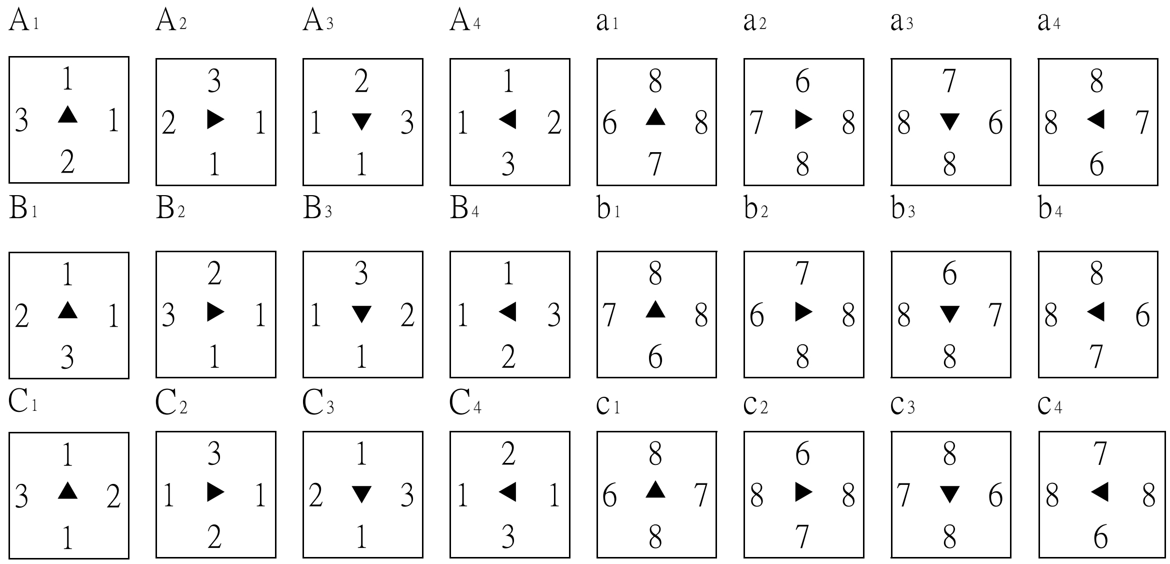
2、一張卡片含三元素，頭尾不混合，且整副拼圖只有三種圖案。

設此三種圖案為（1,8）(2,7)(3,6)。將 1，1，2，3 作排列，有 4!/2!＝12 種排法，環狀排列有 12/4=3 種，形成 A、B、C 三張不同的卡片，各有一張配卡 a、b、c。



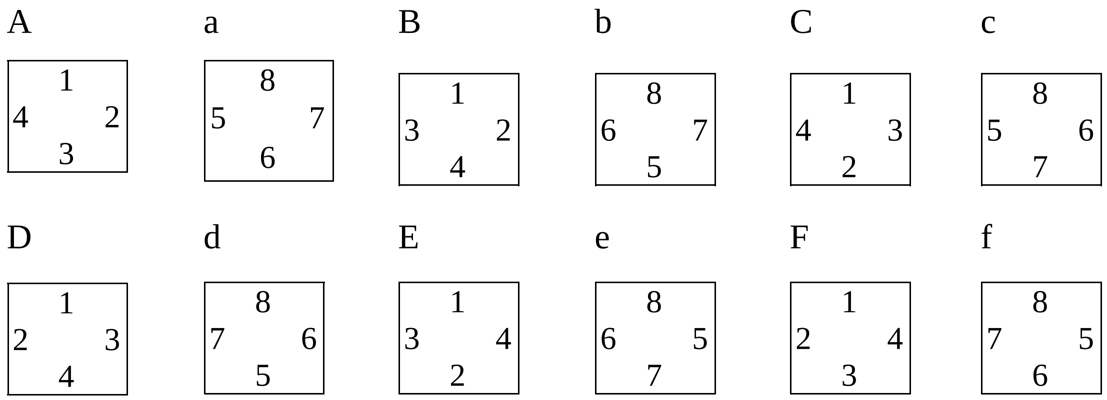
此四張卡片構成拼圖時可旋轉，而形成下列幾種情形。將元素以順時針方

向一次輪轉 90º，予以編號：

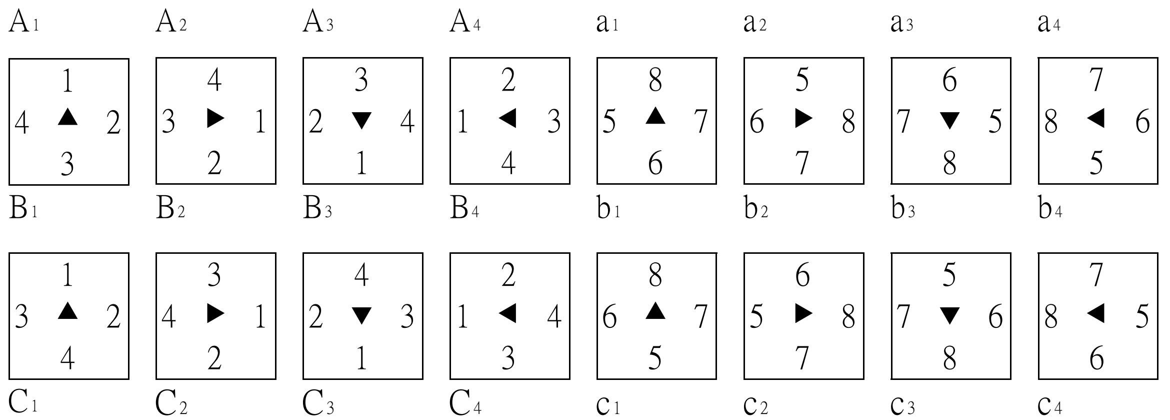


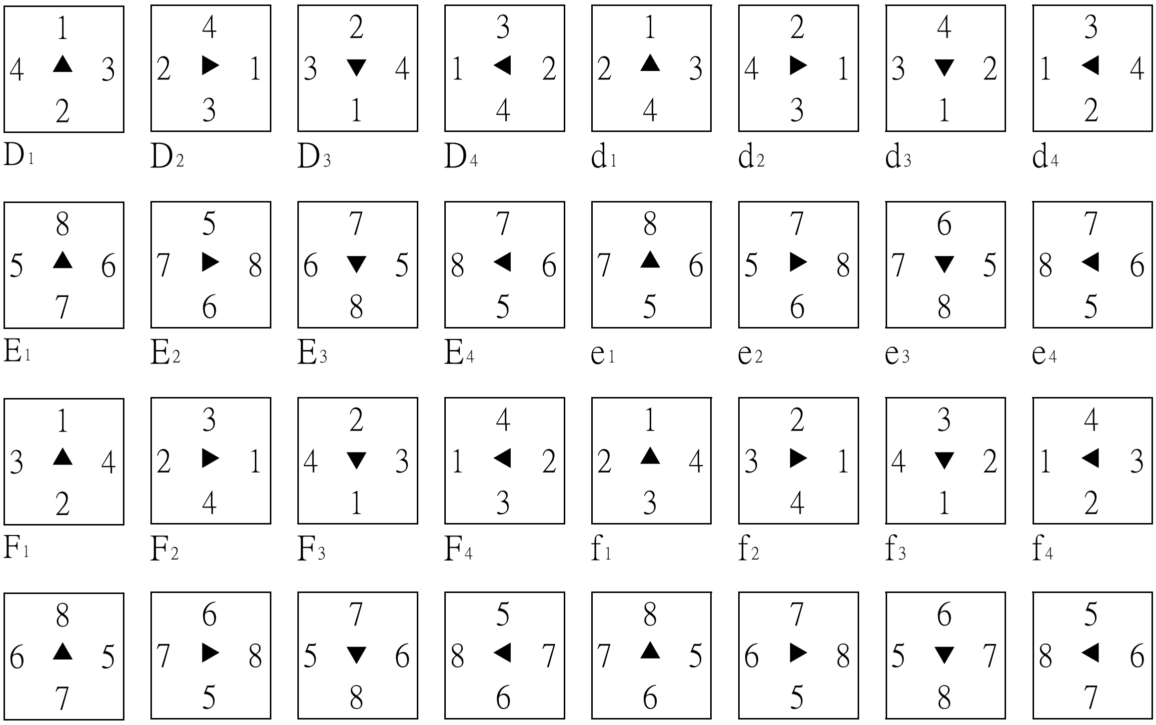
3、卡片含四元素，頭尾不混合，且整副拼圖只有四種圖案。

設此四種圖案為（1,8）（2,7）（3,6）（4,5），將 1，2，3，4 作排列，有 4!＝24 種排法，環狀排列有 24/4=6 種排法，而形成 A、B、C、D、E、F 張不同的卡片，這四張卡片又各有一張配卡 a、b、c、d、e、f。



此四張卡片構成拼圖時可旋轉，而形成下列幾種情形。將元素以順時針方向一次輪轉 90º，予以編號：





四、拼圖過程：

（一）選擇拼圖所含卡片種類（同卡片可以有一張以上）並區分成

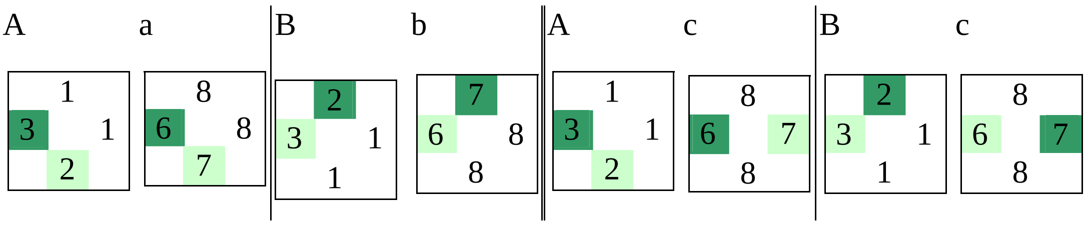
1、共二種圖案，每張卡片含二種元素，頭尾不混合的拼圖。**稱二元素的拼圖。**

2、共三種圖案，每張卡片含三種元素，頭尾不混合的拼圖。**稱三元素的拼圖。**

3、共四種圖案，每張卡片含四種元素，頭尾不混合的拼圖。**稱四元素的拼圖。**

（二）選擇拼圖所含卡片種類（同卡片可以有一張以上），若有兩組以上的卡片**元素排列相對位置相同**，選其中一組即可。

例：二元素的 Aa=Bb、Ac=Bc



從 N 種卡片取出 1 種以上組成拼圖，取卡方式如下：

卡片種數	1	2	3	…	N
取卡方式	C_1^N	C_2^N	C_3^N	…	$C_N^N=1$

在四元素的拼圖中，若要以前述方式取出三張以上不同類卡片構成拼圖，再把所有相對位置相同的刪去，須同時比較多副卡片，難度較高。換從另一角度來思考，我們發現不同種類所構成的拼圖只要卡片間的元素位置調換方式相同，則整副拼圖可視為相

同。例：

C	B
1	1
4 ↺ 3	3 2
2	4

A▼	E▼
1	1
4 ↺ 2	2 3
3	4

◎ 想法 1

把 C、B 中的 2 與 3 位置互換後與 A、E 相同

◎ 想法 2

C 與 B 的關係：C 卡中 1 以外的元素逆時針輪轉一位後形成 B 卡

A 與 E 的關係：A 卡中 1 以外的元素逆時針輪轉一位後形成 E 卡

CB、AE兩兩卡片間元素的位置調換方式相同，故**兩組卡片相對位置相同，應視為同一種拼圖。**

以下是各種卡片組合與卡片中兩兩位置的關係：

1、把元素 1 所在的邊定為正上方。左、下兩邊上的元素位置互換的卡片，記為「Ⅲ」；右、下兩邊上的元素位置互換的卡片，記為「Ⅳ」。如：

A	B	A	C
1	1	1	1
4 2	3 2	4 2	4 3
3	4	3	2

A→B 左、下兩邊上的元素位置互換，A→C 右、下兩邊上的元素位置互換。

2、左、右兩邊上的元素位置互換，記為「＊」 如：

1	1
2 4	4 2
3	3

3、除了 1 以外的三個元素輪轉（逆時針、順時針不影響）一位，記為「↻」

A	D	A	E
1	1	1	1
4 ↺ 2	2 3	4 ↻ 2	3 4
3	4	3	2

A→D 除 1 以外的元素逆時針輪轉一位

A→E 除 1 以外的元素順時針輪轉一位

若將AE的調換方式看成E→A，則成為 1 以外的元素逆時針輪轉一位，可與A→D的調換方式視為相同。

4、觀察各類卡片彼此的關係，可知下頁各種卡片可視為相同：

卡片種類	關係
取兩種	
AB	Ⅲ
AD	↻
AE	↻
AF	＊
BC	↻
BD	＊
BE	Ⅲ
BF	↻
CD	Ⅳ
CE	＊
CF	↻
DE	↻
DF	Ⅲ
EF	Ⅳ

卡片種類	關係	卡片種類	關係
取三種			
ABC	Ⅲ ↻ Ⅳ	DEF	↻ Ⅳ Ⅲ
ABD	Ⅲ ＊ ↻	CEF	＊ Ⅳ ↻
ABE	Ⅲ Ⅲ ↻	CDF	Ⅳ Ⅲ ↻
ABF	Ⅲ ↻ ＊	CDE	Ⅳ ↻ ＊
ACD	Ⅳ Ⅳ ↻	BEF	Ⅲ Ⅳ ↻
ACE	Ⅳ ＊ ↻	BDF	＊ Ⅲ ↻
ACF	Ⅳ ↻ ＊	BDE	＊ ↻ Ⅲ
ADE	↻↻↻	BCF	↻↻↻
ADF	↻ Ⅲ ＊	BCE	↻ ＊ Ⅲ
AEF	↻ Ⅳ ＊	BCD	↻ Ⅳ ＊
取四種			
ABCD	Ⅲ ↻ Ⅳ ↻ Ⅳ ＊	ADEF	↻↻ Ⅳ ＊ ↻ Ⅲ
ABCE	Ⅲ ↻ ＊ ↻ Ⅳ ↻	ACEF	Ⅳ ＊ Ⅳ ＊ ↻↻
ABCF	Ⅲ ↻↻ ＊ Ⅳ ↻	BCDE	↻ Ⅳ Ⅲ ＊ ＊
ABDE	Ⅲ ＊ ↻↻↻ Ⅲ	BCDF	↻ Ⅳ ↻ Ⅳ ＊ ↻
ABDF	Ⅲ ＊ Ⅲ ＊ ↻↻	BCEF	↻ ＊ Ⅳ ↻ Ⅳ ↻
ABEF	Ⅲ Ⅲ Ⅳ ＊ ↻↻	BDEF	＊ Ⅳ Ⅳ ↻ Ⅲ Ⅲ
ACDE	Ⅳ Ⅳ ↻↻↻ ＊	CDEF	Ⅳ ↻ Ⅳ ↻ ＊ Ⅲ
ACDF	Ⅳ Ⅳ Ⅲ ＊ ↻↻		
取五種			
ABCDE	Ⅲ ↻ Ⅳ ↻↻ Ⅳ ↻ ＊ Ⅲ ＊	ACDEF	Ⅳ Ⅳ ↻ Ⅳ ＊ ↻ ＊ ↻↻ Ⅲ
ABCEF	Ⅲ ↻ ＊ Ⅳ ＊ Ⅳ ↻ Ⅲ ↻↻	BCDEF	↻ Ⅳ ↻ Ⅳ ↻ ＊ Ⅲ ＊ ↻ Ⅲ
ABCDF	Ⅲ ↻ Ⅳ Ⅲ ＊ Ⅳ ↻ ＊ ↻↻	ABDEF	Ⅳ ＊ ↻ Ⅳ ＊ ↻↻ Ⅲ ↻ Ⅲ

AD=AE=BC= BF = CF=DE
AF=BD=CE
AC=CD=EF
ABC=DEF=CDF=BEF
ABD=ABF=ADF=BDF=BDE=BCE
ACE=ACF=AEF=CEF=CDE=BCD
ADE=BCF **AB**=BE=DF
ABCE=ABCF=ADEF；**ACDF**=CDEF
ABCDE=BCDEF；**ABCEF**=ACDEF=ABDEF

（三）將選擇的拼圖擴成主、配卡的組合。如：AB 可擴成 aB、Ab、AaB、ABb、Aab、abB、AaBb。若兩組卡片有頭尾互換的關係，選其中一組即可。如： aB=Ab、AaB=Aab、ABb=abB

1、若兩張卡片的元素排列方式相似，只需討論其中一張的擴大情形。如：3-2-AB 擴出的 AaB=ABb

A	a	B		A	B	b
1	8	1		1	1	8
3　1	6　8	2　1	=	3　1	2　1	7　8
2	7	3		2	3	6

2、設卡片種數 ***i***，主、配卡類型總數 ***j***，主卡種類數 ***k***，配卡種類數 ***l***。

項目	代號	可表示為	備註
卡片種數	***i***		$i \in N$
主、配卡類型總數	***j***	2i-m	$i \le j \le 2i$ $j \le 9$
控制主、配卡類型總數的數	***m***		$0 \le m$，$m \in Z$
主卡種類數	***k***	i-n	$0<k\le i,\ k<j$
控制主卡種類數的數	***n***		$0 \le n \le m \le i$ 當 m、n 皆為 0 時，m=n
配卡種類數	***l***	j-k =i-（m-n）	$0<l<i,\ l<j$

①比較（k_1,l_1）（k_2,l_2）。若 $k_1=l_2$ 且 $k_2=l_1$，則（k_1,l_1）（k_2,l_2）為頭尾互換的關係，選其中一組即可。如：（3,2） = （2,3）

②從 ***i*** 種卡片中選 ***i-l=m-n*** 張作為配卡： $C^{i}_{(m-n)}$

③從其餘卡片中選 ***l-（m-n）=i-m*** 張分出配卡： $C^{i-(m-n)}_{(i-m)}$

例：

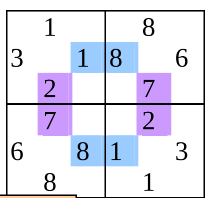
i	***j***	***k***	***l***	***m***	***n***		拼圖名稱
4	8	4	4	0	0	$C^4_4=1$	AaBbCcDd
5	8	4	4	2	1	$C^5_1 \times C^4_3=20$	aBbCcDdE、aBCcDdEe、AabCcDdE
	8	5	3	1	0	$C^5_3=10$	AaBbCcDE、ABbCcDdE、ABCcDdEe
6	8	4	4	3	2	$C^6_2 \times C^4_2 \times 1/2=45$	abCcDdEF、aBbcDdEF、aBbCcdEF、aBbCcDeF、aBbCcDEf、AabcDdEF、AabCdEeF、abCcDeF、AabCcDEf、AaBbcdEF、AaBbcDeF、AaBbcDEf

（四）組合拼圖

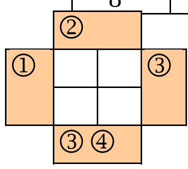
1、將卡片拼出數對 1×2 的拼圖。並編號為①②③④…如：

① 1 8

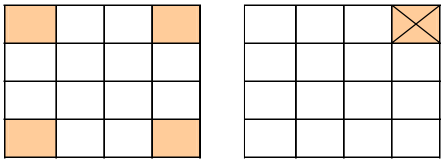
2、取兩對拼成一組 2×2 的拼圖，稱中心卡或田字格。



3、以田字格為中心，向四邊各接一對對卡，以代號記在邊上。



4、各接上一對拼圖後的十字型拼圖，再置入四個角落的卡片（右 1）；若無符合者（右 2），則以☒表示。



5、一副 4×4 拼圖中可截出四副 3×3 解。

A_1	a_1	A_1	a_1
A_1	A_1	a_1	A_1
A_1	a_1	A_1	a_1
A_1	A_1	a_1	A_1

A_1	a_1	A_1	a_1
a_1	A_1	a_1	A_1
A_1	a_1	A_1	a_1
a_1	A_1	a_1	A_1

A_1	a_1	A_1	a_1
A_1	A_1	a_1	A_1
A_1	a_1	A_1	a_1
A_1	A_1	a_1	A_1

A_1	a_1	A_1	a_1
a_1	A_1	a_1	A_1
A_1	a_1	A_1	a_1
a_1	A_1	a_1	A_1

左上方▼

A_1	a_1	A_1
A_1	A_1	a_1
A_1	a_1	A_1

右上方▼

a_1	A_1	a_1
A_1	a_1	A_1
a_1	A_1	a_1

左下方▼

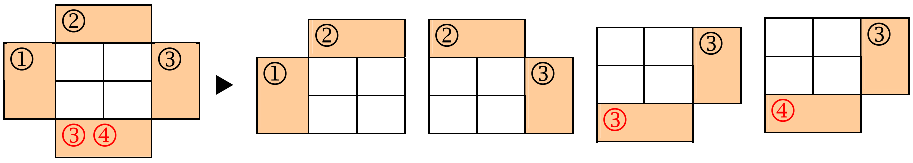
a_1	A_1	a_1
A_1	a_1	A_1
a_1	A_1	a_1

右下方▼

A_1	a_1	A_1
a_1	A_1	a_1
A_1	a_1	A_1

6、一組中心卡的接法可能不只一種，每種都要考慮。

（1）



伍、研究結果

一、二元素、三元素 4×4 拼圖解，如：

二元素

A_1	a_1	A_1	a_1
a_1	A_1	a_1	A_1
A_1	a_1	A_1	a_1
a_1	A_1	a_1	A_1

三元素

C_3	c_1	C_3	c_1
c_3	C_1	c_3	C_1
C_1	c_3	C_1	c_3
c_3	C_1	c_3	C_1

二、二元素、三元素 3×3 解的卡片比例，如：

（一）主配卡關係爲「鄰」

5：4

B_3	b_1	B_3
b_1	B_3	b_1
B_3	b_1	B_3

4：5

A_1	a_1	A_1
a_1	A_1	a_1
A_1	a_1	A_1

1：4：4

A_2	a_3	B_2
a_4	B_1	a_4
B_3	a_2	B_3

2：4：3

A_2	a_3	A_1
a_4	B_1	a_3
B_3	a_2	B_4

3：4：2

A_2	a_3	A_1
a_4	B_1	a_3
B_3	a_2	A_4

4：4：1

B_4	a_1	B_4
a_3	B_2	a_3
A_1	a_4	B_1

（二）主配卡關係爲「對鄰混合」

5：4

A_1	b_1	A_2
b_1	A_2	b_3
A2	b_3	A_1

1：4：4

C_3	c_1	A_2
c_1	C_3	c_1
C_3	c_1	C_3

2：4：3

A_3	c_1	A_2
c_1	C_3	c_1
C_3	c_1	C_3

2：5：2

B_2	a_2	B_4
b_1	B_3	b_2
B_3	a_1	B_1

（三）主配卡關係為「對」

5：4

A_1	a_1	A_1
a_1	A_1	a_1
A_1	a_1	A_1

4：5

C_3	c_1	C_3
c_1	C_3	c_1
C_3	c_1	C_3

三、二元素、三元素、四元素 3×3 拼圖的解，如：

二元素

B_2	a_2	B_3
b_2	B_3	a_2
B_3	b_2	B_4

三元素

A_3	b_2	C_4
c_3	A_1	b_3
B_4	b_2	A_4

四元素

C_1	a_2	D_4
b_4	D_2	a_4
A_3	b_2	E_4

陸、討論

一、從拼圖過程中歸納出每副卡片組裡主配卡的關係

(一)二元素的主配卡關係

1、配卡是 a

a_1	A_1B_2
A_1B_4	a_1

A_1B_3	a_1
a_1	A_1B_1

a_2	B_3
B_3	a_1

B_2	a_2
a_1	B_2

a_1	B_1
B_4	a_2

B_4	a_1
a_2	B_4

2、配卡是 b

b_1	B_3
B_3	b_1

b_1	A_2B_4
B_4	b_2

A_1B_3	b_1
b_1	A_2B_3

B_4	b_1
b_2	A_2B_2

b_1	A_2B_4
A_2B_2	b_3

B_4	b_1
b_3	B_2

B_2	b_3
b_1	B_2

b_2	B_3
A_1B_4	b_1

A_2B_3	b_2
b_1	B_4

b_3	A_1B_2
A_1B_4	b_1

3、配卡為 a 和 b

a_1	A_1B_2
A_1B_4	b_1

a_1	B_1
A_1B_4	b_2

a_1	B_1
B_1	b_3

a_1	A_1B_2
B_1	b_4

A_1B_3	a_1
b_1	B_4

B_4	a_1
b_2	B_4

B_4	a_1
b_3	A_1B_1

A_1B_3	a_1
b_4	A_1B_1

A_1B_3	b_1
a_1	B_2

A_1B_3	b_2
a_1	A_1B_1

B_2	b_3
a_1	A_1B_1

B_2	b_4
a_1	B_2

b_1	B_3
B_3	a_1

b_2	B_3
A_1B_4	a_1

b_3	A_1B_2
A_1B_4	a_1

b_4	A_1B_2
B_3	a_1

(二)三元素的主配卡關係

1、配卡為 a

a_1	A_3B_3
A_3	a_1

A_3C_3	a_1
a_1	A_3C_4

a_1	A_4C_4
	a_2

	a_1
a_2	A_3C_4

a_1	B_4C_2
B_2C_4	a_3

B_4	a_1
a_3	B_2

a_2	A_3B_3
B_4C_3	a_1

B_3C_1	a_2
a_1	A_4B_4

a_3	B_2C_1
B_4C_3	a_1

A_2B_2	a_3
a_1	A_4B_4

2、配卡為 b

b_1	A_3B_3
B_3	b_1

B_3C_1	b_1
b_1	B_3C_2

b_1	B_4C_2
	b_2

	b_1
b_2	B_3C_2

b_1	A_4C_4
A_2C_2	b_3

A_4	b_1
b_3	A_2

b_2	A_3B_3
A_4C_1	b_1

A_3C_3	b_2
b_1	A_4B_4

b_3	A_2C_3
A_4C_1	b_1

A_2B_2	b_3
b_1	A_4B_4

3、配卡為 c

c_1	A_2C_3
B_4C_3	c_1

A_3C_3	c_1
c_1	B_1C_3

c_2	B_1
A_1B_1	c_1

	c_1
c_2	A_4B_4

c_1	A_2C_3
A_4C_1	c_3

A_3C_3	c_1
c_3	A_1C_1

c_2	B_1
A_1B_1	c_1

A_2B_2	c_2
c_1	

c_3	B_2C_1
B_4C_3	c_1

B_3C_1	c_3
c_1	

4、配卡為 a 和 b

a_1	A_3B_3
×	b_1

a_1	B_2C_2
A_3	b_2

a_1	A_4C_4
B_2C_4	b_3

a_1	A_3B_3
B_2C_4	b_4

A_3C_3	a_1
b_1	A_3C_4

B_4	a_1
b_2	A_3C_4

B_3C_1	b_1
a_1	B_3C_2

A_3C_3	b_2
a_1	A_4B_4

A_2B_2	b_3
a_1	A_4B_4

A_2B_2	b_4
a_1	A_3C_4

b_1	A_3B_3
×	a_1

b_2	A_3B_3
B_4C_3	a_1

×	a_1
b_3	×

A_3C_3	a_1
b_4	B_2

b_3	A_2C_3
B_4C_3	a_1

b_4	A_4C_4
A_3	a_1

5、配卡為 b 和 c

b_1	A_3B_3
×	c_1

b_1	A_4C_4
A_2C_2	c_2

b_1	A_3B_3
B_3	c_3

b_1	B_2C_2
A_2C_2	c_4

B_3C_1	b_1
c_1	A_2

A_4	b_1
c_2	B_3C_2

A_3C_3	c_1
b_1	A_4B_4

A_2B_2	c_2
b_1	A_3C_4

B_3C_1	c_3
b_1	A_4B_4

A_2B_2	c_4
b_1	B_3C_2

c_1	A_2C_3
A_4C_1	b_1

c_2	A_3B_3
×	b_1

B_3C_1	b_1
c_3	×

×	b_1
c_4	B_3C_2

c_3	B_2C_1
A_4C_1	b_1

c_4	A_3B_3
×	b_1

6、配卡為 a 和 c

a_1	A_3B_3
A_3	c_1

a_1	A_4C_4
B_2C_4	c_2

a_1	A_3B_3
×	c_3

a_1	B_2C_2
B_2C_4	c_4

A_3C_3	a_1
c_1	×

×	a_1
c_2	A_3C_4

A_3C_3	c_1
a_1	A_4B_4

A_2B_2	c_2
a_1	A_3C_4

B_3C_1	c_3
a_1	A_4B_4

A_2B_2	c_4
a_1	B_3C_2

c_1	A_2C_3
B_4C_3	a_1

c_2	A_3B_3
A_3	a_1

A_3C_3	a_1
c_3	B_2

B_4	a_1
c_4	A_3C_4

c_3	B_2C_1
B_4C_3	a_1

c_4	A_3B_3
×	a_1

(三)當一組卡片無解時，其中必有鄰與對的卡片。

╳	a_2
a_3	C_1

a_2、a_3–鄰；C_1–對

c_3	╳
B_1	c_2

B_1–鄰；c_2、c_3–對

二、 討論一、發現，配卡可夾 0 至 2 張主卡，如何根據此特性簡化拼圖過程？

（一）思考方式

1、配卡中間必被卡區隔。確定配卡的位置，主卡也隨之確定。

主	配	主
配	主	配
主	配	主

配	主	配
主	配	主
配	主	配

2、一副拼圖的主卡與配卡數比爲 4：5 或 5：4。若將 4：5 的拼圖頭尾互換，則成爲 5：4 的拼圖，視爲同一副。

（想法 1）配卡先置入（1,2）（2,1）（2,3）（3,2），再討論主卡。

（1,1）	（1,2）	（1,3）
（2,1）	（2,2）	（2,3）
（3,1）	（3,2）	（3,3）

（想法 2）配卡先置入（1,1）（1,3）（2,2）（3,1）（3,3），再討論主卡。

（1,1）	（1,2）	（1,3）
（2,1）	（2,2）	（2,3）
（3,1）	（3,2）	（3,3）

3、每張卡片有四種旋轉方向，當配卡位於梅花座時，要討論的情形比在其餘四位置時多出 $4^5-4^4=768$ 個。所以只討論後者。

（二）比較上述思考方式與原始的拼圖方法，很多副拼圖在利用原始方法拼出田字格後，可以接上相當多組不同的卡片，要討論的情況爲數龐大（如 ABb共有九組田字格，有一組四邊皆可接上三對卡片，需討論 $3^4=81$ 副的 4×4 拼圖），但可找出某些拼圖延伸後的特性。

（三）簡化後的求解過程

1、列出在田字格中，對角配卡的排列情形和可夾主卡的種類。如：

a_2	B_3
B_3	a_1

A_1B_3	a_1
a_1	A_1B_1

如 2-2-AaB 的配卡 a 在(1,2)（2,1）（2,3）（3,2）（圖一）或（1,1）（1,3）（2,2）（3,1）（3,3）（圖二的梅花座）。當 a 在梅花座時，可從其他副二元素拼圖找梅花座全爲 A，其餘四個位置含 ab 的情形（如 2-4-AaBb）頭尾互換（圖二）。

B_4	a_1	A_1
a_1	B_4	a_1
B_4	a_1	B_4

圖一

A_2	a_2	A_2
b_2	A_2	a_2
A_1	b_2	A_2

頭尾互換 ▶ 圖二

a_2	A_2	a_2
B_2	a_2	A_2
a_1	B_2	a_2

2、不考慮方向，將四張配卡在（1,2）（2,1）（2,3）（3,2）作環狀排列。如：aaaa，bbbb，aaab，aabb，abab，abbb

	a			b			a	
a	↻	a	b	↻	b	b	↻	a
	a			b			a	
	a			a			a	
b	↻	a	b	↻	b	b	↻	b
	b			a			b	

3、討論配卡的方向，同方向可重複，並依序表示配卡編號（如 1322）。

	a_1	
a_2	↻	a_3
	a_2	

4、配卡選擇的方向：

①全部同一方向	C^4_1=4 種	③三同一異	C^4_3×4！/3！＝16 種
②二同二同	C^4_2×4!×1/（2!×2）＝24 種	④二同二異	C^4_1×C^3_2×4！/×2！＝72 種
		⑤四異	4！＝24 種

共 4+24+16+72+24=140 種情形

5、配卡的方向與位置確定以後，刪去無法拼圖的情形，依四角主卡的個數計算解的數量。如右，3-3ACc的解中，配卡爲$c_1c_1c_1c_1$的解有$A_3c_1A_2$-$c_1C_3c_1$-C_3c_1、$A_3c_1C_3$-$c_1C_3c_1$-$C_3c_1C_3$、$C_3c_1A_2$-$c_1C_3c_1$-$C_3c_1C_3$三副。

A_3C_3	c_1	A_2C_3
c_1	C_3	c_1
C_3	c_1	C_3

（四）二、三元素取兩張卡片組成的拼圖之特性

1、全爲對

2-2Aa

①主卡與配卡的方向相同
②可無限延伸

A_1	a_1	A_1
a_1	A_1	a_1
A_1	a_1	A_1

3-2Cc

①主卡與配卡的方向必相差 180°
②橫向：主卡-配卡（與主卡差 180°）-主卡-配卡（與主卡差 180°）
縱向：主卡-配卡（與主卡差 180°）-主卡-配卡（與主卡差 180°）
③可無限延伸

C_3	c_1	C_3
c_1	C_3	C_1
C_3	c_1	C_3

2、全爲鄰

(1) **3-2Aa**

A_3	a_1	A_3
a_1	A_3	a_1
A_3	a_1	A_3

①主卡方向一致，配卡方向一致，主卡與配卡相差 180°
②可無限延伸

(2) **3-2Ab**

A_2	b_3	A_2
b_1	A_4	b_1
A_2	b_3	A_2

①奇行奇列主卡、配卡方向各一致，主卡與配卡相差 90°
②偶行偶列主卡、配卡方向各一致，主卡與配卡相差 90°
③奇行奇列的主、配卡分別爲偶行偶列的主、配卡旋轉 180°
④可無限延伸

3、鄰對混合

(1) **2-2Ab**

①以直線 $x+y=0$ 為軸作對稱
②直線 $m=1$ 上的卡片種類與方向相同
③直線 $m=-1$ 上的卡片種類相同，其方向相差 90°

A_1	b_1	A_2
b_1	A_2	b_3
A_2	b_3	A_1

(2) **3-2Ac** 無解

四、二元素、三元素取三張卡片組成的 4x4 拼圖之特性

1、**ABc**

（1）部分解以中心卡的中點為原點作一平面座標系，可畫分出四組分別位於四個象限的田字格。如圖：

c_2	B_3	c_3	A_1
A_3	c_1	B_1	c_4
c_3	A_1	c_2	B_3
B_1	c_4	A_3	c_1

3-3-ABc-2-5

橫向：…→ c_2B_3-A_3c_1 → c_3A_1-B_1c_4 → c_2B_3-A_3c_1 → c_3A_1-B_1c_4 → c_2B_3-A_3c_1 → c_3A_1-B_1c_4 →…

縱向：…→ c_2B_3-A_3c_1 → c_3A_1-B_1c_4 → c_2B_3-A_3c_1 → c_3A_1-B_1c_4 → c_2B_3-A_3c_1 → c_3A_1-B_1c_4 →…

此類型的解，同種類的卡片方向一致，且位於 $m=1$ 或 $m=-1$ 的直線上。例：

c_2	B_3	c_3	A_1
A_3	c_1	B_1	c_4
c_3	A_1	c_2	B_3
A_1	c_4	A_3	c_1

（圖一）

3-3-ABc-2-6

拼圖中的卡片皆沿 $m=-1$ 的直線向外無限延伸

B_4	c_1	A_2	c_2
c_4	A_4	c_3	B_2
A_2	c_2	B_4	c_1
c_3	B_2	c_4	B_4

（圖二）

比較（圖一）與（圖二）：
相同卡片可分別形成 $m=1$ 和 $m=-1$ 的直線，且由單一方向延伸。

此外（圖一）$m=1$ 直線上的 c 相差 180°：
c_3 →（↻180°）→ c_1 →（↻180°）→ c_3
$m=-1$ 上的 c 相差 90°：
c_2 →（↻90°）→ c_1 →（↻90°）→ c_2

（圖二）$m=1$ 直線上的 c 相差 90°：
c_2 →（↻90°→ c_3 →（↻90°→ c_2 →（↻90°→ c_3
$m=-1$ 上的 c 相差 180°：
c_1 →（↻180°）→ c_3 →（↻180°）→ c_1

（2）某部分解特性如下：

3-3-ABc-4-5			
A_4	c_3	B_2	c_2
c_2	A_4	c_3	B_2
B_2	c_2	B_4	c_1
c_3	B_2	c_4	A_4

（圖一）
以中心卡的中點為原點作一平面座標系，一、三象限的兩組田字格的排列方式相同。

3-3-ABc-1-1			
B_3	c_3	A_1	c_4
c_3	A_1	c_4	B_3
B_1	c_4	B_3	c_3
c_2	B_3	c_3	A_1

（圖二）
以中心卡的中點爲原點作一平面座標系二、四象限的兩組田字格的排列方式相同。

B_2	c_2	A_4	c_3	B_2	c_2
c_3	B_2	c_2	A_4	c_3	B_2
A_4	c_3	B_2	c_2	A_4	c_3
c_2	A_4	c_3	B_2	c_2	B_4
B_2	c_2	B_4	c_1	B_2	c_2
c_3	B_2	c_4	A_4	c_3	B_2

相同的田字格組可被其他的田字格區隔而延伸。

橫向：$\square \rightarrow$ B_2c_2-c_3B_2 $\rightarrow \square \rightarrow$

B_2c_2-c_3B_2 $\rightarrow$

縱向：$\square \rightarrow$ B_2c_2-c_3B_2 $\rightarrow \square \rightarrow$

B_2c_2-c_3B_2 $\rightarrow$

2、**ACc**

3-3-ACc-3-1.2			
c_1	A_2	c_4	C_2
C_3	c_1	A_2	c_4
c_1	C_3	c_1	A_2
C_3	c_1	C_3	c_1

以中心卡的中點爲原點作一平面座標系，二、四象限的兩組田字格的排列方式相同。

c_1	A_2	c_4	C_2	c_4	C_2
C_3	c_1	A_2	c_4	A_2	c_4
c_1	C_3	c_1	A_2	c_4	C_2
C_3	c_1	C_3	c_1	A_2	c_4
c_1	C_3	c_1	C_3	c_1	A_2
C_3	c_1	C_3	c_1	C_3	c_1

二、四象限的兩組田字格可延 m＝-1 的直線延伸，並將拼圖分割成含第一象限的右上半和含第三象限的左下半。

五、三元素的 3×3 拼圖特性

（一）AaBb

梅花座中同種主卡數量比分爲 3：2 和 4：1 兩種(例：3 個 A、2 個 B)

1、3：2 自分成箭頭型和 L 型兩種。

①箭頭型

B_3	b_1	A_4
a_4	A_2	b_3
B_3	b_1	B_4

其右半邊的卡片方向差 180°，中心卡與右上右下的卡片關係一定。不同的解可互相結合。如：

中心卡	A_1	A_2	B_1	B_2
右半邊卡片	(A_3, A_3) (A_4, A_4)	(A_3, A_3) (A_4, A_4) (A_4, B_4)	(B_3, B_3) (B_4, B_4)	(B_3, B_3)

B_3	b_1	A_3	a_1	B_3	b_1	A_4
a_4	A_2	b_4	B_2	a_4	A_2	b_3
B_3	b_1	A_3	a_1	$B3$	b_1	A_4
a_4	A_2	b_4	B_2	a_4	A_2	b_3
B_3	b_1	A_3	a_1	B_3	b_1	B_4

A_4	a_2	B_4	b_2	A_4	a_2	B_3
b_3	B_1	a_3	A_1	b_3	B_1	a_4
A_4	a_2	B_4	b_2	A_4	a_2	B_3
b_3	B_1	a_3	A_1	b_3	B_1	a_4
A_4	a_2	B_4	b_2	A_4	a_2	B_3

▲不同的解互相結合

②**L 型**

此型沒規律，也無法無限延伸。

B_1	b_1	A_2
a_4	A_2	b_3
B_4	b_1	B_3

2、4：1

①四角卡片種類相同，其方向兩同兩同，並可無限延伸。

A_3	a_1	A_4
b_4	B_2	b_4
A_3	a_1	A_4

②四角卡片除（1,1）外種類相同，其方向不規則。可以延 m=1 直線延伸。

A_3	a_1	B_4
b_4	B_2	a_3
B_2	a_4	B_1

③右圖延伸後橘色的卡片會延 m=-1 向左上無限伸；紅色的卡片會 延 m=1 、m=-1 向下無限延伸。

a_1	A_3	a_1	A_4	a_1	A_4	a_1
B_2	b_4	B_2	b_4	B_2	b_4	B_2
a_1	A_3	a_1	A_4	a_1	A_4	a_1
B_2	b_4	B_2	b_4	B_2	b_4	B_2
a_1	A_3	a_1	A_4	a_1	A_4	a_1
B_2	b_4	B_2	b_4	B_2	b_4	B_2
a_1	A_3	a_1	A_4	a_1	A_4	a_1

（二）**ABc**

部分解可結合。

A_3	c_1	B_1	c_2	A_3
c_1	B_1	c_2	A_3	c_1
B_1	c_2	A_3	c_1	B_1
c_2	A_3	c_1	B_1	c_2
A_3	c_1	B_1	c_2	A_3

c_1	B_1	c_4	A_3	c_1	B_1
A_1	c_2	B_3	c_3	A_1	c_2
c_4	A_3	c_1	B_1	c_4	A_3
B_3	c_3	A_1	c_2	B_3	c_3
c_1	B_1	c_4	A_3	c_1	B_1
A_1	c_2	B_3	c_3	A_1	c_2

（三）**Ba**

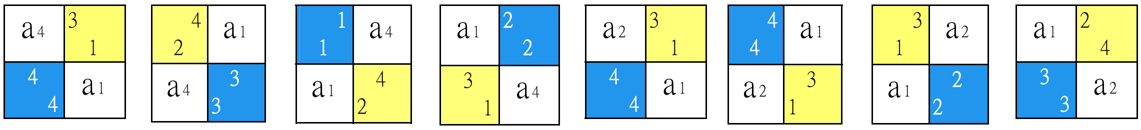
部分解可結合並無限延伸。

a_1	B_4	a_1	B_4	a_1	B_4	a_1	B_4
B_2	a_3	B_2	a_3	B_2	a_3	B_2	a_3
a_4	B_1	a_4	B_1	a_4	B_1	a_4	B_1
B_3	a_2	B_3	a_2	B_3	a_2	B_3	a_2
a_1	B_4	a_1	B_4	a_1	B_4	a_1	B_4
B_2	a_3	B_2	a_3	B_2	a_3	B_2	a_3
a_4	B_1	a_4	B_1	a_4	B_1	a_4	B_1
B_3	a_2	B_3	a_2	B_3	a_2	B_3	a_2

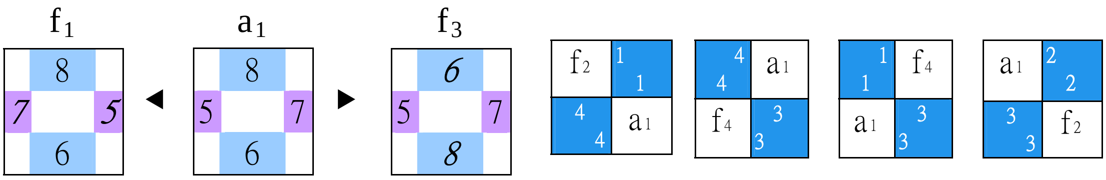
六、四元素卡片田字格的現象

卡片四邊上各有一圖案，可和另張卡片的某邊構成一相鄰兩邊圖案相同的夾角，沒有卡片能置入。

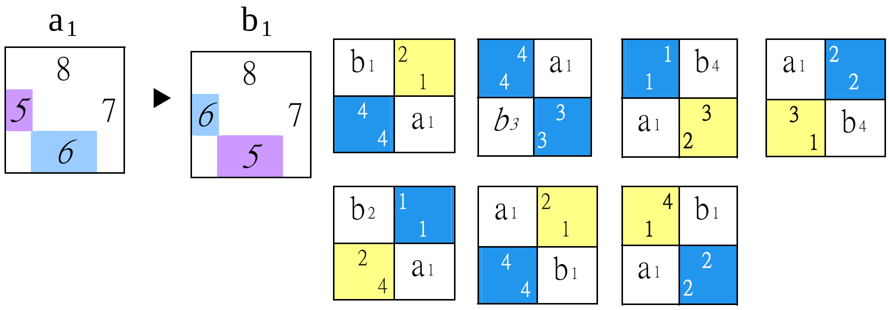
1、同種類卡片在田字格的相對兩角時，若彼此相差 90°，則其餘角落有一處無法放入卡片，共有 8 組。如：



2、相對兩邊上的元素位置互換的卡片X_m、Y_n，組成的田字格會有 4 組其 2 角無法放入卡片，此時X_m、Y_n相差 0°或 180°（|m-n|=0 或 2）。如：



3、某鄰邊上的元素位置互換的卡片X_m、Y_n，組成的田字格有 6 組有一角無法放入卡片。此時，另一組田字格有有兩角無法放入卡片，此時X_m、Y_n相差 180°（|m-n|=2）。



七、關於四元素解

1、 Aa（單種卡片）的特性構成的拼圖可以無限延伸。

A_3	a_1	A_3
a_1	A_3	a_1
A_3	a_1	A_3

2、觀察配卡在（1,2）（2,1）（2,3）（3,2）等四個位置已知解的數量主卡配卡的數量種類多，則有較多解，與「卡片組成複雜度越高，對拼圖的限制越多，所以和解會越少」的猜想不同。如： aBCE、aBCD 無解，aBCDEF 有 1 解；AaBbCcD 有 2 解 AaBbCcDF 有 4 解；AaCcE 有 2 解 AaBbCcEe 有 23 解。

(1) 當配卡只有一種時解最少，甚至有很多無解的情況。如：Aa、AaD、aBCDEF、AaBC、AaBCE 只有一解；Ab、aBCDE、aBCD、AaBCDF 無解。

(2) 觀察卡片彼此關係，拼圖中有相對兩邊互換圖案的卡片時（AF、BD、CE），解的量較多。當配卡有此現象時，解的增加趨勢更明顯。如：AaBbFD 有 10 解；AaBbCcEeF 有 16 解；AaBbCcEe 有 23 解； aBbCcEeF 有 25 解。

3、推測原因：

(1) 卡片組成複雜度越高，當配卡構成相異圖案相鄰的夾角時，有較多種卡片可供選擇，解的變化較多。

(2) 從討論六、可得知：

①當田字格兩對角的卡片屬同類型，不能拼圖的情形佔 1/2。

②當田字格兩對角的卡片彼此相對兩邊上的元素位置互換。不能拼圖的情形有 4 種，佔全部的 1/4。

③當田字格兩對角的卡片彼此爲相鄰兩邊上的元素互換。不能拼圖的情形有 7 種，佔全部的 7/16。

➪ 1/2 ＞ 7/16 ＞ 1/4

➪不能拼出田字格的情況：兩對角的卡片同型＞卡片某鄰邊上元素位置互換＞卡片相對兩元素位置互換

所以拼圖中含相對兩邊互換圖案的卡片時，成功拼出完整田字格的情形較多；若配卡全爲同類型時侷限較大，拼出的的解就很少。

柒、總結

一、拼圖的特性

（一）二元素卡片、三元素卡片取兩張組成的拼圖

1、主配卡關係爲對

（1）**橫向**：主卡-配卡（與主卡方向相同或差 180°）-主卡-配卡（與主卡差 180°）-…

縱向：主卡-配卡（與主卡方向相同或差 180°）-主卡-配卡（與主卡方向相同或差 180°）-…

（2）可無限延伸

2、主配卡關係爲鄰時，如2-2Bb：

B_2	b_4	B_2	b_3	B_2
b_4	B_2	b_4	B_1	b_4
B_2	b_4	B_2	b_3	B_2
b_1	B_3	b_1	B_4	b_1
B_2	b_3	B_2	b_3	B_2
b_4	B_2	b_4	B_2	b_4

（1）主卡與配卡相接的關係：

橫向：主→（↻180°）→配→（↻90°）→主→（↺90°）→配→（↻180°）……

縱向：主→（↻180°）→配→（↻90°）→主→（↺90°）→配→（↻180°）……

（2）可無限延伸

3、主配卡關係爲鄰對混合時，如2-2Ab：

（1）以直線 x+y=0 爲軸作對稱

（2）直線 m=1 上的卡片種類與方向相同

（3）直線 m=-1 上的卡片種類相同，其方向相差 90°

（4）3-2Ac無解

（二）取三張卡片組成的拼圖之特性，例：ABc的特性

1、以中心卡中點爲原點設出一平面座標系，可畫分出四組分別位於四個象限的田字格。

橫向：

$\rightarrow c_2B_3\text{-}A_3c_1 \rightarrow c_3A_1\text{-}B_1c_4 \rightarrow c_2B_3\text{-}A_3c_1 \rightarrow c_3A_1\text{-}B_1c_4 \rightarrow c_2B_3\text{-}A_3c_1 \rightarrow c_3A_1\text{-}B_1c_4$

縱向：

$\rightarrow c_2B_3\text{-}A_3c_1 \rightarrow c_3A_1\text{-}B_1c_4 \rightarrow c_2B_3\text{-}A_3c_1 \rightarrow c_3A_1\text{-}B_1c_4 \rightarrow c_2B_3\text{-}A_3c_1 \rightarrow c_3A_1\text{-}B_1c_4$

2、相同種類的卡片，其方向一致，且都位於 m=1 或 m=-1 的直線上。有以下幾種情形：

（1）相同卡片所形成的直線斜率分別爲 m=1 或 m=-1，且由單一方向伸擴充。

（2）若在拼圖中發現可以同時由 m=1 和 m=-1 的直線向外延伸，情況就同（1）。

（3）m=1 上的c相差 180°（$c_3 \rightarrow_{(\circlearrowleft 180°)} \rightarrow c_1 \rightarrow_{(\circlearrowleft 180°)} \rightarrow c_3$）

m=-1 上的c相差 90° （$c_2 \rightarrow_{(\circlearrowleft 90°)} \rightarrow c_1 \rightarrow_{(\circlearrowleft 90°)} \rightarrow c_2 \rightarrow_{(\circlearrowleft 90°)} \rightarrow c_1$）

（4）m=1 上的c相差 90° （$c_2 \rightarrow_{(\circlearrowleft 90°} \rightarrow c_3 \rightarrow_{(\circlearrowleft 90°} \rightarrow c_2 \rightarrow_{(\circlearrowleft 90°} \rightarrow c_3$）

m=-1 上的c相差 180°（$c_1 \rightarrow_{(\circlearrowleft 180°)} \rightarrow c_3 \rightarrow_{(\circlearrowleft 180°)} \rightarrow c_1$）

（三）關於四元素拼圖：

1、含 4 元素的兩張卡片在田字格的相對兩角時，有些組其餘角落至少有一處無法放入卡片，其組數與此兩張卡片的關係有一定的規則。

2、卡片組成複雜度越高，當配卡構成相異圖案相鄰的夾角時，有較多種卡片可供選擇，解的變化較多，。

3、田字格對拼圖的影響

（1）當兩對角卡片屬同類型，相差 90°或 270°時，田字格不完整。不能拼圖的情形佔了 1/2。

（2）**當兩對角卡片關係爲相對兩邊上的元素互換**。可構成 16 組田字格，有 4 組不能拼圖，佔全部的 1/4。

（3）**當兩對角的卡片關係爲相鄰兩邊上的元素互換**。可構成 16 組田字格，有 7 組不能拼圖，佔全部的 7/16。

（4）3×3 拼圖中含相對兩邊圖案互換的卡片時，有較多完整田字格；若配卡全屬同一類型時，有較少完整田字格。**田字格的數量越多，3×3 拼圖解的數量越多**。

二、改良後的拼圖方法

（一）列出在田字格中對角配卡的排列情形和可夾主卡的種類。

（二）討論當配卡在（1,2）（2,1）（2,3）（3,2）的情況：

1、每個位置可選擇任一旋轉方向的配卡置入，可以重複。

2、配卡方向與位置確定後，由田字格將無合適卡片的情形刪去。

3、利用 2×2 田字格的夾卡情形與排列組合的想法，計算出此解的數量。

捌、未來展望

一、研究卡片中的元素有頭尾混和的拼圖。

二、延伸研究正三角形、正六邊形、正八邊形的等角拼圖。

三、延伸研究正六面體的拼圖積木。

玖、參考資料

一、數學傳播 26 卷 3 期/拼圖遊戲 民 91 年 9 月

二、四角拼圖的秘密http://www.csjh.tc.edu.tw

評　語

040419 高中組數學科　第三名

誰來「角」逐--剖析四角拼圖的拼圖原理

1. 引用他人著作時，宜將作者姓名展示出來。

2. 作品整體的結構不甚明確。

3. 研究成果頗具創意。